SIFAT-SIFAT ISOMORFISMA GRAF FUZZY PADA GRAF FUZZY KUAT

Anik Handayani[1] dan Lucia Ratnasari[2]
[1,2]Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

Abstract: Fuzzy graph is a graph consists pairs of vertex and edge that have degree of membership containing closed interval of real number [0,1] on each edge and vertex. A fuzzy graph $G:(\sigma,\mu)$ is said to be a strong fuzzy graph if degree of membership edge uv with the same minimum degree of membership vertex u and degree of membership vertex v for each edge uv with $u,v\in S$. In this paper describes the properties of fuzzy graphs isomorphism include weak isomorphism, co-weak isomorphism, and isomorphism on strong fuzzy graph.

Keywords: Fuzzy graphs, strength of connectedness, isomorphism.

1. PENDAHULUAN

Graf Fuzzy merupakan perluasan dari Graf Tegas. Definisi pertama dari graf fuzzy diperkenalkan oleh Kaufmann pada tahun 1973 yang didasarkan pada relasi fuzzy Zadeh. Definisi yang lebih terperinci diberikan oleh A. Rosenfeld pada tahun 1975 yang mempertimbangkan relasi fuzzy pada himpunan fuzzy dan dibangun teori graf fuzzy. Rosenfeld telah menghasilkan beberapa konsep seperti jembatan, path, sikel dan tree fuzzy serta menetapkan sifat-sifatnya. Pada waktu yang sama Yoh dan Bang juga memperkenalkan konsep keterhubungan pada graf fuzzy. Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai sifat-sifat isomorfisma graf fuzzy yang meliputi isomorfisma *weak*, isomorfisma *co-weak*, dan isomorfisma pada graf fuzzy kuat yang dikembangkan oleh A. Nagoor Gani dan J. Malarvizhi (2009).

2. GRAF FUZZY KUAT

Berikut akan diberikan definisi – definisi tentang graf tegas, graf fuzzy, keterhubungan pada graf fuzzy dan graf fuzzy kuat.

Definisi 2.1 **[5]** *Graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen – elemen yang disebut titik dan suatu himpunan pasangan tidak terurut titik – titik yang disebut sisi. Himpunan titik dari graf G dinotasikan V(G) dan himpunan sisi dari graf G dinotasikan E(G).*

Definisi 2.2 **[2]** *Titik u dan v dikatakan berdekatan (adjacent) jika terdapat sisi e yang menghubungkan kedua titik tersebut atau $e=uv$. Sedangkan u dan v dikatakan insiden (incident) dengan sisi e dan e dikatakan insiden dengan u dan v.*

Definisi 2.3 **[4]** *Misal S adalah suatu himpunan titik. Graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ adalah sepasang fungsi dimana :*

i. $\sigma : S \to [0,1]$

ii. $\mu : SxS \to [0,1]$ *sedemikian hingga* $\mu(uv) \le \sigma(u) \wedge \sigma(v) \quad \forall u,v \in S$

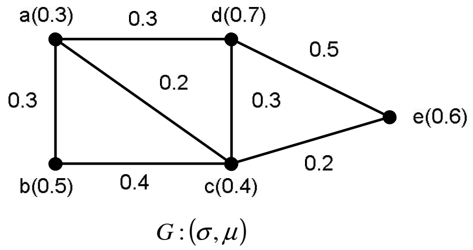
dengan σ merupakan derajat keanggotaan titik dan μ merupakan derajat keanggotaan sisi dari graf fuzzy.

Contoh 2.4 Diberikan graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ dengan himpunan titik S yaitu $S=\{a,b,c,d,e\}$ dengan $\sigma : S\to[0,1]$ dan $\mu : SxS \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai berikut:

a. $\sigma(a)=0.3$, $\sigma(b)=0.5$, $\sigma(c)=0.4$, $\sigma(d)=0.7$, $\sigma(e)=0.6$

b. $\mu(ab)=0.3$, $\mu(ac)=0.2$, $\mu(ad)=0.3$, $\mu(bc)=0.4$, $\mu(cd)=0.3$, $\mu(ce)=0.2$, $\mu(de)=0.6$

Sehingga gambar graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ tersebut adalah



Gambar 1 Graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$

Definisi 2.5 [4] *Jika u dan v terhubung oleh path dengan panjang 'k' maka $\mu^k(uv)$ didefinisikan*

$\mu^k(uv) = \sup\{\mu(uv_1) \wedge \mu(v_1v_2) .... \wedge \mu(v_{k-1}v) \mid u, v_1, v_2, ... v_{k-1} \in S\}$

yang merupakan kekuatan path dari titik u ke titik v dengan panjang k.

Contoh 2.6 Diberikan graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ pada Gambar 1, maka kekuatan path dari titik b ke titik d dengan panjang k diperoleh sebagai berikut :

$$\mu^1(bd) = \sup\{0\} = 0$$
$$\mu^2(bd) = \sup\{0.3, 0.3\} = 0.3$$
$$\mu^3(bd) = \sup\{0.2, 0.2, 0.2\} = 0.2$$
$$\mu^4(bd) = \sup\{0.2\} = 0.2.$$

Definisi 2.7 [4] *Jika $u, v \in S$, kekuatan keterhubungan (strength of connectedness) antara u dan v didefinisikan sebagai* $\mu^\infty(uv) = \sup\{\mu^k(uv) \mid k = 1,2,3..\}$.

Contoh 2.8 *Diberikan graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ pada Gambar 2.1, maka kekuatan keterhubungan dari titik b ke titik d dapat diperoleh sebagai berikut:*

$$\mu^\infty(bd) = \sup\{0, 0.3, 0.2, 0.2\} = 0.3.$$

Definisi 2.9 [4] *Suatu graf dasar dari graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ adalah suatu graf yang dinotasikan $G^*:(\sigma^*,\mu^*)$ dan didefinisikan oleh :*

a. $u \in \sigma^*$ *jika* $\sigma(u) \neq 0,\ \forall u \in V$

b. $uv \in \mu^*$ *jika* $\mu(uv) \neq 0,\ \forall u, v \in V$

Definisi 2.10 [3] *Suatu sisi uv disebut sisi kuat jika* $\mu(uv) \geq \mu^\infty(uv)$.

Definisi 2.11 [1] *Suatu graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ adalah graf fuzzy kuat jika $\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ untuk setiap $uv \in \mu^*$.*

Contoh 2.12 Diberikan graf fuzzy $G_1:(\sigma_1,\mu_1)$ dengan himpunan titik S_1 yaitu $S_1 = \{a,b,c,d,e\}$ dimana $\sigma_1: S_1 \to [0,1]$ dan $\mu_1: S_1xS_1 \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai berikut:

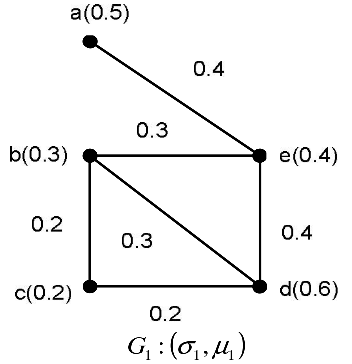
a. $\sigma_1(a) = 0.5$, $\sigma_1(b) = 0.3$, $\sigma_1(c) = 0.2$, $\sigma_1(d) = 0.6$, $\sigma_1(e) = 0.4$

b. $\mu_1(ae) = 0.4, \mu_1(bc) = 0.2, \mu_1(bd) = 0.3,$ $\mu_1(be) = 0.3, \mu_1(cd) = 0.2, \mu_1(de) = 0.4$

Akan ditunjukkan graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ adalah graf fuzzy kuat.

1) $\mu_1(ae) = 0.4$ dan $\sigma_1(a) \wedge \sigma_1(e) = 0.5 \wedge 0.4 = 0.4$
2) $\mu_1(bc) = 0.2$ dan $\sigma_1(b) \wedge \sigma_1(c) = 0.3 \wedge 0.2 = 0.2$
3) $\mu_1(bd) = 0.3$ dan $\sigma_1(b) \wedge \sigma_1(d) = 0.3 \wedge 0.6 = 0.3$
4) $\mu_1(be) = 0.3$ dan $\sigma_1(b) \wedge \sigma_1(e) = 0.3 \wedge 0.4 = 0.3$
5) $\mu_1(cd) = 0.2$ dan $\sigma_1(c) \wedge \sigma_1(d) = 0.2 \wedge 0.6 = 0.2$
6) $\mu_1(de) = 0.4$ dan $\sigma_1(d) \wedge \sigma_1(e) = 0.6 \wedge 0.4 = 0.4$

jadi, graf fuzzy $G_1:(\sigma_1,\mu_1)$ merupakan graf fuzzy kuat karena $\mu_1(uv) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v)$ untuk setiap $uv \in \mu_1^*$. Sehingga gambar graf fuzzy $G_1:(\sigma_1,\mu_1)$ adalah



Gambar 2 Graf fuzzy kuat $G_1:(\sigma_1,\mu_1)$

3. SIFAT-SIFAT ISOMORFISMA GRAF FUZZY PADA GRAF FUZZY KUAT

Definisi 3.1 [1] *Diberikan graf fuzzy* $G:(\sigma,\mu)$ *dan* $G':(\sigma',\mu')$ *dengan himpunan titik berturut-turut* S *dan* S'. *Suatu pemetaan* $h:S\rightarrow S'$ *dengan* h *homomorfisma bijektif disebut isomorfisma weak jika memenuhi* $\sigma(u)=\sigma'(h(u))$ *untuk setiap* $u\in S$. *Selanjutnya graf fuzzy* $G:(\sigma,\mu)$ *dikatakan isomorfis weak dengan* $G':(\sigma',\mu')$.

Definisi 3.2 [1] *Diberikan graf fuzzy* $G:(\sigma,\mu)$ *dan* $G':(\sigma',\mu')$ *dengan himpunan titik berturut-turut* S *dan* S'. *Suatu pemetaan* $h:S\rightarrow S'$ *dengan* h *homomorfisma bijektif disebut isomorfisma co-weak jika memenuhi* $\mu(uv)=\mu'(h(u)h(v))$ *untuk setiap* $u,v\in S$. *Selanjutnya graf fuzzy* $G:(\sigma,\mu)$ *dikatakan isomorfis co-weak dengan* $G':(\sigma',\mu')$.

Definisi 3.3 [1] *Diberikan graf fuzzy* $G:(\sigma,\mu)$ *dan* $G':(\sigma',\mu')$ *dengan himpunan titik berturut-turut* S *dan* S'. *Suatu pemetaan* $h:S\rightarrow S'$ *dengan* h *homomorfisma bijektif disebut isomorfisma jika memenuhi:*

(i). $\sigma(u)=\sigma'(h(u))$ *untuk setiap* $u\in S$

(ii). $\mu(uv)=\mu'(h(u)h(v))$ *untuk setiap* $u,v\in S$

Selanjutnya graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ dikatakan isomorfis dengan $G':(\sigma',\mu')$ dan dinyatakan dengan $G\cong G'$.

Teorema 3.4 [1] *Diketahui* $G\cong G'$, $G:(\sigma,\mu)$ *graf fuzzy kuat jika dan hanya jika* $G':(\sigma',\mu')$ *juga graf fuzzy kuat.*

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misalkan $G\cong G'$ dan $G:(\sigma,\mu)$ graf fuzzy kuat.

Akan ditunjukkan bahwa $G':(\sigma',\mu')$ juga merupakan graf fuzzy kuat.

Karena $G\cong G'$ maka, $\sigma(u)=\sigma'(h(u))$ (1)

$\mu(uv)=\mu'(h(u)h(v))$. (2)

Graf fuzzy $G:(\sigma,\mu)$ adalah graf fuzzy kuat, maka

$\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)\ \ \forall uv\in\mu^*$. (3)

Dari persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh,

$$\mu(uv) = \sigma(u)\wedge\sigma(v)$$

$$\mu'(h(u)h(v)) = \sigma(u)\wedge\sigma(v)$$

$$\mu'(h(u)h(v)) = \sigma'(h(u))\wedge\sigma'(h(v))$$

jadi, $G':(\sigma',\mu')$ juga graf fuzzy kuat karena $\mu'(h(u)h(v))=\sigma'(h(u))\wedge\sigma'(h(v))$ $\forall\, uv\in\mu'^*$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan $G\cong G'$ dan $G':(\sigma',\mu')$ graf fuzzy kuat.

Akan ditunjukkan bahwa $G:(\sigma,\mu)$ juga merupakan graf fuzzy kuat.

Graf fuzzy $G':(\sigma',\mu')$ adalah graf fuzzy kuat maka,

$\mu'(h(u)h(v))=\sigma'(h(u))\wedge\sigma'(h(v))$

$\forall uv\in\mu'^*$. (4)

Dari persamaan (1), (2), dan (4) diperoleh,

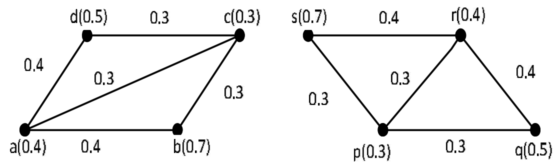
$$\mu'(h(u)h(v)) = \sigma'(h(u))\wedge\sigma'(h(v))$$

$$\mu(uv) = \sigma'(h(u))\wedge\sigma'(h(v))$$

$$\mu(uv) = \sigma(u)\wedge\sigma(v)$$

jadi, $G:(\sigma,\mu)$ graf fuzzy kuat karena $\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)\ \ \forall uv\in\mu^*$. ■

Contoh 3.5 Diberikan graf fuzzy $G_2:(\sigma_2,\mu_2)$ dan graf fuzzy $G_2':(\sigma_2',\mu_2')$ sebagai berikut :



Gambar 3 Graf fuzzy $G_2:(\sigma_2,\mu_2)$ dan graf fuzzy $G_2':(\sigma_2',\mu_2')$

dengan pemetaan $h:S_2\rightarrow S_2'$ yang merupakan pemetaan bijektif yang

didefinisikan
$h(a) = r$, $h(b) = s$, $h(c) = p$, $h(d) = q$.
Akan ditunjukkan bahwa h memenuhi sifat-sifat isomorfisma:

$\sigma_2(a) = 0.4$ dan
$\sigma_2^{'}(h(a)) = \sigma_2^{'}(r) = 0.4$
$\sigma_2(b) = 0.7$ dan
$\sigma_2^{'}(h(b)) = \sigma_2^{'}(s) = 0.7$
$\sigma_2(c) = 0.3$ dan
$\sigma_2^{'}(h(c)) = \sigma_2^{'}(p) = 0.3$
$\sigma_2(d) = 0.5$ dan
$\sigma_2^{'}(h(d)) = \sigma_2^{'}(q) = 0.5$
$\mu_2(ab) = 0.4$ dan
$\mu_2^{'}(h(a)h(b)) = \mu_2^{'}(rs) = 0.4$
$\mu_2(bc) = 0.3$ dan
$\mu_2^{'}(h(b)h(c)) = \mu_2^{'}(sp) = 0.3$
$\mu_2(cd) = 0.3$ dan
$\mu_2^{'}(h(c)h(d)) = \mu_2^{'}(pq) = 0.3$
$\mu_2(ad) = 0.4$ dan
$\mu_2^{'}(h(a)h(d)) = \mu_2^{'}(rq) = 0.4$
$\mu_2(ac) = 0.3$ dan
$\mu_2^{'}(h(a)h(c)) = \mu_2^{'}(rs) = 0.3$

jadi, dapat disimpulkan bahwa h adalah pemetaan bijektif yang memenuhi sifat-sifat isomorfisma sehingga $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ isomorfis dengan $G_2^{'} : (\sigma_2^{'}, \mu_2^{'})$.
Akan diperlihatkan apakah $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ graf fuzzy kuat.

1). $\mu_2(cd) = \sigma_2(c) \wedge \sigma_2(d) = 0.3 \wedge 0.5$
$= 0.3$
2). $\mu_2(ac) = \sigma_2(a) \wedge \sigma_2(c) = 0.4 \wedge 0.3$
$= 0.3$
3). $\mu_2(bc) = \sigma_2(b) \wedge \sigma_2(c) = 0.7 \wedge 0.3$
$= 0.3$
4). $\mu_2(ad) = \sigma_2(a) \wedge \sigma_2(d)$
$= 0.4 \wedge 0.5 = 0.4$
5). $\mu_2(ab) = \sigma_2(a) \wedge \sigma_2(b) = 0.4 \wedge 0.7$
$= 0.4$

jadi, $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ graf fuzzy kuat karena $\mu_2(uv) = \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v) \;\; \forall uv \in \mu_2^{*}$.

Akan diperlihatkan juga apakah $G_7^{'} : (\sigma_7^{'}, \mu_7^{'})$ graf fuzzy kuat.

1). $\mu_2^{'}(pq) = \sigma_2^{'}(p) \wedge \sigma_2^{'}(q)$
$= 0.3 \wedge 0.5 = 0.3$
2). $\mu_2^{'}(pr) = \sigma_2^{'}(p) \wedge \sigma_2^{'}(r)$
$= 0.3 \wedge 0.4 = 0.3$
3). $\mu_2^{'}(ps) = \sigma_2^{'}(p) \wedge \sigma_2^{'}(s)$
$= 0.3 \wedge 0.7 = 0.3$
4). $\mu_2^{'}(qr) = \sigma_2^{'}(q) \wedge \sigma_2^{'}(r) = 0.5 \wedge 0.4$
$= 0.4$
5). $\mu_2^{'}(rs) = \sigma_2^{'}(r) \wedge \sigma_2^{'}(s) = 0.4 \wedge 0.7$
$= 0.4$

jadi, $G_2^{'} : (\sigma_2^{'}, \mu_2^{'})$ juga graf fuzzy kuat karena $\mu_2^{'}(uv) = \sigma_2^{'}(u) \wedge \sigma_2^{'}(v) \;\; \forall uv \in \mu_2^{'*}$.
Dengan demikian $G_2 : (\sigma_2, \mu_2)$ graf fuzzy kuat jika dan hanya jika $G_2^{'} : (\sigma_2^{'}, \mu_2^{'})$ juga graf fuzzy kuat.

Teorema 3.6 [1] *Diketahui $G : (\sigma, \mu)$ isomorfis co-weak dengan $G : (\sigma, \mu)$, jika $G' : (\sigma', \mu')$ graf fuzzy kuat maka $G : (\sigma, \mu)$ juga graf fuzzy kuat.*

Bukti:
Misalkan $G : (\sigma, \mu)$ isomorfis *co-weak* dengan $G' : (\sigma', \mu')$ dan $G' : (\sigma', \mu')$ graf fuzzy kuat.
Akan dibuktikan bahwa $G : (\sigma, \mu)$ juga merupakan graf fuzzy kuat.
Graf fuzzy $G : (\sigma, \mu)$ isomorfis *co-weak* dengan $G' : (\sigma', \mu')$ maka,

$$\sigma(u) \le \sigma'(h(u)) \;\; \forall u \in S \qquad (5)$$

$$\mu(uv) = \mu'(h(u)h(v)) \;\; \forall u, v \in S . \qquad (6)$$

Graf fuzzy $G' : (\sigma', \mu')$ adalah graf fuzzy kuat maka,

$$\mu'(h(u)h(v)) = \sigma'(h(u)) \wedge \sigma'(h(v))$$

$$\forall uv \in \mu'^{*} . \qquad (7)$$

Dari persamaan (5), (6), dan (7) diperoleh,

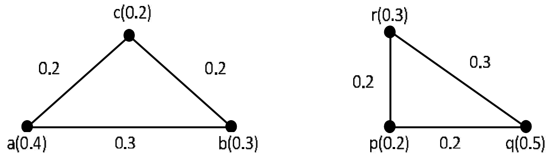
$$\mu'(h(u)h(v)) = \sigma'(h(u)) \wedge \sigma'(h(v))$$

$$\mu(uv) \quad = \sigma'(h(u)) \wedge \sigma'(h(v))$$

$$\mu(uv) \quad \ge \quad \sigma(u) \wedge \sigma(v) \qquad \forall uv \in \mu^{*} .$$

Jadi, $G:(\sigma,\mu)$ juga graf fuzzy kuat karena $\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)\ \ \forall uv\in\mu^{*}$. ■

Contoh 3.7 Diberikan graf fuzzy $G_3:(\sigma_3,\mu_3)$ dan graf fuzzy kuat $G_3^{'}:(\sigma_3^{'},\mu_3^{'})$ seperti pada gambar berikut:



Gambar 4 *Graf fuzzy* $G_3:(\sigma_3,\mu_3)$ *dan graf fuzzy* $G_3^{'}:(\sigma_3^{'},\mu_3^{'})$

dengan pemetaan $h:S_3\rightarrow S_3^{'}$ yang merupakan pemetaan bijektif yang didefinisikan

$$h(a)=q\ ,\ h(b)=r\ ,\ h(c)=p\ .$$

Akan ditunjukkan bahwa h memenuhi sifat-sifat isomorfisma *co-weak*:

1) $\sigma_3(a)=0.4$ dan $\sigma_3^{'}(h(a))=\sigma_3^{'}(q)=0.5$
2) $\sigma_3(b)=0.3$ dan $\sigma_3^{'}(h(b))=\sigma_3^{'}(r)=0.3$
3) $\sigma_3(c)=0.2$ dan $\sigma_3^{'}(h(c))=\sigma_3^{'}(p)=0.2$
4) $\mu_3(ab)=0.3$ dan $\mu_3^{'}(h(a)h(b))=\mu_3^{'}(qr)=0.3$
5) $\mu_3(bc)=0.2$ dan $\mu_3^{'}(h(b)h(c))=\mu_3^{'}(rp)=0.2$
6) $\mu_3(ac)=0.2$ dan $\mu_3^{'}(h(a)h(c))=\mu_3^{'}(qp)=0.2$

jadi, h adalah pemetaan bijektif yang memenuhi sifat-sifat isomorfisma *co-weak* sehingga $G_3:(\sigma_3,\mu_3)$ isomorfis *co-weak* dengan $G_3^{'}:(\sigma_3^{'},\mu_3^{'})$.

Akan diperlihatkan apakah $G_3:(\sigma_3,\mu_3)$ graf fuzzy kuat.

1). $\mu_3(ab)=\sigma_3(a)\wedge\sigma_3(b)=0.4\wedge 0.3$
$=0.3$
2). $\mu_3(ac)=\sigma_3(a)\wedge\sigma_3(c)=0.4\wedge 0.2$
$=0.2$
3). $\mu_3(bc)=\sigma_3(b)\wedge\sigma_3(c)=0.3\wedge 0.2$
$=0.2$

Jadi, $G_3:(\sigma_3,\mu_3)$ graf fuzzy kuat karena $\mu_3(uv)=\sigma_3(u)\wedge\sigma_3(v)\ \ \forall\ uv\in\mu_3^{*}$.

Akan diperlihatkan juga apakah $G_3^{'}:(\sigma_3^{'},\mu_3^{'})$ graf fuzzy kuat.

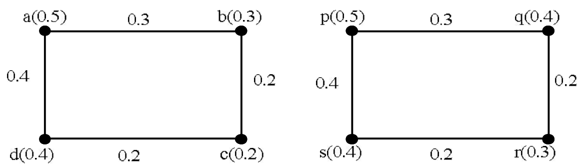
1). $\mu_3^{'}(pq)=\sigma_3^{'}(p)\wedge\sigma_3^{'}(q)$
$=0.2\wedge 0.5=0.2$
2). $\mu_3^{'}(pr)=\sigma_3^{'}(p)\wedge\sigma_3^{'}(r)=0.2\wedge 0.3$
$=0.2$
3). $\mu_3^{'}(qr)=\sigma_3^{'}(q)\wedge\sigma_3^{'}(r)=0.5\wedge 0.3$
$=0.3$

Jadi, $G_3^{'}:(\sigma_3^{'},\mu_3^{'})$ juga graf fuzzy kuat karena $\mu_3^{'}(uv)=\sigma_3^{'}(u)\wedge\sigma_3^{'}(v)\ \ \forall\ uv\in\mu_3^{'*}$.

Dengan demikian jika $G_3^{'}:(\sigma_3^{'},\mu_3^{'})$ graf fuzzy kuat maka $G_3:(\sigma_3,\mu_3)$ juga graf fuzzy kuat.

Catatan 3.8 [1] Diketahui $G:(\sigma,\mu)$ isomorfis *co-weak* dengan $G':(\sigma',\mu')$, jika $G:(\sigma,\mu)$ graf fuzzy kuat maka tidak selalu berakibat $G':(\sigma',\mu')$ juga graf fuzzy kuat.

Contoh 3.9 Diberikan graf fuzzy kuat $G_4:(\sigma_4,\mu_4)$ dan graf fuzzy $G_4^{'}:(\sigma_4^{'},\mu_4^{'})$ seperti pada gambar berikut :



Gambar 5 *Graf fuzzy* $G_4:(\sigma_4,\mu_4)$ *dan graf fuzzy* $G_4^{'}:(\sigma_4^{'},\mu_4^{'})$

dengan pemetaan $h:S_4\rightarrow S_4^{'}$ yang merupakan pemetaan bijektif yang didefinisikan

$h(a)=p\ ,\ h(b)=q\ ,\ h(c)=r\ ,\ h(d)=s\ .$

Akan ditunjukkan bahwa h memenuhi sifat-sifat isomorfisma *co-weak*:

1) $\sigma_4(a)=0.5$ dan $\sigma_4^{'}(h(a))=\sigma_4^{'}(p)=0.5$
2) $\sigma_4(b)=0.3$ dan $\sigma_4^{'}(h(b))=\sigma_4^{'}(q)=0.4$
3) $\sigma_4(c)=0.2$ dan $\sigma_4^{'}(h(c))=\sigma_4^{'}(r)=0.3$

4) $\sigma_4(d) = 0.4$ dan $\sigma_4^{'}(h(d)) = \sigma_4^{'}(s) = 0.4$
5) $\mu_4(cd) = 0.2$ dan $\mu_4^{'}(h(c)h(d)) = \mu_4^{'}(rs) = 0.2$
6) $\mu_4(bc) = 0.2$ dan $\mu_4^{'}(h(b)h(c)) = \mu_4^{'}(qr) = 0.2$
7) $\mu_4(ab) = 0.3$ dan $\mu_9^{'}(h(a)h(b)) = \mu_9^{'}(pq) = 0.3$
8) $\mu_4(ad) = 0.4$ dan $\mu_4^{'}(h(a)h(d)) = \mu_4^{'}(ps) = 0.4$

jadi, h adalah pemetaan bijektif yang memenuhi sifat-sifat isomorfisma *co-weak* sehingga $G_4 : (\sigma_4, \mu_4)$ isomorfis *co-weak* dengan $G_4^{'} : (\sigma_4^{'}, \mu_4^{'})$.

Akan diperlihatkan apakah $G_4^{'} : (\sigma_4^{'}, \mu_4^{'})$ merupakan graf fuzzy kuat.

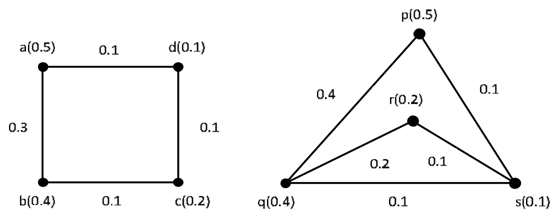
$$\mu_4^{'}(rs) = \sigma_4^{'}(r) \wedge \sigma_9^{'}(s)$$
$$= 0.3 \wedge 0.4 \neq 0.2$$

Jadi, $G_4^{'} : (\sigma_4^{'}, \mu_4^{'})$ bukan merupakan graf fuzzy kuat karena tidak memenuhi $\mu_4^{'}(uv) = \sigma_4^{'}(u) \wedge \sigma_4^{'}(v)\ \forall\, uv \in \mu_4^{'*}$.

Dengan demikian jika $G_4 : (\sigma_4, \mu_4)$ graf fuzzy kuat maka $G_4^{'} : (\sigma_4^{'}, \mu_4^{'})$ belum tentu graf fuzzy kuat.

Catatan 3.10 [1] Diketahui $G : (\sigma, \mu)$ isomorfis *weak* dengan $G' : (\sigma', \mu')$, graf fuzzy kuat pada salah satu graf tidak selalu berakibat pada graf yang lain.

Contoh 3.11 Diberikan graf fuzzy $G_5 : (\sigma_5, \mu_5)$ dan graf fuzzy kuat $G_5^{'} : (\sigma_5^{'}, \mu_5^{'})$ seperti pada gambar berikut



***Gambar 6** Graf fuzzy $G_5 : (\sigma_5, \mu_5)$ dan graf fuzzy $G_5^{'} : (\sigma_5^{'}, \mu_5^{'})$*

dengan pemetaan $h : S_5 \to S_5^{'}$ yang merupakan pemetaan bijektif yang didefinisikan
$h(a) = p$, $h(b) = q$, $h(c) = r$, $h(d) = s$.

Akan ditunjukkan bahwa h memenuhi sifat-sifat isomorfisma *weak*:

1) $\sigma_5(a) = 0.5$ dan $\sigma_5^{'}(h(a)) = \sigma_5^{'}(p) = 0.5$
2) $\sigma_5(b) = 0.4$ dan $\sigma_5^{'}(h(b)) = \sigma_5^{'}(q) = 0.4$
3) $\sigma_5(c) = 0.2$ dan $\sigma_5^{'}(h(c)) = \sigma_5^{'}(r) = 0.2$
4) $\sigma_5(d) = 0.1$ dan $\sigma_5^{'}(h(d)) = \sigma_5^{'}(s) = 0.1$
5) $\mu_5(cd) = 0.1$ dan $\mu_5^{'}(h(c)h(d)) = \mu_5^{'}(rs) = 0.1$
6) $\mu_5(bc) = 0.1$ dan $\mu_5^{'}(h(b)h(c)) = \mu_5^{'}(qr) = 0.2$
7) $\mu_5(ab) = 0.3$ dan $\mu_5^{'}(h(a)h(b)) = \mu_5^{'}(pq) = 0.4$
8) $\mu_5(ad) = 0.1$ dan $\mu_5^{'}(h(a)h(d)) = \mu_5^{'}(ps) = 0.1$

jadi, h adalah pemetaan bijektif yang memenuhi sifat-sifat isomorfisma *weak* sehingga $G_5 : (\sigma_5, \mu_5)$ isomorfis *weak* dengan $G_5^{'} : (\sigma_5^{'}, \mu_5^{'})$.

Akan diperlihatkan apakah $G_5 : (\sigma_5, \mu_5)$ merupakan graf fuzzy kuat.

$\mu_5(bc) = \sigma_5(b) \wedge \sigma_5(c) = 0.4 \wedge 0.2 \neq 0.1$

jadi, $G_5 : (\sigma_5, \mu_5)$ bukan merupakan graf fuzzy kuat karena terdapat $\mu_{10}(uv)$ yang tidak memenuhi $\mu_5(uv) = \sigma_5(u) \wedge \sigma_5(v)$ $\forall\, uv \in \mu_{10}^{*}$.

Dengan demikian $G_5^{'} : (\sigma_5^{'}, \mu_5^{'})$ graf fuzzy kuat, namun $G_5^{'} : (\sigma_5^{'}, \mu_5^{'})$ belum tentu graf fuzzy kuat.

4. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, diperoleh apabila $G : (\sigma, \mu)$ isomorfis dengan $G' : (\sigma', \mu')$, $G : (\sigma, \mu)$ graf fuzzy kuat jika dan hanya jika $G':(\sigma',\mu')$ juga graf fuzzy kuat, namun tidak berlaku apabila $G:(\sigma,\mu)$ isomorfis *weak* dengan $G':(\sigma',\mu')$. Apabila $G:(\sigma,\mu)$ isomorfis *co-weak* dengan $G':(\sigma',\mu')$, jika $G':(\sigma',\mu')$ graf fuzzy kuat maka $G:(\sigma,\mu)$ juga graf fuzzy kuat, tetapi tidak berlaku sebaliknya.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Gani, A. Nagoor and J. Malarvizhi. 2009. *Isomorphism Properties on Strong Fuzzy Graphs*. Volume 2, Number 1, 39-47. International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics.

[2]. G. Chartrand and L. Lesniak . 2000. *Graphs & Digraphs*. Third Edition. Chapman & Hall. New York

[3]. KR. Bhutani, A. Rosenfeld. 2003. Strong Arcs in Fuzzy Graphs. Volume 152, Pages 319 – 322 Information Sciences.

[4]. Mordeson, John. N., and Premchand S. Nair. 2000. *Fuzzy Graphs and Hypergraphs*, Physica - Verlag, Heidelberg.

[5]. Wilson, J. Robin and John J. Watskin. 1990. *Graphs An Introductory Approach*. New York : University Course Graphs, Network, and Design.