KAITAN ANTARA SUPLEMEN SUATU MODUL DAN EKSISTENSI AMPLOP PROYEKTIF MODUL FAKTORNYA DALAM KATEGORI $\sigma[M]$

Fitriani
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Jl. Prof.Dr. Soemantri Brojonegoro No.1 Bandar Lampung

Abstract. Let M be an R-module and $N \in \sigma[M]$. A projective module P with a superfluous epimorphism $\pi : P \to N$ is called projective cover of N in $\sigma[M]$. Even if there are enough projective module in $\sigma[M]$, a module need not have a projective cover. To get projective cover, we need supplement which do not always exist. In this paper, we will investigate relation between supplement of a module M and existence projective cover of a factor module of M.

Keywords: M-projective module, projective cover, superfluous epimorphism, supplement.

1. PENDAHULUAN

Diberikan R adalah ring assosiatif dengan elemen satuan ($1_R \in R$). Suatu modul disebut proyektif jika modul tersebut merupakan penjumlah langsung suatu modul bebas. Artinya, untuk setiap R-modul M_1, M_2, jika diberikan barisan eksak pendek $0 \to M_1 \to M_2 \to P \to 0$, maka P merupakan modul proyektif jika barisan eksak tersebut terpisah. Selanjutnya, jika M adalah suatu R-modul, maka P disebut modul M-proyektif jika untuk setiap R-modul M_1, barisan R-modul $0 \to M_1 \to M \to P \to 0$ bersifat eksak dan terpisah [6]. Jadi, modul M-proyektif merupakan modul proyektif relatif terhadap barisan eksak tertentu.

Beberapa hal yang terkait dengan modul M-proyektif adalah submodul kecil, epimorfisma kecil dan amplop proyektif. Tidak semua modul mempunyai amplop proyektif. Katayama (1969) memberikan salah satu syarat perlu dan cukup suatu modul mempunyai amplop proyektif yang berkaitan dengan eksistensi elemen idempoten ring endomorfisma dari ring tersebut yang memenuhi syarat tertentu di dalam kategori R-modul. Selain itu, syarat lain agar dimiliki amplop proyektif adalah modul tersebut merupakan modul bersuplemen [6].

Buyukasik (2010) membuktikan bahwa untuk modul proyektif lokal (*locally projective module*), setiap submodul maksimal merupakan suplemen jika dan hanya jika submodul tersebut semi sederhana dan merupakan modul proyektif.

Dengan adanya keterkaitan antara suplemen suatu modul dan modul proyektif, maka dalam penelitian ini akan dikaji mengenai sifat dan karakteristik suplemen dari suatu modul, serta kaitan antara suplemen suatu modul dan eksistensi amplop proyektif dari modul faktornya dalam kategori $\sigma[M]$, yang merupakan subkategori penuh dari kategori R-modul R-*MOD*.

2. SUPLEMEN DARI SUATU MODUL

Suplemen dari suatu submodul R-modul M didefinisikan sebagai berikut. Misalkan M adalah R-modul dan U, V submodul M. Submodul V dikatakan suplemen dari U di M jika V minimal terhadap himpunan submodul-submodul L dari M yang memenuhi $U + L = M$. Jadi, $V = \min \{L \mid U + L = M\}$ [3]. Dengan kata lain, V adalah suplemen dari U di M jika $U + V = M$ dan untuk setiap L submodul M dengan $U + L = M$, berakibat $V \subseteq L$.

Misalkan M adalah R-modul dan S submodul M. Submodul S dikatakan submodul kecil di M, ditulis $S << M$ $M \neq S + T$, untuk setiap submodul sejati T dari M [5]. Sifat dan karakterisasi suplemen suatu modul dalam kaitannya dengan submodul kecil diberikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.1 [2] *Diberikan U, V merupakan submodul dari R-modul M. V merupakan suplemen dari U di M jika dan hanya jika U + V = M dan $U \cap V$ merupakan submodul kecil di V (yaitu $U \cap V$ = V).*

Bukti :

Diketahui V suplemen dari U di M dan $X \subseteq V$ yang memenuhi

$$(U \cap V) + X = V.$$

Akan ditunjukkan $X = V$.

Perhatikan bahwa

$M = V + U = (U \cap V) + X + U = U + X$.

Berdasarkan keminimalan V, diperoleh $V \subseteq X$. Karena X merupakan submodul V, maka X = V. Akibatnya, $U \cap V$ merupakan submodul kecil di V. Sebaliknya, diketahui $U + V = M$ dan $U \cap V = V$. Akan ditunjukkan V merupakan suplemen dari U di M, yaitu V minimal terhadap submodul-submodul L dari M yang memenuhi $U + L = M$. Misal $Y \subseteq V$ yang memenuhi U + Y = M. Akibatnya,

$V = M \cap V = (U + Y) \cap V = (U \cap V) + Y$.

Berdasarkan hipotesis, $U \cap V = V$. Oleh karena itu, diperoleh $Y = V$. Jadi, terbukti bahwa V merupakan suplemen U di M. ■

Karakterisasi lain dari suplemen suatu modul disajikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.2 [6] *Misalkan M adalah R-modul dan X = M . Jika $X \subseteq A \subseteq M$ dan A suplemen di M, maka X = A.*

Bukti:

Misalkan X + Y = A untuk suatu Y submodul dari A. Karena A suplemen di M, maka terdapat K submodul dari M yang memenuhi M = K + A dan $K \cap A = A$. Jadi, $M = K + A = K + X + Y$. Karena $X = M$, maka diperoleh $K + Y = M$. Dengan menggunakan hukum modular, diperoleh $A = (A \cap K) + Y$ yang berakibat A = Y. Jadi, terbukti bahwa X = A. ■

Dalam $\mathbf{Z}$ sebagai $\mathbf{Z}$-modul, setiap submodul sejati yang tak nol tidak mempunyai suplemen. Dapat diperhatikan bahwa $U + V \neq \mathbf{Z}$, untuk setiap U dan V submodul sejati dari $\mathbf{Z}$ sebagai $\mathbf{Z}$-modul. Hal ini mendasari pendefinisian suatu modul yang setiap submodul sejatinya yang tak nol mempunyai suplemen di dalam modul yang dinamakan dengan modul bersuplemen. Salah satu contoh dari modul bersuplemen adalah modul semi sederhana. Modul semi sederhana yang merupakan hasil tambah langsung dari submodul-submodul sederhana merupakan modul bersuplemen, sebab setiap submodul dari modul semi sederhana merupakan penjumlah langsung, seperti yang akan dibuktikan dalam Proposisi berikut.

Proposisi 2.3 [1] *Jika M adalah R-modul yang merupakan jumlahan submodul submodul sederhana $\{M_i\}_{i \in I}$ dan N adalah sebarang submodul dari I, maka terdapat $J \subseteq I$ sedemikian sehingga $M \cong N \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$.*

Bukti :

Misalkan M adalah modul semi sederhana dan N sebarang submodul dari N. Akan ditunjukkan N merupakan penjumlah langsung, yaitu terdapat N' submodul dari M sedemikian sehingga $N \oplus N' = M$. Karena M adalah modul semi sederhana, maka dapat diasumsikan $M = \oplus_{i \in I} M_i$.

Dibentuk

$$S = \{P \subseteq I \mid M_P \cong \bigoplus_{i \in P} M_i \text{ dan } M_P \cap N = \{0\}\}$$

maka S dengan inklusi merupakan himpunan terurut parsial.

Misalkan $C = \{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ adalah sebarang rantai di S dan $P = \cup_{\alpha \in A} P_\alpha$. Akan ditunjukkan $P \in S$. Andaikan $P \notin S$. Karena $M_P \cap N = \{0\}$, maka harus ditunjukkan $M_P \cong \oplus_{i \in P} M_i$. Jadi, terdapat $p_0 \in P$ sedemikian sehingga $M_{p_0} \cap M_{P'} \neq \{0\}$, dengan $P' = P \setminus p_0$

Misalkan $0 \neq x \in M_{p_0}$, maka x dapat dituliskan sebagai:

$$x = x_{p_1} + ... + x_{p_k}$$

dengan $x_{p_i} \in M_{p_i}$, untuk $\{p_{1,} ...., p_k\} \subseteq P'$ dan $x_{p_i} \neq 0$, untuk setiap $i \in \{1,...,k\}$. Karena C merupakan rantai, maka terdapat suatu indeks α sedemikian sehingga $\{p_{1,} ...., p_k\}$ tidak termuat di dalam P_α. Jadi, $M_{P_\alpha} \cong \oplus_{i \in P_\alpha} M_i$. Kontradiksi dengan $P_\alpha \in S$. Oleh karena itu, haruslah $P \in S$.

Berdasarkan Lemma Zorn yang menyatakan bahwa jika *X* merupakan himpunan terurut parsial dan setiap rantai di *X* mempunyai batas atas, maka *X* mempunyai elemen maksimal. Dalam hal ini, $P \in S$ merupakan batas atas dari rantai *C*. Akibatnya, *S* mempunyai elemen maksimal, katakan *J*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $M = N + M_J \cong N \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$. Andaikan tidak benar, maka terdapat indeks $i_0 \in I$ sedemikian sehingga $M_{i_0} \nsubseteq N + M_J$, maka $M_{i_0} \not\subset N$ dan $M_{i_0} \not\subset M_J$. Karena M_{i_0} merupakan modul sederhana, maka diperoleh $M_{i_0} \cap N = \{0\}$ dan $M_{i_0} \cap M_J = \{0\}$. Oleh karena itu, $\{i_0 \cup J\} \in S$. Hal ini menimbulkan kontradiksi dengan kemaksimalan *J*. Jadi, haruslah $M = N + M_J \cong N \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$ atau dengan kata lain, setiap submodul dari *M* merupakan penjumlah langsung. Akibatnya, setiap modul semi sederhana merupakan modul bersuplemen. ■

Radical dari suatu R-modul *M* didefinisikan sebagai irisan semua submodul maksimal dan ditulis *Rad*(*M*). Jika *M* tidak memiliki submodul maksimal, maka ditentukan *Rad*(*M*) = *M* [5].

Selanjutnya, jika setiap submodul dari *M* merupakan suplemen di *M*, maka *M* merupakan modul semi sederhana seperti yang akan dipaparkan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.4 [4] *Misalkan M adalah R-modul. Jika setiap submodul dari M merupakan suplemen di M, maka M merupakan modul semi sederhana.*

Bukti.

Sebelumnya akan ditunjukkan *Rad* (*M*) = 0. Andaikan *Rad* (*M*) ≠ 0, maka terdapat *x* ∈ *Rad* (M) dengan *x* ≠ 0. Berdasarkan hipotesis, *Rx* adalah suplemen di *M*. Oleh karena itu, terdapat *K* ⊆ *M* sedemikian sehingga *Rx* + *K* = *M* dan *Rx* ∩ *K* << *Rx*. Karena *x* ∈ *Rad* (*M*) dan *Rx* << *M*, maka *K* = *M*. Akibatnya, *Rx* << *Rx*. Hal ini menimbulkan kontradiksi. Jadi, haruslah *Rad* (*M*) = 0.

Selanjutnya, akan ditunjukkan *M* adalah modul semi sederhana. Diberikan *N* submodul *M*, maka berdasarkan hipotesis, *N* adalah suplemen di *M*. Oleh karena itu, terdapat $N' \subseteq M$ sedemikian sehingga $N + N' = M$ dan $N \cap N' << N$. Jadi, $N \cap N' \subseteq Rad(M) = 0$. Akibatnya, $M = N \oplus N'$. Jadi, terbukti *M* adalah modul semi sederhana. ■

Karakterisasi lain dari suplemen suatu modul diberikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2.5 [3] *Diberikan U, V merupakan submodul dari R-modul M. Jika V adalah suplemen dari U di M, maka berlaku:*

1. *Jika W + V = M untuk suatu W* $\subset U$*, maka V merupakan suplemen dari W di M;*
2. *Jika M dibangun secara berhingga (finitely generated), maka V dibangun secara berhingga;*
3. *Jika U merupakan submodul maksimal dari M, maka V siklik dan* $U \cap V = Rad(V)$ *merupakan submodul maksimal dari V;*
4. *Jika* $K = M$, *maka V merupakan suplemen dari* $U + K$;
5. *Jika* $K = M$, *maka* $K \cap V = V$ *dan* $Rad(V) = V \cap Rad(M)$;
6. Jika $Rad(M) = M$, maka U termuat dalam submodul maksimal dari *M*.

Bukti:

1. Karena V merupakan suplemen dari U, maka berlaku $U+V=M$ dan $U\cap V = V$. Akibatnya, $W\cap V \subset U\cap V = V$. Oleh karena terbukti V merupakan suplemen dari W di M.
2. Diberikan M merupakan modul yang dibangun secara berhingga. Karena $U+V=M$, maka terdapat $V' \subseteq V$ submodul M yang dibangun secara berhingga yang memenuhi $U+V'=M$. Berdasarkan keminimalan V, diperoleh $V'=V$. Jadi, terbukti V dibangun secara berhingga.
3. Diberikan U merupakan submodul maksimal dari M. Dengan cara yang sama dengan bukti (2), diperoleh V merupakan submodul siklik. Selanjutnya, akan ditunjukkan $U\cap V = Rad(V)$ merupakan submodul maksimal dari V. Karena $V/(U\cap V)$; M/U, maka $U\cap V$ merupakan submodul maksimal dari M. Akibatnya, $U\cap V \supset Rad(V)$. Di lain pihak, karena V merupakan suplemen U di M, maka berlaku $U\cap V = V$. Dari sini, diperoleh $U\cap V \subset Rad(V)$, sehingga dapat disimpulkan $U\cap V = Rad(V)$.
4. Jika $K = M$, maka untuk suatu $X\subset V$, dengan $U+K+X=M$ berlaku $U+X=M$. Berdasarkan keminimalan V, diperoleh $X=V$. Dengan kata lain, terbukti V merupakan suplemen dari $U + K$.
5. Jika $K = M$ dan $X\subset V$ dengan $(K\cap V)+X=V$, maka:
$$M=U+V=U+(K\cap V)+X=U+X$$
.

Berdasarkan keminimalan V, diperoleh $X=V$. Selanjutnya karena $(K\cap V)+X=V$, maka diperoleh $(K\cap V) = V$. Dengan demikian, $V\cap Rad(M)\subset Rad(V)$. Di lain pihak, $Rad(V)\subset V\cap Rad(M)$ selalu terpenuhi. Akibatnya, terbukti $Rad(V)=V\cap Rad(M)$. ■

Dalam teorema berikut diberikan kaitan antara suplemen dan eksistensi amplop proyektif dari modul faktornya.

Teorema 2.6 [6] *Jika N modul proyektif di dalam $\sigma[M]$, maka untuk U submodul dari N, pernyataan berikut ekuivalen.*

1. *Terdapat $V\subset N$ yang merupakan penjumlah langsung di N dengan $U+V=N$ dan $U\cap V = V$.*
2. *N/U mempunyai amplop proyektif di $\sigma[M]$.*

Bukti:

(1) ⇒ (2) Karena V merupakan penjumlah langsung dari N yang merupakan modul proyektif di $\sigma[M]$, maka V juga merupakan modul proyektif di dalam $\sigma[M]$. Selanjutnya, untuk epimorfisma $p: V\to N\to N/U$ diperoleh $Ker\ p=U\cap V = V$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa (V,p) merupakan amplop proyektif dari N/U di dalam kategori $\sigma[M]$.

(2) ⇒ (1) Diasumsikan $\sigma[M]$ mempunyai amplop proyektif, katakan $\pi: P\to N/U$ merupakan amplop proyektif dari N/U di $\sigma[M]$. Oleh karena itu, pada diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & & \downarrow p & & \\ P & \xrightarrow{\pi} & N/U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Diagram 1

dapat ditentukan morfisma $f: N\to P$ sedemikian sehingga Diagram 1 komutatif yaitu $\pi\circ f=p$. Karena p dan π epimorfisma, maka f merupakan epimorfisma. Oleh karena itu, dapat dibentuk barisan eksak berikut:

$$0\to Ker\ f\to N\to P\to 0$$

Karena P merupakan modul proyektif di dalam $\sigma[M]$, maka barisan eksak tersebut terpisah. Akibatnya, terdapat $g: P\to N$ sedemikian sehingga $f\circ g=id_P$. Oleh kerena itu,

$$\pi = \pi \circ f \circ g = p \circ g .$$

Dengan demikian, diperoleh $U + g(P) = N$. Selanjutnya, karena $g(P)$ merupakan amplop proyektif dari N/U, maka $U \cap g(P) = g(P)$. Jadi, terdapat $V = g(P)$ yang merupakan penjumlah langsung di N sedemikian sehingga $U + V = N$ dan $U \cap V = V$. ■

Pernyataan pada Teorema 2.6 (1) ekuivalen dengan U merupakan suplemen dari V di N, demikian juga sebaliknya, yaitu V merupakan suplemen dari U di N dalam kategori $\sigma[M]$. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa, jika N merupakan modul proyektif dalam kategori $\sigma[M]$ dan U mempunyai suplemen di N, maka akan berakibat modul faktor N/U mempunyai amplop proyektif dalam kategori $\sigma[M]$. Selanjutnya, (V, p), dengan V merupakan suplemen dari U dan $p : V \to N \to N/U$ adalah pemetaan proyeksi, merupakan amplop proyektif untuk modul faktor N/U dalam kategori $\sigma[M]$.

3. KESIMPULAN

Tidak semua modul mempunyai amplop proyektif. Untuk menjamin adanya amplop proyektif ini diperlukan adanya suplemen dari modul tersebut. Salah satu contoh dari modul bersuplemen adalah modul semi sederhana. Modul semi sederhana yang merupakan hasil tambah langsung dari submodul-submodul sederhana merupakan modul bersuplemen, sebab setiap submodul dari modul semi sederhana merupakan penjumlah langsung. Sebaliknya, jika setiap submodul dari M merupakan suplemen di M, maka M merupakan modul semi sederhana.

Jika suatu submodul dari modul proyektif di dalam $\sigma[M]$ mempunyai suplemen, maka modul faktornya mempunyai amplop proyektif dalam kategori $\sigma[M]$, yaitu jika N merupakan modul proyektif dalam kategori $\sigma[M]$ dan U mempunyai suplemen di N, maka akan berakibat modul faktor N/U mempunyai amplop proyektif dalam kategori $\sigma[M]$. Selanjutnya, (V, p), dengan V merupakan suplemen dari U dan $p : V \to N \to N/U$ adalah pemetaan proyeksi, merupakan amplop proyektif untuk modul faktor N/U dalam kategori $\sigma[M]$.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anderson, W. dan Fuller, K., (1992), *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

[2] Bilhan, G., (2005), Amply Fws Modules, *Journal of Arts and Sciences Sayi*, Vol.4, 2005.

[3] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., dan Wisbauer, R., (2006), *Lifting Modules* (*Supplement and Projectivity in Modul Theory*), Birkhauser Verlag, Basel Switzerland.

[4] Serpil, (2007), Thesis: Totally Weak Supplemented Modules, Izmir Institute of Technology.

[5] Wang, Yongduo., Ding, Nanqing, Generalized Lifting Modules, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Volume 2006, pages 1-9.

[6] Wisbauer, R., (1991), *Foundation of Modul and Ring Theory*, Gordon and Breach.