

**PENGARUH GRAVITASI DAN TEGANGAN PERMUKAAN  
PADA ALIRAN FLUIDA DI ATAS GUNDUKAN  
DALAM SALURAN TERBUKA\***

Basuki Widodo

Jurusan Matematika FMIPA-ITS Surabaya

**Abstrak**

Pada makalah ini dikembangkan Teknik Integral Batas (TIB) untuk mengetahui pengaruh gravitasi dan tegangan permukaan pada aliran fluida di atas gundukan dalam saluran yang mana aliran fluidanya dalam dua-dimensi, tak-mampu-mampat, tak-berputar dan tak-kental. Bentuk penyelesaiannya adalah sistem persamaan integral-batas yang berasal dari teknik Riemann-Hilbert untuk masalah batas campuran dari fungsi analitis.

Kata kunci : Teknik Integral Batas, Permukaan Bebas, gravitasi dan tegangan permukaan

**1. PENDAHULUAN**

Perkembangan matematika terutama yang diaplikasikan pada dinamika fluida oleh ahli matematika, fisika dan teknik telah mampu membantu memprediksi dengan tepat sifat-sifat aliran fluida di permukaan bebas. Masalah tersebut sangat penting dalam bidang teknik hidrolika terutama pada aliran fluida di permukaan bebas, seperti pancaran bebas, aliran di atas lereng, limpahan air pada gerbang pintu, aliran yang bertingkat dan lain-lain. Jelas bahwa studi tentang aliran fluida di permukaan bebas tidak hanya penting dalam matematika saja tetapi juga untuk para ahli teknik.

Dalam penyelesaian yang lebih kompleks dari masalah aliran fluida di permukaan bebas, teknik perhitungan secara numerik juga telah mengalami perkembangan. Sebagian besar keadaan dan metode yang digunakan adalah

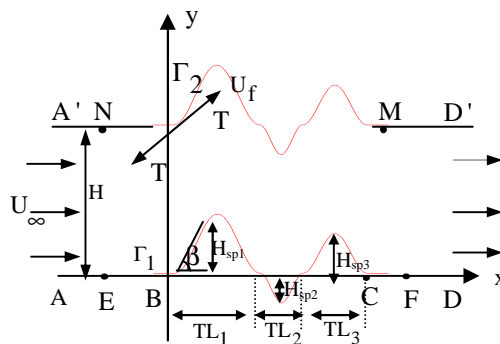
---

\* Disampaikan pada Seminar Nasional Dalam Rangka Konferda Himpunan Matematika Indonesia Wilayah Jawa Tengah dan DIY

dengan beda-hingga, metode elemen-hingga dan metode elemen batas. Penelitian secara numerik pada aliran fluida di permukaan bebas telah dilakukan oleh Southwell dan Vaisey (1946) dengan menggunakan metode beda-hingga dan metode relaksasi untuk memperoleh penyelesaian secara numerik dari aliran fluida pada air terjun dan dibawah pintu air. Sebenarnya metode beda-hingga adalah teknik yang lebih sesuai untuk masalah dalam batas geometri, namun hal ini tidak menguntungkan karena biasanya aplikasi ini tidak sesuai dengan keadaan. Maka metode yang lebih tepat adalah dengan menggunakan metode elemen-hingga yang biasanya sangat berhasil dalam menyelesaikan masalah permukaan bebas. Sebagai contoh telah dilakukan oleh Chan, Larock dan Hermann (1973) diperoleh penyelesaian numerik untuk aliran fluida di bawah pintu air dan juga oleh Voroglu dan Finn (1978), Betts (1979) dan Aitchson (1979).

## 2. PERUMUSAN PERSAMAAN INTEGRAL BATAS

Pada makalah ini diselidiki pengaruh gravitasi dan tegangan permukaan di atas gundukan dalam saluran terbuka. Hulu dari gundukan memiliki laju aliran  $U_\infty$  (uniform flow) dengan kedalaman  $H$ . Gundukan dimulai pada  $X = 0$  dan fungsi yang diketahui  $Y = f(X)$  hingga tinggi gundukan  $H_{sp}$  dan pada saat dasar permukaan saluran tetap horisontal. Daerah aliran fluida ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 : Bidang fisis untuk aliran di permukaan bebas di atas gundukan dengan tegangan permukaan.

Dasar dari saluran AB dan CD horisontal, BC adalah suatu fungsi yang diberikan dan permukaan bebas lapisan atas adalah A'D'. Pada dasar saluran, fungsi aliran  $\Psi$  dipilih untuk  $\Psi = 0$ , dimana permukaan bebas A'D' diberikan  $\Psi = Q = HU_\infty$ .

Sistem koordinat  $\underline{z} = X + iY$  dengan panjang AB pada sumbu X, dimana sumbu Y adalah vertikal dan pusat sumbu sistem koordinat adalah titik dimana gundukan pada dasar saluran pertama menyimpang dari sumbu horizontal. Asumsi di atas memperkenankan kecepatan potensial  $\Phi$  dan fungsi aliran  $\Psi$  dapat dimasukkan, sehingga kecepatan potensial kompleks  $\Upsilon = \Phi + i\Psi$  adalah analitis dalam daerah yang ditempati oleh fluida. Selanjutnya persamaan Bernoulli digunakan pada permukaan bebas A'D' untuk permukaan bebas dan diperoleh :

$$\frac{U_f^2}{2} + gY_f - \frac{T}{\rho \frac{dS}{d\theta}} = gH + \frac{U_\infty^2}{2} \quad (2.1) \text{ atau}$$

$$\frac{U_f^2}{2} + gY_f - \frac{T \left( \frac{d\theta}{dS} \right)}{\rho} = gH + \frac{U_\infty^2}{2} \quad (2.2)$$

dimana  $Y_f$  adalah tinggi permukaan bebas,  $U_f$  kecepatan fluida pada permukaan bebas,  $g$  besarnya percepatan gravitasi,  $U_\infty$  adalah kecepatan fluida di hulu,  $T$  adalah tegangan permukaan (non negatif) di permukaan bebas,  $dS$  adalah perubahan panjang permukaan bebas yang sesuai dengan adanya tegangan permukaan, dan  $d\theta$  adalah perubahan sudut yang dibentuk oleh permukaan bebas dengan sumbu horisontal X yang sesuai dengan adanya tegangan permukaan.

Selanjutnya Persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk :

$$u_f = \sqrt{1 + \frac{2(1 - y_f)}{Fr^2} + 2We \left( \frac{d\theta}{ds} \right)} \quad (2.3)$$

dengan :

$$u_f = \frac{U_f}{U_\infty} \quad (2.4)$$

$$y_f = \frac{Y_f}{H} \quad (2.5)$$

$$Fr = \frac{U_\infty}{\sqrt{gH}} \text{ adalah bilangan Froude hulu} \quad (2.6)$$

$$We = \frac{\gamma}{Fr^2} \text{ adalah bilangan Weber} \quad (2.7)$$

$$\gamma = \frac{T}{(g\rho H^2)} \quad (2.8)$$

$$\varkappa = \frac{S}{H}. \quad (2.9)$$

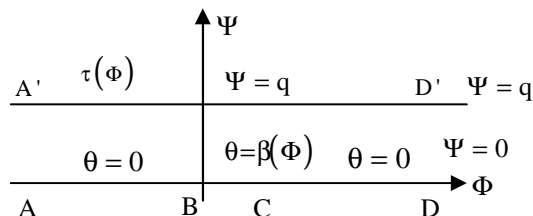
Untuk penyelesaian masalah aliran fluida permukaan bebas di atas gundukan dalam saluran di bawah pengaruh gravitasi dan tegangan permukaan digunakan definisi hubungan antara potensial kompleks  $\Upsilon$  dan kecepatan kompleks  $W$ , yaitu :

$$W = u - iv = \frac{d\Upsilon}{dZ} = |\underline{U}| e^{-i\theta} \quad (2.10)$$

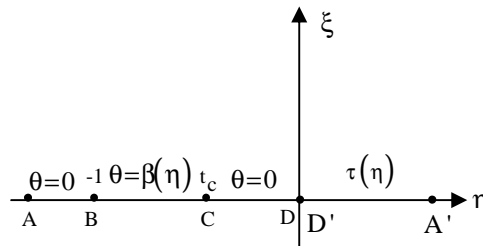
$$\text{atau } \frac{d\Upsilon}{dZ} = |\underline{U}| e^{-i\theta} \quad (2.11)$$

dengan  $|\underline{U}|$  adalah besarnya kecepatan fluida pada titik dalam aliran,  $u$  adalah komponen horizontal dari vektor kecepatan fluida,  $v$  adalah komponen vertikal dari vektor kecepatan fluida dan  $\theta$  mewakili daerah garis aliran yaitu sudut yang dibuat antara permukaan bebas dengan sumbu- $X$  positif. Selanjutnya diaplikasikan definisi pada permukaan bebas dan membagi setiap sisi dari Persamaan (2.5) dengan  $U_\infty$  dan kemudian dilogartmakan, diperoleh :

$$\Omega = \ln \left( \frac{1}{U_\infty} \frac{d\Upsilon}{dZ} \right) = \tau - i\theta \quad (2.12)$$



Gambar 2.2 : Bidang- $\omega$ .



Gambar 2.3 : Bidang-t.

dengan  $\tau = \ln \left( \frac{U_f}{U_\infty} \right)$  dan  $\tau, \Omega, \frac{dY}{dZ}$  adalah fungsi analitik pada bidang- $\omega$  lihat

Gambar 2.2 Sudut dasar dari saluran yang dibuat dengan sumbu-X positif adalah  $\beta$  ditunjukkan pada Gambar 2.1, diberikan  $\beta = \arctan(f'(x))$ .

Selanjutnya ditransformasikan bidang tak-terbatas pada bidang- $\omega$  ke-bidang bantuan bagian atas dari bidang paruh t, dimana  $t = \eta + i\xi$  adalah rata-rata dari fungsi pemetaan :

$$t = -e^{-\frac{\pi}{q}\omega} \quad (2.13)$$

Hasilnya adalah mengubah bentuk potensial pada bidang- $\omega$  kebentuk satu-dimensi dalam bidang-t, lihat Gambar 2.3. Selanjutnya diaplikasikan Riemann-Hilbert untuk mendapatkan nilai batas campuran Riemann-Hilbert, dimana keadaan batas pada sumbu riil  $\eta$  dinyatakan dengan :

$$\Im m(\Omega(\eta)) = 0 \text{ pada } AB(\eta < -1), \quad (2.14)$$

$$\Im m(\Omega(\eta)) = -\beta \text{ pada } BC(-1 < \eta < t_c), \quad (2.15)$$

$$\Im m(\Omega(\eta)) = 0 \text{ pada } CD(t_c < \eta < 0), \quad (2.16)$$

$$\text{dan } \Re e(\Omega(\eta)) = \tau(\eta) \text{ pada } D'A'(0 < \eta < \infty), \quad (2.17)$$

kemudian dengan menggunakan teori Muskhelishvilli (1953), penyelesaian dari  $\Omega$  dapat diperoleh dari penyelesaian umum Riemann -Hilbert yaitu bentuk :

$$\Omega(t) = \frac{X(t)}{\pi} \left[ \int_0^{t_c} \frac{-\beta(\eta)}{\sqrt{-\eta(\eta-t)}} d\eta + \int_0^{t_\infty} \frac{\tau(\eta)}{\sqrt{\eta(\eta-t)}} d\eta \right] \quad (2.18)$$

dengan  $X(t) = \sqrt{-t}$  adalah penyelesaian homogen dari  $\Omega(t)$  pada saat bagian riil  $\Re(\Omega)$ , dan bagian imajiner  $\Im(\Omega)$  sama dengan nol pada sumbu riil  $\eta$ . Pada saat  $t$  mendekati sumbu riil  $\eta$  dari bidang paruh bagian atas, nilai dari  $X^+(t)$  pada sumbu riil  $\eta$  dinyatakan dengan:

$$X^+(\eta) = \sqrt{-\eta}, \eta < 0 \quad (2.19)$$

$$X^+(\eta) = -i\sqrt{\eta}, \eta > 0. \quad (2.20)$$

Digunakan prinsip Cauchy dan mengganti  $t$  dengan  $\eta_0$  kemudian bagian riil dan imajiner dari  $\Omega(\eta_0)$  dapat dipisahkan dan masing-masing dapat ditulis  $\tau(\eta_0)$  dan  $\theta(\eta_0)$ . Bagian riil  $\tau(\eta_0)$  adalah kecepatan fluida pada dasar saluran AD dan ini dapat dinyatakan dengan :

$$\tau(\eta_0) = \frac{\sqrt{-\eta_0}}{\pi} \left[ \int_{-1}^{t_c} \frac{-\beta(\eta)}{\sqrt{-\eta}(\eta - \eta_0)} d\eta + \int_0^{t_\infty} \frac{\tau(\eta)}{\sqrt{\eta}(\eta - \eta_0)} d\eta \right], \eta_0 < 0$$

(2.21) dimana bagian imajiner  $\theta(\eta_0)$  adalah sudut yang dibentuk permukaan bebas A'D' dengan garis horizontal dan diberikan oleh :

$$\theta(\eta_0) = \frac{\sqrt{\eta_0}}{\pi} \left[ \int_{-1}^{t_c} \frac{-\beta(\eta)}{\sqrt{-\eta}(\eta - \eta_0)} d\eta + \int_0^{t_\infty} \frac{\tau(\eta)}{\sqrt{\eta}(\eta - \eta_0)} d\eta \right], \eta_0 > 0.$$

(2.22)

Selanjutnya dari Persamaan (2.13), diperoleh pernyataan bahwa

$$d\eta = \frac{d\eta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} ds \quad \text{pada } \Gamma_1 \text{ dan } \Gamma_2 \quad (2.23)$$

yang mana  $\Gamma_1$  adalah dasar saluran (memasukkan ukuran gundukan dalam saluran) AD, sedang  $\Gamma_2$  adalah penampang permukaan bebas A'D' mendekati dasar saluran dan penampang permukaan bebas yang diketahui :

$$\frac{d(\phi(s))}{ds} = u(s) \quad (2.24)$$

yang mana pada bagian integral diberikan :

$$\phi(s) = \phi_E + \int_0^s u(l) dl \quad (2.25)$$

dengan nilai fungsi potensial pada titik E dan N sama dengan  $\phi_E$ , Gambar 2.1. Kemudian Persamaan (2.23) selanjutnya disederhanakan pada batas  $\Gamma_1$  dan  $\Gamma_2$  sehingga diperoleh :

$$d\eta = \frac{\pi}{q} e^{-\frac{\pi}{q}\phi(s)} u(s) ds \text{ pada } \Gamma_1 \quad (2.26)$$

$$d\eta = -\frac{\pi}{q} e^{-\frac{\pi}{q}\phi(s)} u(s) ds \text{ pada } \Gamma_2 \quad (2.27) \text{ juga telah diketahui bahwa :}$$

$$\frac{dx}{ds} = \text{Cos } \theta \quad (2.28) \text{ dan}$$

$$\frac{dy}{ds} = \text{Sin } \theta \quad (2.29)$$

Oleh karena itu, koordinat dari permukaan bebas dapat dinyatakan dengan

$$x(s) = x_N + \int_0^s \text{Cos } \theta(l) dl \quad (2.30) \text{ dan}$$

$$y(s) = y_N + \int_0^s \text{Sin } \theta(l) dl \quad (2.31) \text{ dengan } x_N \text{ dan } y_N \text{ adalah koordinat dari titik N.}$$

Persamaan (2.21) dan (2.22) dalam bidang fisis dapat ditulis kembali menjadi :

$$\begin{aligned} \tau_b(s) &= \ln \left( \frac{U_b(s)}{U_\infty} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-\eta_b(s)}}{q} \left[ \int_{\Gamma_1} \frac{-\beta(l)}{\sqrt{-\eta_b(l)} [\eta_b(l) - \eta_b(s)]} e^{-\frac{\pi}{q}\phi_b(l)} u_b(l) dl - \int_{\Gamma_2} \frac{\tau_f(l)}{\sqrt{\eta_f(l)} [\eta_f(l) - \eta_b(s)]} e^{-\frac{\pi}{q}\phi_f(l)} u_f(l) dl \right], \\ s &\in \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \frac{\sqrt{\eta_f(s)}}{q} \left[ \int_{\Gamma_1} \frac{-\beta(l)}{\sqrt{-\eta_b(l)} [\eta_b(l) - \eta_f(s)]} e^{-\frac{\pi}{q}\phi_b(l)} u_b(l) dl - \int_{\Gamma_2} \frac{\tau_f(l)}{\sqrt{\eta_f(l)} [\eta_f(l) - \eta_f(s)]} e^{-\frac{\pi}{q}\phi_f(l)} u_f(l) dl \right], \\ s &\in \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\text{dengan } \eta_b(l) = -e^{-\frac{\pi}{q}\phi_b(l)} \text{ pada } \Gamma_1 \quad (2.34)$$

$$\text{dan } \eta_f(l) = e^{-\frac{\pi}{q}\phi_f(l)} \text{ pada } \Gamma_2. \quad (2.35)$$

Dalam Persamaan (2.32) dan (2.33),  $\tau_f(i)$  dihitung dengan menggunakan Persamaan (2.3) yaitu menjadi :

$$\tau_f(l) = \ln \left[ \frac{U_f(l)}{U_\infty} \right] = \ln \left[ \sqrt{1 + \frac{2(1 - y_f)}{\text{Fr}^2} + 2\text{We} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)} \right]. \quad (2.36)$$

Selanjutnya akan diselesaikan persamaan integral batas non linier dari masalah tersebut dengan menggunakan metode numerik.

### 3. TEKNIK ITERASI NUMERIK

Untuk menyelesaikan Persamaan (2.25)-(2.33) diterapkan suatu prosedur numerik yang mirip dengan yang telah dilakukan oleh Widodo (2000) yaitu:

1. Pada dasar saluran  $\Gamma_1$  dibagi dalam beberapa pias dan penampang permukaan bebas  $\Gamma_2$  awal diberikan.
2. Laju fluida awal  $u_b^n(s)$  diberikan, yaitu  $U_\infty$  pada dasar saluran AB dan laju fluida awal  $u_f^n(s)$ , yaitu  $U_\infty$  pada permukaan bebas A'D' dengan  $n = 0$ .
3. Laju fluida  $u_f^n(s)$  pada permukaan bebas  $\Gamma_2$  dihitung dengan menggunakan persamaan (2.36) kemudian kecepatan potensial  $\phi^n(s)$  pada  $\Gamma_1$  dan  $\Gamma_2$  dihitung dengan menggunakan persamaan (2.25).
4. Pada substitusi nilai  $\beta$ ,  $u_f^n(s)$  dan  $\phi^n(s)$  ke dalam ruas kanan persamaan (2.32) dan (2.33) diperoleh nilai baru dari laju fluida  $u_b^{n+1}(s)$  pada dasar saluran dan sudut yang dibentuk oleh permukaan bebas dengan horizontal  $\theta^{n+1}(s)$ .
5. Persamaan (2.30) dan (2.31) digunakan, maka didapatkan nilai baru untuk profil permukaan bebas.
6. Ulang tahap (3) - (5) sampai kecepatan potensial  $\phi^n(s)$  pada permukaan bebas konvergen pada batas yang telah ditentukan.

### 4. PENYELESAIAN NUMERIK DAN HASIL PEMBAHASAN

Akan diselesaikan aliran fluida di permukaan bebas yang tak-mampat, tak-berputar, keadaan tunak dan tak kental dibawah gaya gravitasi dan tegangan permukaan tanpa adanya gelombang. Selanjutnya diambil bilangan Froude aliran hulu paling kritis. Pengaruh tegangan permukaan ditunjukkan



dengan bilangan Weber. Hasil secara numerik dibentuk dengan dua bentuk geometri yang berbeda dari gundukan dengan bilangan Froude aliran hulu lebih dari satu. Untuk menggambarkan hasilnya penyelidikan yang pertama dilakukan ketika bentuk dasar dinyatakan dengan persamaan :

$$y = \begin{cases} h_1, & \text{untuk } 0 \leq x \leq tl_1 \\ -h_2, & \text{untuk } tl_1 < x \leq (tl_1 + tl_2) \\ h_3, & \text{untuk } (tl_1 + tl_2) < x \leq (tl_1 + tl_2 + tl_3) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$y = 0, \quad \text{untuk } x < 0 \quad (4.2)$$

$$y = 0, \quad \text{untuk } x > (tl_1 + tl_2 + tl_3) \quad (4.3)$$

Persamaan-persamaan ini merupakan gundukan bentuk kotak dengan tinggi tanpa-dimensi gundukannya  $h_1, h_2, h_3$  dan lebar tanpa-dimensi gundukannya  $tl_1, tl_2, tl_3$ . Bentuk lain dari gundukan permukaan dasar yang telah digunakan diatas dan diselesaikan dengan menggunakan metode yang sama, yaitu keadaan ketika gundukan bentuk melengkung yang dinyatakan dengan persamaan fungsi berikut :

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} h_1 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{tl_1} \right) \right], & \text{untuk } 0 \leq x \leq tl_1 \\ -\frac{1}{2} h_2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi(x - tl_1)}{tl_2} \right) \right], & \text{untuk } tl_1 < x \leq (tl_1 + tl_2) \\ \frac{1}{2} h_3 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi(x - tl_1 - tl_2)}{tl_3} \right) \right], & \text{untuk } (tl_1 + tl_2) < x \leq (tl_1 + tl_2 + tl_3) \end{cases} \quad (4.4)$$

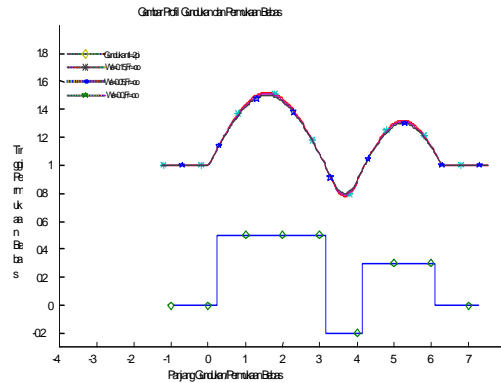
$$y = 0, \quad \text{untuk } x < 0 \quad (4.5)$$

$$y = 0, \quad \text{untuk } x > (tl_1 + tl_2 + tl_3) \quad (4.6)$$

dimana  $h_1, h_2, h_3$  adalah tinggi tanpa-dimensi gundukan pertama, kedua, ketiga dan  $tl_1, tl_2, tl_3$  adalah panjang tanpa-dimensi gundukan pertama, kedua, ketiga. Hasil secara numerik didapatkan jika penggunaan bentuk gundukan yang dinyatakan dalam persamaan (4.1-4.3) dan (4.4-4.6) cukup untuk menggambarkan penerapan metode dan jenis hasilnya.

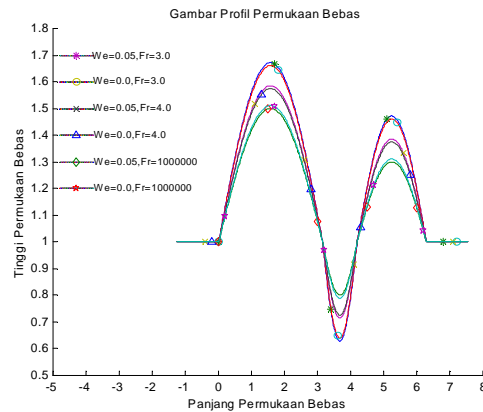
Adapun diantara hasil yang telah diperoleh dalam penelitian ini diambil beberapa dengan bentuk gundukan yang berbeda dan dengan beberapa bilangan

Froude serta beberapa bilangan Weber. Sekarang ketika bentuk saluran didefinisikan oleh persamaan (4.1)-(4.3) dan tinggi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5$ ,  $h_2 = 0.2$ ,  $h_3 = 0.3$ ,  $We=0.145$ ,  $We=0.045$  dan tanpa tegangan permukaan  $We = 0.0$ , untuk bilangan Froude hulu tak terbatas.



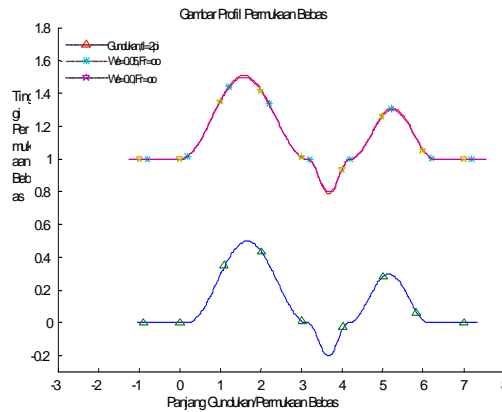
Gambar 4.1 : Profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan  $We=0.145$ ,  $We=0.045$  dan tanpa tegangan permukaan  $We = 0.0$ , untuk bilangan Froude hulu tak terbatas pada saat bentuk gundukan diberikan oleh persamaan (4.1)-(4.3), tinggi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5$ ,  $h_2=0.2$ ,  $h_3=0.3$  dan panjang gundukan tanpa-dimensi  $tl = tl_1 + tl_2 + tl_3 = 2\pi$ .

Gambar 4.1 menunjukkan perbedaan dari profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan  $We=0.145$ ,  $We=0.045$  dan tanpa tegangan permukaan  $We=0.0$ , bilangan Froude hulu tak terbatas, bentuk dari gundukan diberikan oleh persamaan (4.1)-(4.3), tinggi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5$ ,  $h_2=0.2$ ,  $h_3=0.3$  dan panjang gundukan tanpa-dimensi  $tl = 2\pi$ . Lihat prosedur iterasi numerik mencapai konvergen pada saat bilangan Weber  $We = 0.145$ . Bagaimanapun, pada saat bilangan Weber rendah maka prosedur iterasi numerik gagal konvergen. Oleh karena itu, ditetapkan bilangan Weber  $We = 0.145$  adalah maksimum untuk dapat mencapai konvergen.



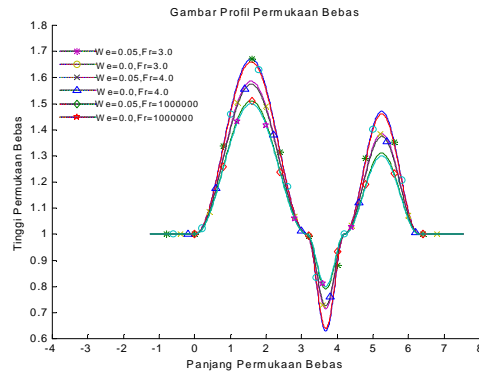
Gambar 4.2 : Profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan  $We=0.05$  dan tanpa tegangan permukaan  $We=0.0$ , untuk bilangan Froude hulu 3.0, 4.0 dan  $10^6$  pada saat bentuk gundukan diberikan oleh persamaan (4.1)-(4.3), tinggi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5$ ,  $h_2=0.2$ ,  $h_3=0.3$  dan panjang gundukan tanpa-dimensi  $tl = tl_1 + tl_2 + tl_3 = 2\pi$ .

Perbandingan profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan  $We=0.05$  dan tanpa tegangan permukaan  $We = 0.0$ , untuk perbedaan bilangan froude hilir 3.0, 4.0 dan  $10^6$  di atas gundukan dari tinggi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5$ ,  $h_2=0.2$ ,  $h_3=0.3$ , panjang gundukan tanpa-dimensi  $tl = 2\pi$  dan bentuk gundukan diberikan oleh persamaan (4.1)-(4.3) ditunjukkan pada Gambar 4.2. Dari gambar tersebut tampak pada saat tegangan permukaan dimasukkan hanya berpengaruh pada daerah belokan, perbedaan ini dengan pada saat tanpa tegangan permukaan. Pada saat tegangan permukaan dan bilangan Froude hulu meningkat untuk 3.0 ke  $10^6$ , maka tinggi permukaan bebas berkurang. Hal ini mirip dengan hasil yang diperoleh pada saat tanpa tegangan permukaan. Bagaimanapun, untuk bilangan Froude hulu  $Fr = 2.0$  prosedur iterasi numerik gagal menuju konvergen. Hal ini juga menegaskan bahwa penyelesaian analitik dari persamaan (4.7) tanpa akar-akar yang memenuhi persamaan untuk bilangan Froude hulu  $Fr=2.0$ .



Gambar 4.3 : Profil gundukan dan permukaan bebas pada saat tegangan permukaan  $We = 0.05$  dan tanpa tegangan permukaan  $We=0.0$ , untuk  $Fr = \infty$ , bentuk gundukan diberikan oleh persamaan (4.4)-(4.6), tinggi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5$ ,  $h_2=0.2$ ,  $h_3=0.3$  dan panjang gundukan tanpa-dimensi  $2\pi$ .

Gambar 4.3 menunjukkan perbandingan dari profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan  $We = 0.05$  dan tanpa tegangan permukaan  $We = 0.0$  di atas gundukan yang panjang tanpa-dimensi  $2\pi$  untuk bilangan Froude hulu  $Fr = \infty$ , fungsi dari gundukan diberikan oleh persamaan (4.4)-(4.6) dan tinggi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5$ ,  $h_2=0.2$ ,  $h_3=0.3$ . Tegangan permukaan tidak berpengaruh pada permukaan bebas ujung hulu tetapi tegangan permukaan berpengaruh pada daerah belokan. Pada saat bilangan weber meningkat ke  $We = 0,1$  maka prosedur iterasi numerik gagal menuju konvergen. Oleh karena itu, dapat ditetapkan bahwa bilangan Weber  $We = 0.05$  adalah bilangan Weber maksimum untuk dapat mencapai konvergen.



Gambar 4.4 : Profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan  $We=0.05$  dan tanpa tegangan permukaan  $We=0.0$ , bilangan Froude hulu  $Fr=3.0, 4.0, 10^6$ , tingi gundukan tanpa-dimensi  $h_1=0.5, h_2=0.2, h_3=0.3$ , panjang gundukan tanpa-dimensi  $2\pi$ , bentuk gundukan diberikan oleh persamaan (4.4)-(4.6).

Gambar 4.4 menunjukkan profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan diberikan  $We = 0.05$  dan pada saat tanpa tegangan permukaan  $We = 0.0$ , perbedaan bilangan Froude hulu untuk aliran fluida diatas gundukan dengan tinggi tanpa-dimensi  $h_1=0.5, h_2=0.2, h_3=0.3$ , panjang gundukan tanpa-dimensi  $2\pi$  dan bentuk gundukan diberikan oleh persamaan (4.4)-(4.6). Pada saat dimasukkan pengaruh tegangan permukaan, yaitu bilangan Weber tidak nol, maka tegangan permukaan membuat daerah lengkung dari permukaan bebas menjadi lebih cembung. Hal ini sesuai dengan hasil yang diperoleh oleh Forbes (1983), dimana diselidiki aliran permukaan bebas diatas halangan semi-sirkuler dan dengan pengaruh gravitasi dan tegangan permukaan. Ditegaskan pengaruh tegangan permukaan melewati parameter  $\gamma = \frac{T}{\rho g H^2}$ , dimana  $\gamma$  adalah tegangan permukaan tanpa-dimensi,  $T$  dimensi tegangan permukaan fluida,  $g$  besarnya percepatan gaya gravitasi dan  $H$  adalah kedalaman dari halangan fluida ujung hulu.

## 5. KESIMPULAN

Dari hasil numerik disimpulkan bahwa pada saat bilangan Froude hulu lebih besar dari satu satuan maka tegangan permukaan perannya menjadi kurang penting dari pada gravitasi dalam menentukan bentuk permukaan bebas, tetapi tegangan permukaan merupakan faktor penting dalam proses pada saat permukaan bebas hampir bergelombang.

## DAFTAR PUSTAKA

1. Aitchson, J. MA, *Variable Finite Element Method for The Calculation of Flow Over a Weir*. Rutherford Laboratory Report No. RL-79-069, 1979.
2. Betts, P. L, A Variational Principle in Terms of Stream Function for Free Surface Flows and Its Application to The Finite Element Method. *Journal of Computers and Fluids*, 1979.
3. Chan, S. T. K., Larock, B. E. and Hermann. L.R Free-surface Ideal Fluid Flows by Finite Element. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE.*, 1973.
4. Forbes, L. K. Free-surface flow over a semicircular obstruction, including the influence of gravity and surface tension. *Journal Fluid Mech.*,(127) : 283-297, 1983.
5. Muskhelishvili, N. I. *Singular Integral Equations*. Edited by Radock, J. R. M. P. Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.
6. Southwell, R. V. and Vaisey, G. Relaxation Methods Applied to Engineering Problem. VIII Fluid motions characterised by free streamlines, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1946.
7. Varoglu, E. and Finn, W. D. L. Variable Domain Finite Element Analysis of Free Surface Gravity Flow. *Journal of Computers and fluids*, 1978.
8. Widodo, B. The Application of The Boundary Integral Method on some Free Surface Fluid Flows. PhD. thesis, Departement of Applied Mathematics University of Leeds, England, 2000.