PENGGUNAAN BEBERAPA TEORI MATRIKS DALAM TEORI GRAF

Amir Kamal Amir
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10, Makassar, 90245
Email: amirkamalamir@yahoo.com.

Abstract. In a simple graf *G,* two veritces *u* and *v* are called adjacent in G if *{u,v}* ia an edge of *G*. The adjacency matrix *A* of *G* is the *n x n* zero-one matrix with 1 as its (i,j)th entry when v_i and v_j are adjacent, and 0 as its (i,j)th entry when they are not adjacent. In this paper will be described the characteristic of characteristic polynomial of a graph. Moreover, the relationship between the characteristic polynomial of a graph with characteristic polynomial of its subgraph will also be outlined. In addition, will also be described the shape of eigenvalues and eigenvectors of certain graph.

Keywords: adjacency matrix, characteristic polynomial, eigenvalue, eigenvector, subgraph.

1. PENDAHULUAN

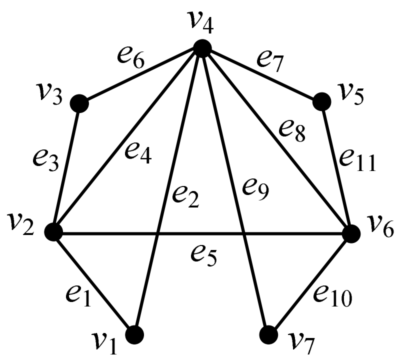
Pada bagian ini akan dipaparkan beberapa pengertian dan notasi yang digunakan dalam tulisan ini.

Pengertian dan Notasi Graf.

Secara umum, ***graf*** Γ terdiri dari tiga unsur, yaitu: suatu himpunan $V\Gamma$, himpunan $E\Gamma$, dan suatu relasi ketetanggaan, yaitu suatu himpunan bagian $V\Gamma \times E\Gamma$. Elemen-elemen $V\Gamma$ disebut titik dan elemen-elemen dari $E\Gamma$ disebut sisi.Relasi ketetanggaan disyaratkan sedemikian sehingga satu sisi bersisian dengan satu titik atau bersisian dengan dua titik. Jika setiap sisi bersisian dengan dua titik, dan tidak ada dua sisi yang bersisian dengan dua titik yang sama, maka Γ adalah graf sederhana atau dalam tulisan ini disebut saja ***graf.*** Dalam kasus ini, $E\Gamma$ dapat dipandang sebagai himpunan bagian dari himpunan pasangan tidak terurut dari titik-titik. Jika *v* dan *w* adalah titik-titik dari suatu graf Γ, dan $e = \{v, w\}$ adalah suatu sisi dari Γ, maka kita katakan bahwa *e* menghubungkan *v* dan *w*, dan bahwa *v* dan *w* adalah ujung-ujung dari *e*. Banyaknya sisi yang mempunyai ujung *v* disebut derajat dari *v*.

Contoh 1.1

Misalkan graf Γ terdiri dari titik-titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan sisi-sisi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$ dengan $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_4\}$, $e_3 = \{v_2, v_3\}$, $e_4 = \{v_2, v_4\}$, $e_5 = \{v_2, v_6\}$, $e_6 = \{v_3, v_4\}$, $e_7 = \{v_4, v_5\}$, $e_8 = \{v_4, v_6\}$, $e_9 = \{v_4, v_7\}$, $e_{10} = \{v_6, v_7\}$, dan $e_{11} = \{v_5, v_6\}$. Graf tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



.

Suatu *subgraf* dari Γ adalah suatu graf yang dikonstruksi dengan mengambil suatu subhimpunan *S* dari $E\Gamma$ bersama dengan semua titik-titik yang bersisian dengan suatu sisi yang ada pada *S*.

Suatu *subgraf terinduksi* dari Γ diperoleh dengan megambil suatu himpunan bagian *U* dari $V\Gamma$ bersama dengan semua sisi dalam Γ yang bersisian dengan titik-titik yang ada dalam *U*.

Pengertian dan Notasi Matriks Ketetanggaan Graf.

Misalkan Γ adalah suatu graf yang himpunan titiknya $V\Gamma$ adalah himpunan $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan $E\Gamma$ sebagai suatu himpunan pasangan tak berurut dari anggota-anggota $V\Gamma$. Jika $\{v_i, v_j\}$ berada dalam $E\Gamma$, maka kita katakan bahwa v_i dan v_j bertetangga.

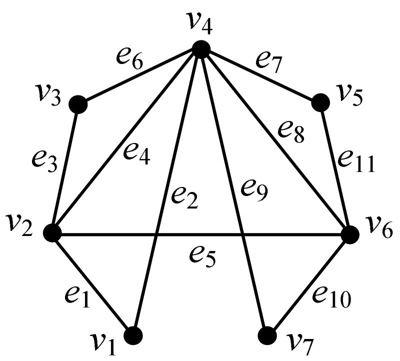
Defenisi 1.1 [1] *Matriks ketetanggaan dari graf* Γ *adalah matriks nxn, disimbol dengan A atau* $A(\Gamma)$, *yang elemen-elemennya,* a_{ij}, *sebagai berikut:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ bertetangga} \\ 0 & \text{, untuk hal yang lain.} \end{cases}$$

Dari definisi diatas terlihat bahwa A adalah suatu matriks riil yang simetris dan trace dari A adalah nol.

Contoh 1.2

Misalkan graf Γ adalah graf seperti pada contoh 1.1, yaitu:



Maka berdasarkan definisi 1.2 diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut:

$$A(\Gamma) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}.$$

Misalkan bahwa λ adalah suatu nilai eigen dari A, maka karena A adalah matriks riil dan simetris, maka λ adalah bilangan riil. Kelipatan aljabar dari λ, sebagai akar dari persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$, adalah sama dengan dimensi dari ruang vektor eigen yang berkorespondensi dengan λ. Selanjutnya nilai-nilai eigen dari matriks ketetanggaan A dikatakan nilai-nilai eigen dari graf Γ. Juga, polinom karakteristik $\det(\lambda I - A)$ disebut sebagai polinom karakteristik dari graf Γ, dan disimbol dengan $\chi[\Gamma;\lambda]$.