

# SIFAT-SIFAT LANJUT NEUTROSOFIK MODUL

<sup>1</sup>Suryoto, <sup>2</sup>Bambang Irawanto, <sup>3</sup>Nikken Prima Puspita

<sup>1, 2, 3</sup>Departemen Matematika Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro  
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 50275

<sup>1</sup>[suryoto\\_math@undip.ac.id](mailto:suryoto_math@undip.ac.id)

**Abstract.** Neutrosophic module over the ring with unity is an algebraic structure formed by a neutrosophic abelian group by providing actions scalar multiplication on the structure. The elementary properties of neutrosophic module have been looked at, that are intersection dan summand among neutrosophic submodules are neutrosophic submodule again, but it not true for union of neutrosophic submodules. In this article discussed the advanced properties of the neutrosophic module and the algebraic aspects respect to this structure, including neutrosophic quotient module and neutrosophic homomorphism module and can be shown that most of the properties of the classical module still true to the neutrosophic structure, especially with regard to the properties of neutrosophic homomorphism module and the fundamental theorem of neutrosophic homomorphism module.

**Keywords :** neutrosophic module, neutrosophic quotient module, neutrosophic homomorphism module, the fundamental theorem of neutrosophic homomorphism module

## 1. PENDAHULUAN

Neutrosifik modul atas ring dengan unsur satuan adalah suatu struktur aljabar yang dapat dibentuk dari neutrosifik grup komutatif yang diberikan tindakan perkalian skalar pada struktur tersebut. Struktur neutrosifik ini telah diperkenalkan oleh Agboola, et al [1] pada tahun 2012. Selanjutnya pada tahun 2015, sifat-sifat dasar yang berlaku pada neutrosifik modul telah dibahas pada [2]. Sifat-sifat dasar yang sudah ditinjau adalah bahwa operasi irisan dan hasil tambah neutrosifik submodul-neutrosifik submodul senantiasa merupakan neutrosifik submodul lagi, tetapi tidak demikian halnya dengan operasi gabungannya.

Untuk membahas sifat-sifat lanjut dari neutrosifik modul, perlu diingat kembali unsur neutrosifik yang merupakan kunci dari pembentukan struktur neutrosifik secara umumnya. Pada [3] dan [4] telah diperkenalkan unsur neutrosifik sebagai suatu unsur yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian dan dapat dipandang sebagai indeterminate. Unsur ini memegang peranan penting dalam pembentukan unsur-unsur himpunan dari struktur neutrosifiknya.

Unsur neutrosifik dinotasikan dengan  $I$  adalah suatu indeterminate yang bersifat

idempoten terhadap operasi perkalian, yaitu  $I \cdot I = I^2 = I$ . Perlu dicatat bahwa unsur neutrosifik  $I$  tidak sama dengan unsur satuan 1 dari ring dasar pembentuk neutrosifik modulnya.

Pada makalah ini diberikan sifat-sifat lanjut dari neutrosifik modul, terutama yang berkaitan dengan neutrosifik ideal faktor dan neutrosifik homomorfisma modul serta teorema utama homomorfisma neutrosifik modul.

## 2. PEMBAHASAN

### 2.1. Neutrosifik Ring dan Aspek Aljabar Terkait

Sebagai awal pembahasan berikut ini diberikan definisi neutrosifik grup sebagai dasar pembentukan neutrosifik modul.

**Definisi 2.1** [5] Misalkan  $G = \langle G, * \rangle$  sebarang grup, neutrosifik grup yang dibangun oleh  $I$  dan  $G$  dibawah operasi  $*$  dinotasikan dengan  $G = \langle G \cup I, * \rangle$ .

Neutrosifik grup  $G = \langle G \cup I, * \rangle$  tidak lain adalah himpunan yang unturnya berupa  $a * bI$ , dengan  $a, b \in G$  dan  $I$  suatu unsur neutrosifik.

Selain neutrosifik grup, konsep dasar yang perlu diingat adalah neutrosifik ring. Berikut ini diberikan definisi dan sifat-sifat yang berkaitan dengan neutrosifik ring.

**Definisi 2.2 [6]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  sebarang ring, maka himpunan  $\langle U \cup I \rangle = \{a, b \mid a, b \in U \cup I\}$  dinamakan neutrosodik ring yang dibangun oleh  $U$  dan  $I$  dibawah operasi dari  $\langle U, I \rangle$ .

Beberapa sifat penting dan aspek aljabar terkait dengan neutrosodik ring, dituangkan dalam beberapa teorema dan definisi berikut.

**Teorema 2.3 [6]** Setiap neutrosodik ring merupakan ring dan senantiasa memuat himpunan bagian sejati berupa ring.

**Bukti :**

Misalkan  $\langle U, I \rangle$  sebarang neutrosodik ring. Pada  $\langle U \cup I \rangle$  didefinisikan dua buah operasi biner “ + ” dan “ · ” sebagaimana berlaku pada ring  $\langle U, I \rangle$ . Seperti pada pembuktian struktur ring klasik dapat dibuktikan bahwa

- a.  $\langle U \cup I \rangle$ , merupakan grup komutatif
- b.  $\langle U \cup I \rangle$ , merupakan semigrup
- c. Sifat distributif kiri dan distributif kanan dipenuhi.

Sedangkan bukti untuk bagian keduanya langsung dari kenyataan bahwa ring  $\langle U, I \rangle \subset \langle U \cup I \rangle$ . ■

Sebagaimana berlaku dalam teori ring klasik, yaitu terdapatnya homomorfisma ring, dalam struktur neutrosodik juga dikenal konsep yang sama, berikut ini diberikan definisi/ pengertian homomorfisma neutrosodik ring.

**Definisi 2.4 [6]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  dan  $\langle U', I' \rangle$  adalah dua neutrosodik ring. Pemetaan  $\Phi : \langle U, I \rangle \rightarrow \langle U', I' \rangle$  disebut homomorfisma neutrosodik ring jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut :

- a.  $\Phi : \langle U, I \rangle \rightarrow \langle U', I' \rangle$  suatu homomorfisma ring
- b.  $\Phi(I) \subset I'$

Dari pengertian homomorfisma neutrosodik ring ini, diperoleh himpunan yang anggotanya terdiri atas semua  $a \in \langle U, I \rangle$  yang oleh  $\Phi$  dipetakan ke  $0' \in \langle U', I' \rangle$  dan dinamakan kernel dari  $\Phi$  serta dinotasikan dengan  $\text{Ker } \Phi$ . Dengan demikian

$$\text{Ker } \Phi = \{a \in \langle U, I \rangle \mid \Phi(a) = 0'\}.$$

Selanjutnya dari ring neutrosodik  $\langle U, I \rangle$ , secara khusus ditinjau neutrosodik grup komutatif  $\langle U, I \rangle$ , dan dibentuk homomorfisma-homomorfisma neutrosodik grup dari  $\langle U, I \rangle$ , ke dirinya sendiri atau endomorfisma neutrosodik grup. Jika semua endomorfisma neutrosodik grup  $\Phi : \langle U, I \rangle \rightarrow \langle U, I \rangle$  dihimpun kedalam himpunan

$$\text{End } \langle U, I \rangle = \{ \Phi \mid \Phi : \langle U, I \rangle \rightarrow \langle U, I \rangle \},$$

homomorfisma

maka dipunyai hasil berikut ini.

**Teorema 2.5 [1]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$ , suatu neutrosodik grup dan  $\text{End } \langle U, I \rangle$  adalah himpunan semua endomorfisma neutrosodik grup pada  $\langle U, I \rangle$ . Jika pada himpunan  $\text{End } \langle U, I \rangle$  didefinisikan dua buah operasi penjumlahan dan perkalian dengan

$$\Phi + \Psi = \Phi \oplus \Psi \text{ dan } \Phi \cdot \Psi = \Phi \circ \Psi,$$

untuk setiap  $\Phi, \Psi \in \text{End } \langle U, I \rangle$  dan  $\langle U, I \rangle \in \langle U, I \rangle$ , maka  $\text{End } \langle U, I \rangle$ , merupakan neutrosodik ring.

**Bukti :**

serupa dengan pembuktian untuk ring klasik. ■

Berikut ini diberikan pengertian tentang struktur neutrosodik subring dan subring dari suatu neutrosodik ring beserta perbedaannya.

**Definisi 2.6 [6]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  suatu neutrosodik ring. Himpunan bagian sejati dari  $\langle U, I \rangle$  dikatakan neutrosodik subring dari  $\langle U, I \rangle$  jika  $\langle U, nI \rangle$ , dengan subring dan  $n$  suatu bilangan asli. Dalam hal ini dikatakan dibangun oleh  $U$  dan  $nI$  dibawah operasi yang berlaku pada  $\langle U, I \rangle$ .

**Definisi 2.7 [6]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  suatu neutrosodik ring dan sebarang himpunan bagian sejati dari  $\langle U, I \rangle$  sedemikian hingga merupakan ring, maka dinamakan subring dari  $\langle U, I \rangle$ .

Untuk memperjelas perbedaan tentang neutrosodik subring dan subring dari suatu neutrosodik ring diberikan contoh berikut.

**Contoh 2.8** Pandang neutrosodik ring  $\langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle$ , maka himpunan bagian sejati

$$0, 6, I, 2I, 3I, 4I, \dots, 11I, 6 \quad I, 6$$

$$2I, 6 \quad 3I, \dots, 6 \quad 11I$$

dari  $\langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle$  merupakan neutrosodik subring dari  $\langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle$ , hal ini karena

$$0, 6 \text{ adalah subring dari } \mathbb{Z}_2$$

Dengan demikian dipunyai  $\langle \cup I \rangle$  merupakan neutrosodik subring dari  $\langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle$ .

Selanjutnya jika diambil

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 2I, 4I, 6I, 8I, 10I, 2$$

$$2I, 2 \quad 4I, \dots 2 \quad 10I, 10 \quad 2I, 10$$

$$4I, \dots, 10 \quad 10I$$

dan  $\mathbb{Z}_2 \quad 0, 6 \quad 6I$ , maka merupakan neutrosodik subring dari  $\langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle$ .

Sebaliknya meskipun  $\mathbb{Z}_2$  merupakan subring  $\langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle$  terhadap operasi yang sama, tetapi bukan merupakan neutrosodik subring dari  $\langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle$ .

Terkait pembahasan sifat-sifat lanjut dari neutrosodik modul, berikut ini diberikan konsep dasar yang diperlukan, diantaranya konsep neutrosodik ideal, sebagaimana diberikan oleh definisi dan teorema berikut.

**Definisi 2.9 [1]** Misalkan  $\langle \cup I \rangle$  sebarang neutrosodik ring. Suatu himpunan bagian tidak kosong  $P$  dari  $\langle \cup I \rangle$  disebut neutrosodik ideal dari  $\langle \cup I \rangle$  jika dipenuhi kondisi berikut :

a. neutrosodik subring dari  $\langle \cup I \rangle$

b. Untuk setiap  $p \in$  dan  $\in \langle \cup I \rangle$  berlaku  $\notin$  dan  $p \in$ .

Jika hanya berlaku  $\notin$  maka dikatakan neutrosodik ideal kiri, sedangkan jika

hanya berlaku  $p \in$ , maka dikatakan neutrosodik ideal kanan. Selanjutnya jika

neutrosodik ring  $\langle \cup I \rangle$  komutatif maka  $p \quad p$  dan disebut neutrosodik ideal.

Berikut ini diberikan sifat-sifat dari kernel suatu homomorfisma neutrosodik ring yang berkaitan dengan sub-struktur dari neutrosodik ring, berupa neutrosodik subring dan neutrosodik ideal.

**Teorema 2.10 [1]** Jika  $\Phi : \langle \cup I \rangle \rightarrow \langle ' \cup I \rangle$  suatu homomorfisma neutrosodik ring dan  $\text{Ker } \Phi$ , maka berlaku :

a. senantiasa merupakan subring dari  $\langle \cup I \rangle$

b. bukan neutrosodik subring dari  $\langle \cup I \rangle$

c. bukan neutrosodik ideal dari  $\langle \cup I \rangle$

**Bukti :**

a. Dibuktikan dengan cara biasa.

b. Karena  $\Phi I \quad I$ , maka  $I \notin$ , akibatnya bukan neutrosodik subring dari  $\langle \cup I \rangle$

c. Langsung terbukti dari bagian (b).

■

Terkait dengan konsep ideal, berikut ini diberikan struktur aljabar dari himpunan koset jumlah pada neutrosodik ring sebagaimana dituangkan dalam teorema berikut.

**Teorema 2.11 [1]** Jika  $\langle \cup I \rangle$  suatu neutrosodik ring dan neutrosodik ideal dari  $\langle \cup I \rangle$ , maka himpunan

$$\langle \cup I \rangle \quad | \in \langle \cup I \rangle$$

merupakan neutrosodik ring.

**Bukti :**

Untuk memperlihatkan bahwa  $\langle \cup I \rangle$

merupakan neutrosodik ring, diambil dua unsur sebarang dan  $\mathbb{Z}_2$

di  $\langle \cup I \rangle$  dan misalkan dan  $\cdot$  dua

operasi biner pada  $\langle \cup I \rangle$  yang

didefinisikan dengan  $\mathbb{Z}_2$

dan  $\mathbb{Z}_2$ , untuk setiap  $\mathbb{Z}_2 \in \langle \cup I \rangle$ . Dapat diperlihatkan bahwa

a. Operasi dan  $\cdot$  terdefinisi dengan baik

b.  $\langle \cup I \rangle$ , grup komutatif

c.  $\langle \cup I \rangle$ , semigrup

- d. Selanjutnya jika  $\langle U, I \rangle$  adalah unsur ketiga di dalam  $\langle U, I \rangle$ , maka berlaku dan

Dengan demikian terbukti bahwa  $\langle U, I \rangle$  suatu neutrosodik ring. ■

## 2.2. Neutrosodik Modul dan Sifat-sifat Dasar

Pembahasan sifat-sifat yang berlaku pada neutrosodik modul, tidak terlepas dari struktur neutrosodik grup komutatif sebagai dasar pembentukannya dan ring klasik, khususnya ring komutatif dengan unsur satuan. Secara formal pengertian tentang neutrosodik modul baik kiri maupun kanan diberikan oleh definisi berikut.

**Definisi 2.12 [1]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  ring dengan unsur satuan 1. Suatu  $n$ -modul kiri neutrosodik adalah neutrosodik grup komutatif  $\langle U, I \rangle$ , yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar  $\cdot : \langle U, I \rangle \rightarrow \langle U, I \rangle$  dan memenuhi kondisi-kondisi berikut :

- $n \cdot 1 = n$
  - $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$
  - $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$
  - 1 untuk setiap  $x \in U$  dan  $n \in \langle U, I \rangle$ .
- Sedangkan untuk pengertian neutrosodik modul kanan dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, perbedaannya terletak pada tindakan ring terhadap himpunan  $\langle U, I \rangle$ -nya sehingga mempunyai definisi berikut.

**Definisi 2.13 [1]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  ring dengan unsur satuan 1. Suatu  $n$ -modul kanan neutrosodik adalah neutrosodik grup komutatif  $\langle U, I \rangle$ , yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar  $\cdot : \langle U, I \rangle \rightarrow \langle U, I \rangle$  dan memenuhi kondisi-kondisi berikut :

- $n \cdot 1 = n$
- $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$
- $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$
- 1 untuk setiap  $x \in U$  dan  $n \in \langle U, I \rangle$ .

Dalam hal  $\langle U, I \rangle$  merupakan ring komutatif, maka mempunyai sifat berikut ini.

**Teorema 2.14 [1]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  ring dengan unsur satuan 1. Jika  $\langle U, I \rangle$  ring yang komutatif, maka neutrosodik  $n$ -modul kiri  $\langle U, I \rangle$  sekaligus merupakan  $n$ -modul kanan.

Selanjutnya jika  $\langle U, I \rangle$  merupakan neutrosodik modul kiri dan sekaligus neutrosodik modul kanan, maka  $\langle U, I \rangle$  dikatakan neutrosodik modul atas atau disebut juga neutrosodik  $n$ -modul.

Untuk lebih memperjelas definisi tentang modul, berikut ini diberikan beberapa contoh neutrosodik modul atas suatu ring.

Seperti halnya berlaku pada modul klasik, berikut ini diberikan definisi neutrosodik submodul dari suatu neutrosodik modul.

**Definisi 2.15 [2]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  suatu neutrosodik  $n$ -modul dan  $S$  himpunan bagian tidak kosong dari  $\langle U, I \rangle$ , dikatakan neutrosodik sub-modul dari  $\langle U, I \rangle$  jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut ini :

- $S$  merupakan neutrosodik sub-grup dari  $\langle U, I \rangle$ ,
- $S$  merupakan neutrosodik  $n$ -modul terhadap operasi perkalian skalar yang sama yang berlaku pada  $\langle U, I \rangle$ .

atau dengan perkataan lain,  $S$  merupakan neutrosodik submodul dari  $\langle U, I \rangle$  jika dipenuhi :

- $\langle U, I \rangle$  merupakan neutrosodik grup komutatif terhadap operasi “ $\cdot$ ”, yaitu  $S$  merupakan neutrosodik subgrup dari  $\langle U, I \rangle$ ,
- Untuk setiap  $x \in S$  dan  $n \in \langle U, I \rangle$  berlaku  $n \cdot x \in S$ .

Untuk mengetahui apakah suatu himpunan bagian tidak kosong dari suatu neutrosodik modul merupakan neutrosodik submodul, diberikan teorema berikut.

**Teorema 2.16 [2]** Misalkan  $\langle U, I \rangle$  suatu neutrosodik  $n$ -modul dan  $S$  himpunan bagian tidak kosong dari  $\langle U, I \rangle$ , merupakan neutrosodik submodul dari  $\langle U, I \rangle$  jika dan hanya jika memenuhi sifat :

- a. untuk setiap  $n, n_2 \in \mathcal{N}$  berlaku  $n - n_2 \in \mathcal{N}$   
 b. untuk setiap  $r \in \mathcal{R}$  dan  $n \in \mathcal{N}$  berlaku  $rn \in \mathcal{N}$

Misalkan  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  suatu neutrosifik -modul dan  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  adalah neutrosifik submodul dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ . Pada [1] didefinisikan jumlahan dari neutrosifik submodul  $\mathcal{N}_1$  dan  $\mathcal{N}_2$  sebagai himpunan  $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in \mathcal{N}_1 \vee x \in \mathcal{N}_2\}$ .

Seperti halnya berlaku pada struktur grup, pada neutrosifik modul dapat diperlihatkan bahwa irisan dan jumlahan dua neutrosifik submodul juga membentuk neutrosifik submodul.

**Lemma 2.17 [2]** Misalkan  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  suatu neutrosifik -modul. Jika  $\mathcal{N}_1$  dan  $\mathcal{N}_2$  adalah neutrosifik submodul dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ , maka berlaku

- a.  $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$  merupakan neutrosifik submodul dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$   
 b.  $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$  merupakan neutrosifik submodul dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$

Dari lema tersebut, dapat diperlihatkan bahwa irisan serta jumlahan tak berhingga neutrosifik submodul juga merupakan neutrosifik submodul, sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

**Teorema 2.18 [2]** Misalkan  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  suatu neutrosifik -modul. Jika  $\mathcal{N}_i$  merupakan neutrosifik submodul dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  untuk setiap  $i \in \Lambda$  maka

dan

Keduanya  $\bigcap_{i \in \Lambda} \mathcal{N}_i$  dan  $\bigcup_{i \in \Lambda} \mathcal{N}_i$  merupakan neutrosifik submodul dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ .

Dari [2] juga telah diperlihatkan bahwa gabungan dua buah neutrosifik submodul umumnya bukan merupakan neutrosifik submodul.

### 2.3.Sifat-sifat Lanjut Neutrosifik Modul

Pada makalah ini, pembahasan sifat-sifat lanjut dari neutrosifik modul dikaitkan dengan konsep neutrosifik modul faktor dan neutrosifik homomorfisma modul.

Diberikan  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  suatu neutrosifik -modul. Karena  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  suatu neutrosifik grup komutatif, maka sebarang subgrup dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  juga merupakan grup

komutatif. Misalkan sebarang subgrup dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ . Karena subgrup komutatif maka merupakan subgrup normal terhadap  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ , yaitu  $a^{-1} a \in \mathcal{N}$  untuk setiap  $a \in \langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ . Dengan demikian himpunan

$$\langle \mathcal{U} \cup I \rangle / \mathcal{N} = \{a \mathcal{N} \mid a \in \langle \mathcal{U} \cup I \rangle\}$$

merupakan grup terhadap operasi “ $\cdot$ ” yang didefinisikan dengan

$$a \mathcal{N} \cdot b \mathcal{N} = (a \cdot b) \mathcal{N},$$

untuk setiap  $a, b \in \langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ .

Selanjutnya karena  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  merupakan neutrosifik grup komutatif maka berlaku  $a \mathcal{N} \cdot b \mathcal{N} = b \mathcal{N} \cdot a \mathcal{N}$

$$a \mathcal{N} \cdot b \mathcal{N} = (a \cdot b) \mathcal{N} = (b \cdot a) \mathcal{N} = b \mathcal{N} \cdot a \mathcal{N}$$

yang memperlihatkan bahwa  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle / \mathcal{N}$

merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan koset.

Selanjutnya diberikan struktur modul dari himpunan  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle / \mathcal{N}$ , seperti pada teorema

berikut.

**Teorema 2.19** Jika  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$  suatu neutrosifik -modul dengan  $\mathcal{N}$  adalah ring dengan unsur satuan dan sebarang neutrosifik submodul dari  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle$ , maka  $\langle \mathcal{U} \cup I \rangle / \mathcal{N}$  merupakan neutrosifik -

modul terhadap operasi perkalian koset

$$a \mathcal{N} \cdot b \mathcal{N} = (a \cdot b) \mathcal{N} \text{ untuk setiap } a, b \in \langle \mathcal{U} \cup I \rangle / \mathcal{N}.$$

#### Bukti :

Pertama akan diperlihatkan bahwa operasi perkalian koset terdefinisi dengan baik.

Misalkan  $a, b \in \langle \mathcal{U} \cup I \rangle / \mathcal{N}$

dengan  $a = x \mathcal{N}, b = y \mathcal{N}$ . Dengan mengingat kesamaan dua koset diperoleh  $a - b \in \mathcal{N}$ . Karena neutrosifik submodul, maka untuk sebarang  $r \in \mathcal{R}$  berlaku  $a - b = r \mathcal{N} = r \mathcal{N}$ , dengan perkataan lain  $a = b$ .

Selanjutnya sesuai dengan pendefinisian

operasi perkalian koset diperoleh  $a$   $b$ , yang memperlihatkan operasi perkalian koset tersebut terdefinisi dengan baik.

Kedua karena  $a \in \langle U I \rangle$ , untuk sebarang  $\in$  dan  $a \in \langle U I \rangle$ , maka  $a \in \langle U I \rangle$

yang memberikan bahwa operasi perkalian koset tertutup. Dengan demikian operasi perkalian koset tersebut merupakan operasi biner.

Terakhir diberikan sebarang  $a, b \in \langle U I \rangle$  dan  $, , 2 \in$ , maka

diperoleh

- a.  $a \quad b$   
 $a \quad b$   
 $a \quad b$   
 $a \quad b$
- b.  $2 \quad a \quad 2 \quad a$   
 $a \quad 2a$   
 $a \quad 2a$   
 $a \quad 2a$
- c.  $2 \quad a \quad 2 \quad a$   
 $2a \quad 2a$   
 $2a \quad 2a$
- d.  $1 \quad a \quad 1 \quad a \quad a$

Dengan demikian benar bahwa  $\langle U I \rangle$

merupakan neutrosodik modul. ■

Neutrosodik modul  $\langle U I \rangle$  pada

teorema ini disebut neutrosodik modul faktor.

Neutrosodik modul faktor merupakan salah satu konsep yang digunakan pada pembahasan teorema utama homomorfisma neutrosodik modul. Berikut ini diberikan pengertian homomorfisma neutrosodik modul, yaitu suatu pemetaan dari suatu neutrosodik modul ke neutrosodik modul yang lain yang mengawetkan sifat-sifat operasi perkalian skalar di kedua neutrosodik modul.

**Definisi 2.20** Misalkan  $\langle U I \rangle$  dan  $\langle ' U I \rangle$  adalah neutrosodik -modul. Pemetaan  $\Phi : \langle U I \rangle \rightarrow \langle ' U I \rangle$  disebut neutrosodik homomorfisma modul jika dipenuhi ketiga syarat berikut :

- a.  $\Phi \quad 2 \quad \Phi \quad \Phi \quad 2$
- b.  $\Phi \quad \Phi$
- c.  $\Phi I \quad I$

untuk setiap  $, , 2 \in$  dan  $\in$ . Berikut diberikan contoh pemetaan yang merupakan homomorfisma neutrosodik modul dan yang bukan.

**Contoh 2.21** Diketahui bahwa  $\langle \mathbb{Z} U I \rangle$  dan  $\langle \mathbb{Z} U I \rangle$  keduanya merupakan neutrosodik  $\mathbb{Z}$ -modul. Pemetaan  $\Phi : \langle \mathbb{Z} U I \rangle \rightarrow \langle \mathbb{Z} U I \rangle$  yang didefinisikan dengan  $\Phi a \quad a^2$ , untuk setiap  $a \in \langle \mathbb{Z} U I \rangle$ , merupakan homomorfisma modul, tetapi bukan neutrosodik homomorfisma modul, karena untuk sebarang  $a, b \in \langle \mathbb{Z} U I \rangle$  dan  $\in \mathbb{Z}$  berlaku:

- a.  $\Phi a \quad b \quad a \quad b^2 \quad a^2$   
 $b^2 \quad \Phi a \quad \Phi b$
  - b.  $\Phi a \quad a^2 \quad a^2 \quad \Phi a$
- akan tetapi  $\Phi I \quad I^2 \neq I$ .

**Contoh 2.22** Pandang neutrosodik  $\mathbb{Z}$ -modul  $\langle \mathbb{Z}_2 U I \rangle$  dan didefinisikan pemetaan  $\Phi : \langle \mathbb{Z}_2 U I \rangle \rightarrow \langle \mathbb{Z}_2 U I \rangle$  dengan  $\Phi a \quad a^2$ , untuk setiap  $a \in \langle \mathbb{Z}_2 U I \rangle$ , maka  $\Phi$  merupakan endomorfisma neutrosodik modul.

Berikut ini diberikan lema mengenai sifat-sifat homomorfisma neutrosodik modul.

**Lemma 2.23** Misalkan  $\langle U I \rangle$  dan  $\langle ' U I \rangle$  adalah neutrosodik -modul dan  $\Phi : \langle U I \rangle \rightarrow \langle ' U I \rangle$  suatu homomorfisma neutrosodik modul, maka berlaku :

- a. Jika  $0$  adalah elemen identitas dari  $\langle U I \rangle$  maka  $\Phi 0 \quad 0$ , dengan  $0$  elemen identitas dari  $\langle ' U I \rangle$
- b. Jika  $a \in \langle U I \rangle$  maka  $\Phi - a \quad - \Phi a$
- c. Jika  $$  adalah sebarang submodule neutrosodik dari  $\langle U I \rangle$  maka  $\Phi$  merupakan neutrosodik submodule dari  $\langle ' U I \rangle$
- d. Jika  $'$  adalah sebarang submodule neutrosodik dari  $\langle ' U I \rangle$  maka

$\Phi$  merupakan neutrosodik submodul dari  $\langle U \cup I \rangle$

**Bukti :**

Bagian (a) dan (b) dibuktikan serupa dengan pembuktian sifat-sifat homomorfisma modul klasik, sedangkan untuk bagian (c) dan (d) dibuktikan dengan memanfaatkan Teorema 2.5. ■

Berikut diberikan definisi mengenai kernel dan image suatu homomorfisma neutrosodik modul beserta sifat-sifatnya.

**Definisi 2.24** Misalkan  $\langle U \cup I \rangle$  dan  $\langle U' \cup I' \rangle$  adalah neutrosodik -modul dan  $\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \langle U' \cup I' \rangle$  homomorfisma neutrosodik modul, maka

ke  $ne\Phi = \{x \in \langle U \cup I \rangle \mid \Phi(x) = 0'\}$  dan  $image\Phi = \{\Phi(x) \mid x \in \langle U \cup I \rangle\}$ .

Selanjutnya kernel dan image dari  $\Phi$  ini berturut-turut dinotasikan dengan  $Ker \Phi$  dan  $Im \Phi$ .

**Contoh 2.25** Dari Contoh 2.2., diperoleh  $Ker \Phi = 0$  dan  $Im \Phi = \{0, 1, I, 1 \mid \langle \mathbb{Z}_2 \cup I \rangle\}$ .

Sifat-sifat dasar dari kernel dan image dari homomorfisma neutrosodik modul diberikan oleh lema berikut.

**Lemma 2.26** Misalkan  $\langle U \cup I \rangle$  dan  $\langle U' \cup I' \rangle$  adalah neutrosodik -modul dan  $\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \langle U' \cup I' \rangle$  homomorfisma neutrosodik modul, maka

- a.  $Ker \Phi$  merupakan neutrosodik submodul dari  $\langle U \cup I \rangle$  dan
- b.  $Im \Phi$  merupakan neutrosodik submodul dari  $\langle U' \cup I' \rangle$ .

**Bukti :**

serupa dengan pembuktian untuk submodul klasik. ■

Definisi tentang isomorfisma neutrosodik modul berikut ini, akan mengawali pembahasan mengenai teorema utama homomorfisma neutrosodik modul.

**Definisi 2.27** Misalkan  $\langle U \cup I \rangle$  dan  $\langle U' \cup I' \rangle$  adalah neutrosodik -modul dan  $\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \langle U' \cup I' \rangle$  homomorfisma neutrosodik modul. Jika  $\Phi$  pemetaan yang bijektif, yaitu  $\Phi$  pemetaan yang injektif sekaligus surjektif, maka pemetaan  $\Phi$  disebut isomorfisma neutrosodik modul.

Berikut diberikan contoh homomorfisma neutrosodik modul yang merupakan isomorfisma neutrosodik modul.

**Contoh 2.28** Homomorfisma neutrosodik modul  $\Phi$  pada Contoh 2.2. merupakan isomorfisma neutrosodik modul.

Berikut ini diberikan beberapa teorema yang mendukung dalam pembahasan inti, yaitu teorema utama (fundamental) homomorfisma neutrosodik modul.

**Teorema 2.29** Jika  $\langle U \cup I \rangle$  dan  $\langle U' \cup I' \rangle$  adalah neutrosodik -modul dan  $\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \langle U' \cup I' \rangle$  homomorfisma neutrosodik modul dengan  $Ker \Phi = 0'$ , maka pemetaan

$$\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \Phi \langle U' \cup I' \rangle$$

yang didefinisikan dengan  $a \Phi a$ , untuk setiap  $a \in \langle U \cup I \rangle$ ,

merupakan isomorfisma neutrosodik modul.

**Bukti :**

serupa dengan pembuktian untuk homomorfisma modul klasik. ■

**Teorema 2.30** Jika  $\langle U \cup I \rangle$  dan  $\langle U' \cup I' \rangle$  adalah neutrosodik -modul dan  $\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \langle U' \cup I' \rangle$  homomorfisma neutrosodik modul dengan  $Ker \Phi = 0'$ , maka pemetaan

$$\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \langle U' \cup I' \rangle$$

yang didefinisikan dengan  $a \Phi a$ , untuk setiap  $a \in \langle U \cup I \rangle$ , merupakan homomorfisma surjektif.

**Bukti :**

serupa dengan pembuktian untuk homomorfisma modul klasik. ■

Dari teorema-teorema sebelumnya diperoleh hasil berikut, yang dikenal dengan teorema utama homomorfisma neutrosodik modul.

**Teorema 2.31** Jika  $\langle U \cup I \rangle$  dan  $\langle U' \cup I' \rangle$  adalah neutrosodik -modul dan  $\Phi : \langle U \cup I \rangle \rightarrow \langle U' \cup I' \rangle$  homomorfisma neutrosodik modul, maka terdapat suatu isomorfisma neutrosodik modul dari  $\langle U \cup I \rangle / Ker \Phi$  ke  $\Phi \langle U' \cup I' \rangle$ .

**Bukti :**

Misalkan  $\langle U \mid I \rangle$  dan  $\langle U' \mid I' \rangle$  adalah neutrosodik  $\mu$ -modul dan  $\Phi : \langle U \mid I \rangle \rightarrow \langle U' \mid I' \rangle$  homomorfisma neutrosodik modul, maka  $\Phi \langle U \mid I \rangle \subseteq \langle U' \mid I' \rangle$  dan  $\text{Ker } \Phi$  merupakan subgrup normal dari  $\langle U \mid I \rangle$  dan menurut Teorema 2.8.  $\langle U \mid I \rangle / \text{Ker } \Phi$  merupakan neutrosodik  $\mu$ -modul. Jika

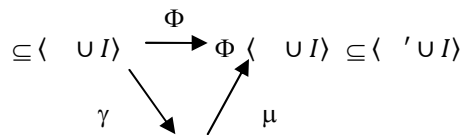
$$\gamma : \langle U \mid I \rangle \rightarrow \langle U' \mid I' \rangle$$

suatu pemetaan yang didefinisikan dengan  $\gamma(a) = \Phi a$ , untuk setiap  $a \in \langle U \mid I \rangle$ , maka menurut Teorema 2.12.  $\gamma$  merupakan homomorfisma neutrosodik modul yang surjektif. Selanjutnya jika

$$\mu : \langle U' \mid I' \rangle \rightarrow \Phi \langle U \mid I \rangle$$

Pemetaan yang didefinisikan dengan  $\mu(\Phi a) = a$ , untuk setiap  $a \in \langle U \mid I \rangle$ , maka  $\mu$  merupakan

isomorfisma neutrosodik modul. Dengan demikian dipunyai diagram :



Terhadap  $\langle U \mid I \rangle / \text{Ker } \Phi$ , maka diperoleh

$$\begin{array}{ccc}
 \langle U \mid I \rangle / \text{Ker } \Phi & \xrightarrow{\gamma} & \langle U' \mid I' \rangle / \text{Ker } \mu \\
 \cong & & \cong \\
 \langle U \mid I \rangle / \text{Ker } \Phi & \xrightarrow{\mu} & \langle U' \mid I' \rangle / \text{Ker } \mu
 \end{array}$$

yang memperlihatkan bahwa diagram tersebut komutatif. Dengan demikian terbukti bahwa terdapat isomorfisma neutrosodik modul

$$\langle U \mid I \rangle / \text{Ker } \Phi \cong \Phi \langle U \mid I \rangle / \text{Ker } \mu . \blacksquare$$

**3. PENUTUP**

Dari uraian pada bagian sebelumnya telah diperoleh gambaran bahwa antara neutrosodik modul dan modul klasik sebagai struktur padanannya, terdapat beberapa keterkaitan, diantaranya struktur

atau sub-strukturnya mempunyai kemiripan definisi, tetapi dari sifat-sifat yang berlaku pada umumnya tidak selamanya bersesuaian antara kedua struktur tersebut.

Dari hasil pembahasan sejauh ini dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada modul klasik masih berlaku pada struktur neutrosodik modul. Terutama yang berkaitan dengan neutrosodik modul faktor dan homomorfisma neutrosodik modul. Dengan memanfaatkan sifat kekomutatifan dari neutrosodik grup yang berakibat pada sebarang subgrupnya senantiasa normal dapat dikonstruksi neutrosodik modul faktor. Selanjutnya dengan memanfaatkan kernel suatu homomorfisma neutrosodik modul dan konsep neutrosodik modul faktor tersebut dapat diperlihatkan berlakunya teorema utama homomorfisma neutrosodik modul.

**4. UCAPAN TERIMA KASIH**

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro yang telah memberikan bantuan finansial, melalui program Penelitian Pembinaan dengan dana DIPA PNBP FSM Universitas Diponegoro Tahun 2014 dengan kontrak pelaksanaan penelitian No. 82C/UN7.3.8/PL/2014.

**5. DAFTAR PUSTAKA**

[1] Agboola A.A.A, Akinola A. D. & Oyebola O. Y., (2011), Neutrosophic Rings I, *International J. Math. Combin*, 4 : 1 – 14.

[2] Suryoto, Bambang Irawanto dan Nikken Prima Puspita, (2015), Neutrosodik Modul dan Sifat-sifatnya, *Jurnal Matematika*, 18 : 30 – 35

[3] *Proceedings of The First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics*, (2001), University of New Mexico, Gallup, 1 – 3 Desember 2001, ISBN : 1-931233-67-5.



- [4] Smarandache, Florentin, (2003) *A Unifying Field in Logics : Neutrosopic Logic. Neutrosopy, Neutrosopic Set, Neutrosopic Probability*, American Research Press, Rehoboth, New Mexico.
- [5] Kandasamy, W. B. V dan Florentin Smarandache, (2006), *Some Neutrosopic Algebraic Structures and Neutrosopic  $N - Algebraic Structures$* ", Hexis, Phoenix – Arizona.
- [6] Kandasamy, W. B. V & Florentin Smarandache, (2006), *Neutrosopic Rings*", Hexis, Phoenix – Arizona.
-