PELABELAN *PRIME CORDIAL* PADA BEBERAPA GRAF YANG TERKAIT DENGAN GRAF SIKEL

Nindita Yuda Hapsari[1], R.Heri Soelistyo U[2], Lucia Ratnasari[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

Abstract. Prime cordial labeling of a graph = (,) is a bijective mapping of the set vertex ( ) to the set {1,2,3,…, }, where is the number of vertex . The edge labeling induced the vertex labeling, which is obtained by finding the great common divisor (gcd) of the label of vertex which it's adjacent. If gcd of the adjacent vertex label is 1 then the label of edge is 1, but if gcd of the adjacent vertex label value other than 1 then the label of edge is 0, and the absolute value of the difference between the number of edges labeled 0 and the number of edges labeled 1 is less than equal with 1. A graph admits prime cordial labeling is called prime cordial graph. In this paper, we study about edge duplication cycle graph (except for = 4), vertex duplication cycle graph , path union union of cycle the graph and friendship graph one point union of copies of cycle .

Keywords: Prime Cordial Labeling, cycle graph, path union, friendship graph

1. PENDAHULUAN

Salah satu topik dalam teori graf adalah pelabelan [4]. Ada banyak jenis pelabelan yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan *prime.* Pelabelan *prime* sebelumnya telah dibahas oleh Vaidya, SK dan Kanani KK [3] untuk beberapa graf hasil operasi dari graf sikel yaitu pemadatan (*fusion*), duplikat *(duplication),* pertukaran titik *(vertex switching),* gabungan path *(path union),* dan penggabungan dua salinan (*path joining twocopies)* dari graf sikel. Pada pelabelan *prime* terdapat hubungan pada syarat pelabelan *prime cordial*. Pelabelan *prime cordial* merupakan suatu bentuk pelabelan pada titik yang label sisinya mengikuti *(induced)* label titiknya, yang definisinya adalah : ( ) → {1,2,3,…, } dan definisi label sisinya adalah (=) = 1; jika *gcd* ( ), ( ) = 1 , (=) = 0; jika lainnya, sedemikian sehingga fungsi disebut pelabelan *prime cordial* dari jika (0) − (1) ≤ 1. Graf yang memenuhi pelabelan *prime cordial* disebut graf *prime cordial.* Pelabelan *prime cordial* untuk beberapa graph khusus telah dibahas oleh Baskar Babujee dan L Shobama [1]. Artikel ini membahas tentang pelabelan *prime cordial* untuk graf yang terkait dengan graf sikel.

2. PEMBAHASAN

Definisi 2.1 [2] *Duplikasi sebuah sisi* = (,) *oleh sebuah titik baru pada graf menghasilkan graf baru sedemikian sehingga* ( ) = { , }.

Teorema 2.2 [2] *Sebuah graf yang diperoleh dengan menduplikasi sisi oleh sebuah titik pada sikel merupakan pelabelan prime cordial, kecuali untuk* = 4.

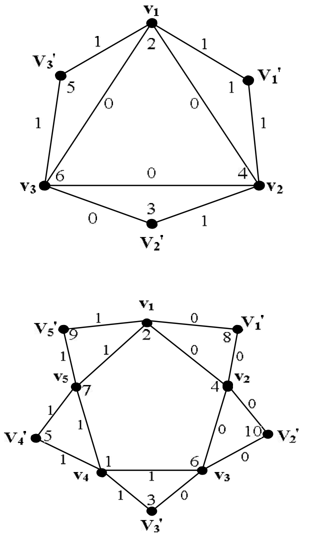
Bukti :

Misalkan ′ adalah graf yang diperoleh dari graf dengan menduplikasi setiap sisinya, himpunan titik–titik graf adalah { , ,…, }, sedangkan himpunan titik – titik untuk mendapatkan graf ′ adalah ′, ′,…, ′ . Didefinisikan pelabelan titik (′) → { 1,2,3…,2 } , dalam dua kasus sebagai berikut.

Kasus ganjil

Pada kasus n ganjil, akan dibagi dalam sub kasus-sub kasus, karena untuk n=3,5, tidak dapat menggunakan rumus label titik, sedangkan definisi rumus label titik hanya dapat digunakan untuk ≥ 7

Sub kasus 1: = ,



Gambar 2.1 Graf *Prime Cordial* ′ dan ′

Subkasus 2: ≥

Pelabelan titik untuk ′; ≥ 7 didefinisikan sebagai berikut.

$(\ ) = 2, \quad (\ ) = 4$

$(\ ) = 6 + 2 \ ; 1 \leq \ \leq - - 2$

$\_\_ = 3, \quad \_\_ = 1$

$\_ = 6 + 5; 1 \leq \ \leq - - 1$

$' = \_ + 2 \ ; 1 \leq \ \leq 2 -$

$'\_ = 6, \quad '\_ = 9$

$'\_ = 5, \quad '\_ = 7$

$'\_ = 6 + 7; 1 \leq \ \leq \frac{}{2} - 1$

$'\_ = 6 + 9; 1 \leq \ \leq \frac{}{2} - 1$

Dari pendefinisian titik, setelah melalui proses penghitungan diperoleh pola label sisi sebagai berikut.

Untuk = 7 diperoleh (0) = 14 dan (1) = 14

Untuk = 9 diperoleh (0) = 18 dan (1) = 18

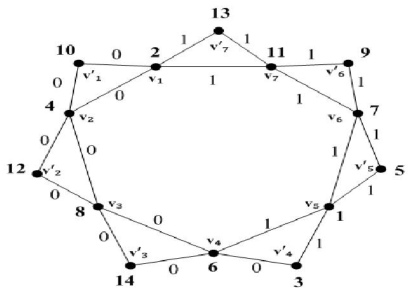
Untuk = 11 diperoleh (0) = 20 dan (1) = 20

Sehingga (0) dan (1) untuk ′; ≥ 7 membentuk barisan aritmatika dengan rumus:

$$(0) = (1) = 2$$

Jadi untuk selisih (0) dan (1) pada ′ adalah

$$(0) - (1) = |2 - 2 \ | = 0$$

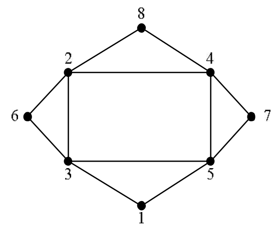


Gambar 2.2 Graf *Prime Cordial* ′

Kasus genap

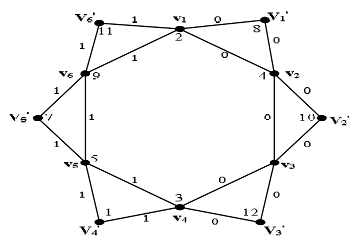
Pada kasus n genap, akan dibagi dalam sub kasus-sub kasus, karena untuk n=4,6,8,10, tidak dapat menggunakan rumus label titik, sedangkan definisi rumus label titik hanya dapat digunakan untuk ≥ 12

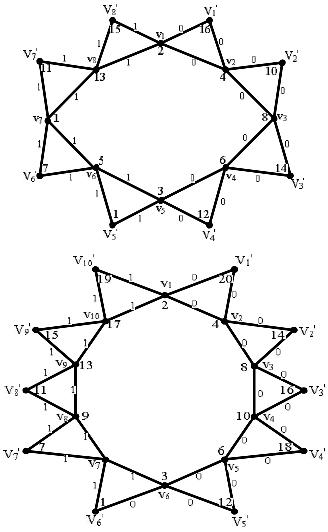
Subkasus 1: =



Gambar 2.3 Graf ′ bukan graf *prime cordial*

Subkasus 2: = , ,





Gambar 2.4 Graf *Prime Cordial* ′ , ′ dan ′

Subkasus 3: ≥

Pelabelan titik untuk ′; ≥ 12 didefinisikan sebagai berikut.

( ) = 2, ( ) = 4, ( ) = 8,
( ) = 10, ( ) = 14

( ) = 14 + 2 ; 1 ≤ ≤ $\frac{}{2}$ − 6

_ = 6, _ = 3

_ = 4 + 1; 1 ≤ ≤ $\frac{}{2}$ − 1

′ = 2

′ = _ + 2 ; 1 ≤ ≤ $\frac{}{2}$ − 2

′_ = 12, ′_ = 1

′_ = 4 + 3; 1 ≤ ≤ $\frac{}{2}$ − 1

Dari pendefinisian label titik, setelah melalui proses penghitungan diperoleh pola label sisi sebagai berikut.

Untuk = 12 diperoleh (0) = 18 dan (1) = 18

Untuk = 14 diperoleh (0) = 21 dan (1) = 21

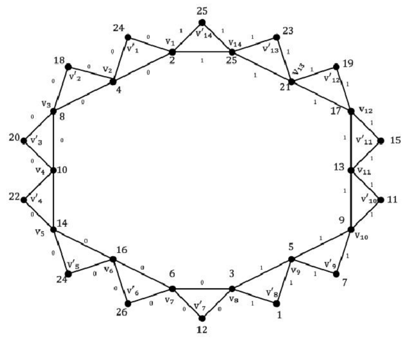
Untuk = 16 diperoleh (0) = 24 dan (1) = 24

Dari hasil pelabelan sisi yang diperoleh terlihat (0) dan (1) membentuk barisan aritmatika dengan rumus:

(0) = 3 −

(1) = 3 −

Jadi dari hasil diatas diperoleh (0) − (1)| = 3 − − 3 − = 0



Gambar 2.5 Graf *Prime Cordial* ′

Definisi 2.3 [2] *Duplikasi dari sebuah titik oleh sebuah sisi baru = ′ ″ pada graf menghasilkan graf baru ′ sedemikian sehingga ′ ″ = .*

Teorema 2.4 [2] *Sebuah graf yang diperoleh dengan menduplikasi sebuah titik oleh sebuah sisi pada sikel merupakan pelabelan prime cordial.*

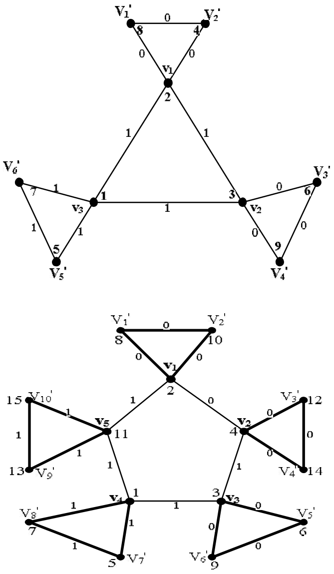
Bukti :

Misalkan graf ′ adalah graf yang diperoleh dari graf dengan menduplikasi setiap titiknya, himpunan titik – titik graf adalah { , ,…, }, sedangkan himpunan untuk mendapatkan graf ′ adalah ′, ′,…, ′. Didefinisikan untuk (′) → {1,2,3…,3 } dalam dua kasus sebagai berikut.

Kasus1: Ganjil

Pada kasus n ganjil, akan dibagi dalam sub kasus-sub kasus, karena untuk n=3,5, tidak dapat menggunakan rumus label titik, sedangkan definisi rumus label titik hanya dapat digunakan untuk ≥ 7

Subkasus 1: = ,



Gambar 2.6 Graf *Prime Cordial* dan

Subkasus 2: ≥

Pelabelan titik untuk ′; ≥ 7 didefinisikan sebagai berikut.

$(\;) = 2, \quad (\;) = 4$

$(\;) = 6 + 2 \;; 1 \le \; \le - - 2$

$= 3, \quad = 1$

$= 6 + 5; 1 \le \; \le - - 1$

$' = \; + 2 \;; 1 \le \; \le 2 -$

$' = 6, \quad ' = 9$

$' = 5, \quad ' = 7$

$' = 6 + 7; 1 \le \; \le \frac{}{2} - 1$

$' = 6 + 9; 1 \le \; \le \frac{}{2} - 1$

Dari pendefinisian titik, setelah melalui proses penghitungan diperoleh pola label sisi sebagai berikut.

Untuk = 7 diperoleh $(0) = 14$ dan $(1) = 14$

Untuk = 9 diperoleh $(0) = 18$ dan $(1) = 18$

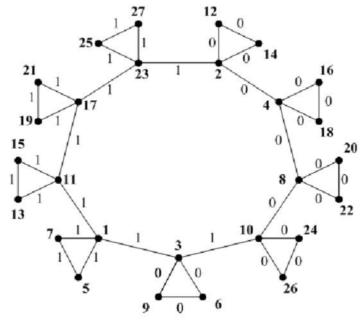
Untuk = 11 diperoleh $(0) = 20$ dan $(1) = 20$

Sehingga (0) dan (1) untuk ′; ≥ 7 membentuk barisan aritmatika dengan rumus:

$$(0) = \; (1) = 2$$

Jadi untuk selisih (0) dan (1) pada ′ adalah

$$(0) - \; (1) = |2 \; - 2 \;| = 0$$

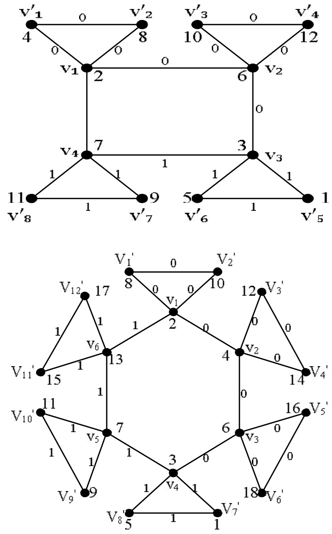


Gambar 2.7 Graf *Prime Cordial*

Kasus 2: Genap

Pada kasus n genap, akan dibagi dalam sub kasus-sub kasus, karena untuk n=4,6, tidak dapat menggunakan rumus label titik, sedangkan definisi rumus label titik hanya dapat digunakan untuk ≥ 8

Subkasus 1 : = ,



Gambar 2.8 Graf *Prime Cordial* ′ dan ′

Subkasus 2 : ≥

Pelabelan titik untuk ′; ≥ 8 didefinisikan sebagai berikut.

$(\ ) = 2, \quad (\ ) = 4$

$(\quad) = 6 + 2\ ; 1 \leq \ \leq - - 3$

$\_ = 6, \quad \_ = 3$

$\_ \quad = 6\ + 1; 1 \leq \ \leq - - 1$

$' = \quad \_ \quad + 2\ ; 1 \leq \ \leq$

$' = 1, \quad ' = 5$

$' \quad = 6\ + 3; \quad 1 \leq \ \leq - - 1$

$' \quad = 6\ + 5; \quad 1 \leq \ \leq - - 1$

Dari pendefinisian titik, setelah melalui proses penghitungan diperoleh pola label sisi sebagai berikut.

Untuk $= 8$ diperoleh $(0) = 16$ dan $(1) = 16$

Untuk $= 10$ diperoleh $(0) = 20$ dan $(1) = 20$

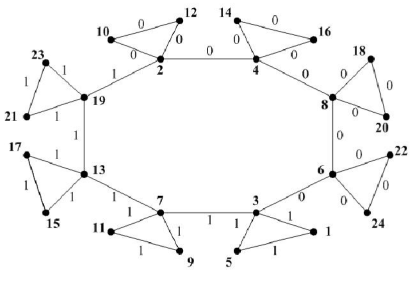
Untuk $= 12$ diperoleh $(0) = 24$ dan $(1) = 24$

Sehingga (0) dan (1) untuk $'$; ≥ 8 membentuk barisan aritmatika dengan rumus

$$(0) = \quad (1) = 2$$

Jadi untuk selisih (0) dan (1) pada $'$ adalah

$$(0) - \quad (1) = |2 \quad - 2 \quad | = 0$$



Gambar 2.8 Graf *Prime Cordial* $'$

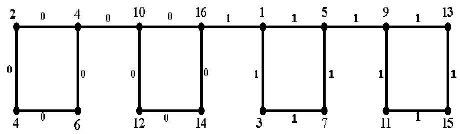
Definisi 2.5 [2] *Diberikan graf $, \ ,\ldots, \ ; \ \geq 2$ merupakan semua salinan dari graf yang tetap. Dengan menambahkan sebuah sisi antara sampai dengan $,$ untuk $= 1,2,\ldots, \ - 1$ disebut path union dari graf*

Teorema 2.6 [2] Path union dari m salinan sikel C adalah graf prime cordial.

Bukti :

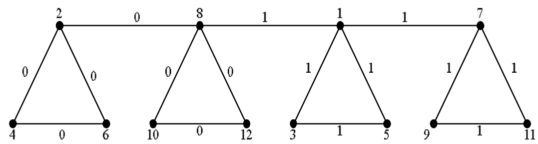
Misalkan graf $'$ adalah *path union* dari salinan sikel dengan himpunan titiknya adalah $\{\ ,\ ,\ ,\ldots,\ \}$ .Didefinisikan pelabelan titik untuk $'$ adalah $(\ ') \rightarrow \{1,2,3,\ldots,\ \}$.

Kasus 1: genap, genap



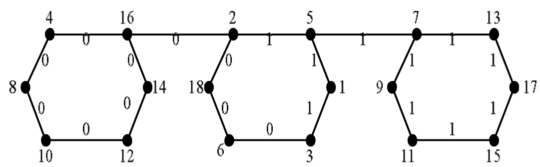
Gambar 2.9 Graf *Prime CordialPath Union* $'$

Kasus 2: ganjil, genap



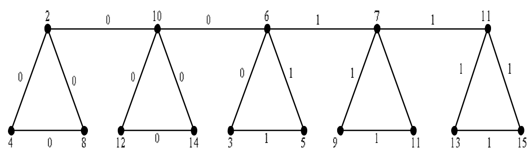
Gambar 2.10 Graf *Prime CordialPath Union* $'$

Kasus 3 : genap, ganjil

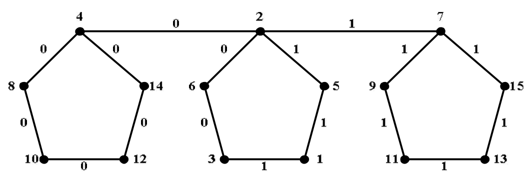


Gambar 2.11 Graf *Prime CordialPath Union* $'$

Kasus 4 : ganjil, ganjil



Gambar 2.12 Graf *Prime cordial Path Union* $'$



Gambar 2.13 Graf *Prime cordial Path Union* $'$

Definisi 2.7 [2] *Sebuah graf Friendship adalah one point union dari salinan sikel .*

Teorema 2.8 [2] *Graf Friendship adalah graf prime cordial untuk* ≥ 3.

Bukti :

Diberikan sebagai titik bersama untuk semua sikel. Tanpa menghilangkan sifat aslinya, dimulai untuk penetapan label titik dari .

Didefinisikan pelabelan titik untuk adalah : ( ) → {1, 2, 3, …, 2 + 1}, yang dibagi dalam dua kasus sebagai berikut

Kasus 1: Genap

Diberikan adalah bilangan prima terbesar sehingga 3 ≤ 2 + 1 dan pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut.

( ) = 2 ,

( ) = 2 ; 1 ≤ ≤ −

_ = 2 − + 1 + ; 1 ≤ ≤ − − 1

( ) = 1,

( ) = 2 + 1; 1 ≤ ≤

Selanjutnya untuk titik yang menghasilkan label 2 , maka titik tersebut tidak dilabelkan terlebih dahulu dan dilanjutkan dengan pelabelan selanjutnya. Setelah semua titik dilabelkan kecuali titik yang menghasilkan label 2 , maka titik yang belum dilabelkan tersebut dilabelkan dengan nilai sisa yang belum dilabelkan pada titik− titik dari graf tersebut.

Kasus2: Ganjil

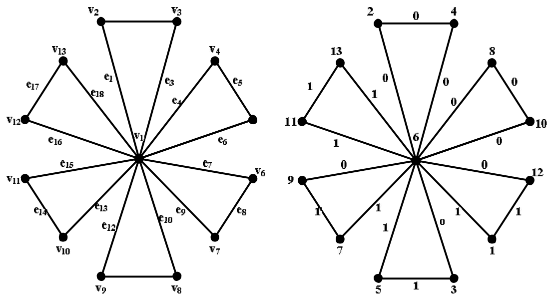
Diberikan adalah bilangan prima terbesar sehingga 2 ≤ 2 + 1 dan pelabelan titiknya didefinisikan sebagai berikut.

( ) = 2 ,

( ) = 2 + 1; 1 ≤ ≤ ; ( ) = 1,

( ) = 2 ; 1 ≤ ≤ − 1

Contoh 2.9



Gambar 2.14 Graf dan Graf *Prime Cordial*

3. KESIMPULAN

Dari pembahasan tentang Pelabelan *Prime Cordial* pada beberapa graf yang terkait dengan graf sikel diperoleh bahwa:

1. Graf baru ′ yang merupakan hasil duplikasi sisi oleh sebuah titik pada graf adalah graf *prime cordial* (Kecuali = 4).
2. Graf baru ′ yang merupakan hasil duplikasi titik oleh sebuah sisi pada graf adalah graf *prime cordial.*
3. Graf baru ′yang merupakan hasil *Path Union* dari *m* salinan sikel adalah graf *prime cordial* pada *path union* .
4. Graf *friendship* adalah graf *prime cordial.*

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Baskar Babujee and L.Shobana, Prime and Prime Cordial Labeling For Some Special graph, (2010), *Int. j. Contemp. Sciences*, 5 : 2347- 2356

[2] Vaidya, S.K and P.L Vihol. Prime Cordial Labeling For Some Cycle Related Graphs, (2010), *Int. J. open Problems Comp. Math.*, 3 : 1998-6262

[3] Vaidya, S.K and Kanani KK, (2010), Prime Labeling for Some Cycle Related Graphs, *Journal of Mathematics Research, 2 (2) : 98-103*

[4] Wilson, J. Robin and John J. Watkins, (1990), *Graphs An Introductory Approach,* John Willey &Sons : Canada.