JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 33 - 40, April 2001, ISSN : 1410-8518

KLASIFIKASI INTERAKSI GELOMBANG PERMUKAAN BERTIPE DUA SOLITON

Sutimin dan Agus Rusgiyono
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Pada tulisan ini diselidiki, masalah klasifikasi interaksi gelombang bertipe dua soliton Kadomtsev-Petviashvilli (KP). Disini dianalisis berdasarkan parameter interaksi dua solusi soliton baik melalui harga eksak maupun proses pelimitan. Proses pelimitan ini dilakukan untuk mengetahui resonansi diantara dua soliton. Selanjutnya resonansi soliton ini dikaji untuk mendapatkan soliton yang baru.

Kata kunci : interaksi, soliton, fase, resonansi

1. PENDAHULUAN

Berbagai kajian yang berhubungan dengan interaksi dua gelombang bertipe soliton secara experiment telah dilakukan oleh (Peterson, 2000), (Jamaludin,1997). Dalam fenomena alam interaksi dua gelombang yang bertipe dua soliton yang berupa hasil foto di pantai Origon telah dipotret oleh Toedtemeter (M.J. Ablowitz & H.Segur, 1981).

Pada tulisan ini akan dibahas beberapa klasifikasi secara analitis yang berkenaan dengan interaksi dua gelombang yang bertipe soliton yang dimodelkan dari persamaan Kadomtsev-Petviashvili (KP). Persamaan KP ini sebagai model dasar yang merupakan model gelombang panjang dua dimensi.

Secara analitis interaksi dua soliton KP dikarakterisasi oleh parameter yang berkaitan dengan koefisien interaksi dari dispersi relasi dua solliton. Berdasarkan koefisien interaksi ini akan dapat dibedakan beberapa klasifikasi interaksi dua soliton KP. Diasumsikan bahwa solusi dua soliton dari persamaan KP telah diperoleh. Untuk memudahkan analisis, tanpa mengurangi perumuman diasumsikan sudut-sudut interaksi individu dua soliton ini adalah simetris.

Penulisan paper ini dimulai dengan solusi dua soliton KP pada seksi dua, kemudian menjelaskan dalam kaitannya dengan klasifikasi interaksi secara detail pada seksi tiga. Gambaran secara fisis diberikan pada seksi berikutnya.

2. SOLUSI DUA SOLITON DARI PERSAMAAN KP

Dalam bentuk normal persamaan KP dinyatakan :

$$(U_t + UU_x + U_{xxx})_x + 3UU_y = 0 \quad \text{………..……………….............……(1.1)}$$

dimana $U = U(x, y, t)$ adalah fungsi permukaan bernilai riil.

Persamaan (1.1) ini merupakan generalisasi dua dimensi .Dari persaamaan (1.1). dapat diperoleh melalui metode Hirota, dengan melakukan transformasi variabel :

$$U = 2\frac{\partial^2 (\ln f)}{\partial x^2} = 2(\ln f)_{xx} \quad \text{……………………………………………(1.2)}$$

dengan syarat batas $|x| \to \infty$, berlaku $|U(x, y, t)| \to 0$.

Melalui transformasi (1.2) ini, maka persamaan (1.1) dapat ditulis menjadi:

$$f(f_t + f_{xxx})_x - f_x(f_t + f_{xxx}) - 3(f_x f_{xxx} - f^2{}_{xx}) + 3(ff_{yy} - f_y^2) = 0 \quad \text{…..(1.3)}$$

Selanjutnya melalui operator derivatif Hirota D (lihat [2]), persamaan (1.3) dapat dinyatakan oleh :

$$(D_x^4 + D_x D_t + 3D_y^2).f.f = 0 \quad \text{………………………………………….(1.4)}$$

Solusi untuk f yang merepresentasikan dua soliton (lihat pada [3]) dinyatakan oleh :

$$f(x, y, t) = 1 + e^{2\Phi_1} e^{2\Phi_2} + Ae^{2\Phi_1 + 2\Phi_2} \quad \text{…………………………………(1.5)}$$

Dimana $\Phi_i = \mu(x + \rho_i y - c_i t), \quad i = 1,2$ adalah variabel fase dari masing-masing soliton dengan $c_i = 4\mu_i^2 + 3\rho_i^2 \quad i = 1,2$ dan

$$A = \frac{-D(\mu_1 - \mu_2, \rho_1 - \rho_2, c_1 - c_2)}{D(\mu_1 + \mu_2, \rho_1 + \rho_2, c_1 + c_2)} = \frac{4(\mu_1 - \mu_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2}{4(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2} \quad \text{……..(1.6)}$$

Operator D didefinisikan dengan $D(a, b, c) \equiv ac - 4a^4 - 3b^2$ yang menyatakan relasi dispersi untuk solusi soliton dari persamaan KP, jika berlaku $D(a, b, c) = 0$. Solusi dikatakan reguler jika μ_i dan A positip.

Solusi dua Soliton dari persamaan KP dimana f diberikan pada (1.5) dapat dipandang sebagai interaksi dua soliton KP, dengan

μ_i : parameter yang berkenaan dengan tinggi individu gelombang ke i

dengan i = 1,2

ρ_i : sudut-sudut interaksi gelombang ke i

c_i : kecepatan perambatan fase soliton ke i

Jika sudut-sudut interaksi diambil simetris maka berlaku $\rho_1 = -\rho_2 = \rho > 0$. Sehingga koefisien interaksi dapat ditulis menjadi

$$A = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 - \rho^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \rho^2} \quad \text{………………………………..(1.7)}$$

Untuk selanjutnya akan dijelaskan bahwa klasifikasi interaksi dua soliton bergantung pada faktor A yang berkenaan dengan pergeseran fase $\Delta = -\frac{1}{2}\log A$.

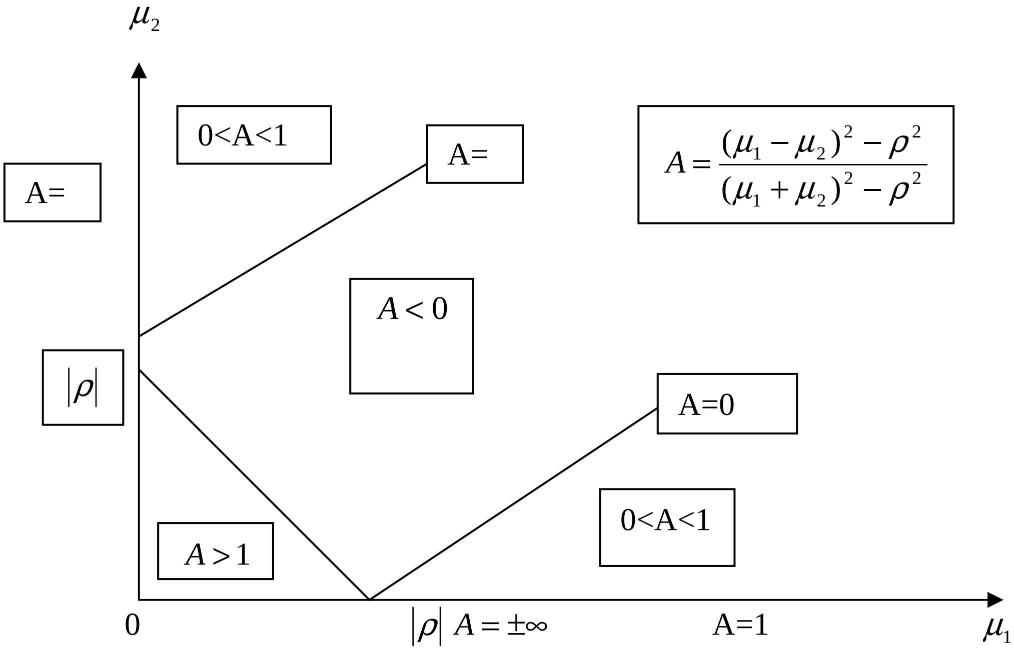
3. INTERAKSI DUA SOLITON

Selanjutnya akan dijelaskan secara detail interaksi antara dua soliton dengan menggunakan persamaan (1.5). Interaksi ini dapat diklasifikasikan menurut tipenya , bergantung pada harga A. Yaitu 0<A<1 , A>1 dan A<0. Jika 0<A<1 akan terjadi pergeseran fase positip, sedangkan jika A>1 pergeseran fase dikatakan negatif (Petterson, 2000).

Untuk kasus $0 < A < \infty$, solusi (1.5) menyatakan interaksi dua soliton yang reguler. Untuk A>>1 dua soliton membentuk soliton virtual. Pada keadaan resonansi $(|\Delta| \to \infty)$, soliton virtual menjadi suatu soliton sebenarnya, yang merupakan dua soliton menggabung setelah bertumbukan satu dengan yang lain, atau suatu soliton memecah menjadi dua soliton.

Untuk kasus 0<A<1, diperoleh suatu tipe baru tentang interaksi soliton-soliton menghasilkan soliton ketiga jika itu mendekati soliton yang lebih rendah. Soliton ketiga bergerak mengejar dan menumbuk dengan soliton yang lebih rendah. Soliton yang lebih rendah mengubah energi dengan salah satu yang lebih tinggi dengan mengarbsorbsi soliton ketiga.

Untuk kasus A< 0 dua soliton akan menjadi singular setelah bertumbukan satu dengan yang lain. Berikut adalah peta perubahan fase yang ditunjukkan sebagai suatu fungsi bilangan gelombang μ_1 dan μ_2 .



Dengan memperhatikan harga parameter A sebagai fungsi dari bilangan gelombang μ_1 dan μ_2, yang dinyatakan oleh persamaan (1.7) dengan mengasumsikan bahwa sudut-sudut interaksi simetris terhadap sumbu Y . Selanjutnya dapat dinyatakan kembali bahwa $A = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 - \rho^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \rho^2}$

Ada beberapa kasus yang berlaku untuk harga A yang membedakan klasifikasi profil interaksi type dua soliton dari persamaan KP, sebagai berikut :

1. Kasus untuk A = 0

   Maka berlaku $(\mu_1 - \mu_2)^2 - \rho^2 = 0$, mengakibatkan $\mu_1 - \mu_2 = \rho$ atau $\mu_1 - \mu_2 = -\rho$.

Vol. 4. No. 1, 33 - 40, April 2001, ISSN : 1410-8518

2. Kasus untuk $A = \mp\infty$

   Ini mengakibatkan $(\mu_1 + \mu_2)^2 - \rho^2 = 0$ atau himpunan penyelesaiannya adalah $\mu_1 + \mu_2 = \rho$ dan $\mu_1 + \mu_2 = -\rho$. Tetapi karena sifat dari soliton KP berlaku $\mu_1 > \mu_2 > 0$

   Dan $\rho > 0$. Maka himpunan penyelesaian untuk kasus $A = \mp\infty$ adalah $\mu_1 + \mu_2 = \rho$.

3. Kasus untuk A = 1

   Diperoleh

   $$\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 - \rho^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \rho^2} = 1 \quad atau \quad (\mu_1 - \mu_2)^2 - \rho^2 - (\mu_1 + \mu_2)^2 + \rho^2 = 0$$

   Sehingga berlaku $-4\mu_1\mu_2 = 0$ dan himpunan penyelesaiannya adalah $\mu_1 = 0$ atau $\mu_2 = 0$.

4. Kasus untuk A > 1

   Untuk ini dinyatakan kembali $\dfrac{(\mu_1 - \mu_2)^2 - \rho^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \rho^2} > 1$

   atau $\dfrac{-4\mu_1\mu_2}{((\mu_1 + \mu_2) - \rho)((\mu_1 + \mu_2) + \rho)} > 0$

   Himpunan penyelesaian dari ketaksamaan ini adalah :

   $\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad , \mu_1 + \mu_2 < \rho \, , \mu_1 + \mu_2 < -\rho$

   Karena sifat type solitonKP maka $\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad dan \, , \mu_1 + \mu_2 < -\rho$ tidak memenuhi syarat sehingga penyelesaiannya adalah $\mu_1 + \mu_2 < \rho$.

5. Kasus A < 0

   Diperoleh ketaksamaan $\dfrac{(\mu_1 - \mu_2)^2 - \rho^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \rho^2} < 0$ karena $\mu_1 > \mu_2 > 0$

   Dengan mengasumsikan sudut interaksi relatif kecil sedemikian sehingga berlaku $\mu_1 + \mu_2 > \rho$

   maka diperoleh penyelesaian ketaksamaan tersebut yaitu $-\rho < \mu_1 - \mu_2 < \rho$

4. RESONANSI SOLITON

Jika menganalisis solusi dua soliton, kita dapat mendefinisikan Δ sebagai berikut :

$\Delta = 0.5\log A$. Dari definisi Δ menunjukkan bahwa semakin besar |A| (yaitu $A \to 0$ *atau* $A \to \infty$), semakin besar daerah interaksi dua soliton. Pada pelimitan $|A| \to \infty$, panjang daerah interaksi menjadi tak hingga . Daerah interaksi ini dapat dinyatakan sebagai resonansi soliton.

Akan diperkenalkan notasi variabel fase yang ditulis sebagai :

$$\phi_i = \mu_i x - \nu_i y - \omega_i t + \delta_i \quad ; i = 1,2 \qquad (3.2)$$

Diasumsikan bahwa $\nu_1 \geq \nu_2.$ Selanjutnya akan diuji perilaku persamaan (1.2) untuk harga-harga A tertentu. Ada tiga kasus yang berbeda, $0 < A << 1$, $A >> 1$ *dan* $A \approx 1$

Dalam kasus $0 < A << 1$, $\exp(2\phi_1)$ dan $\exp(2\phi_2)$ adalah sangat besar daripada $A\exp(2\phi_1 + 2\phi_2)$ dan 1 karenanya itu

$$U \approx U^{(1-2)} = 0.5(\mu_1 - \mu_2)^2 \sec h^2(\phi_1 - \phi_2) \qquad (3.3)$$

Karena untuk $A \to 0$ berkenaan dengan $D(\mu_1 - \mu_2, \nu_1 - \nu_2, \omega_1 - \omega_2) = 0$ maka $U^{(1-2)}$ pada persamaan (3.16) memenuhi relasi dispersi untuk soliton KP.

Secara sama bila A>>1, $A\exp(2\phi_1 + 2\phi_2)$ dan 1 sangat lebih besar dari pada $\exp(2\phi_1)$ *dan* $\exp(2\phi_2)$

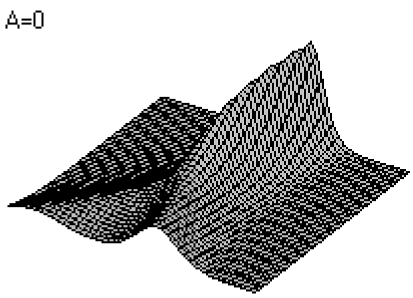
Oleh karena telah diketahui :

$$U \approx U^{(1+2)} = 0.5(\mu_1 + \mu_2)^2 \sec h^2(\phi_1 + \phi_2) \qquad (3.4)$$

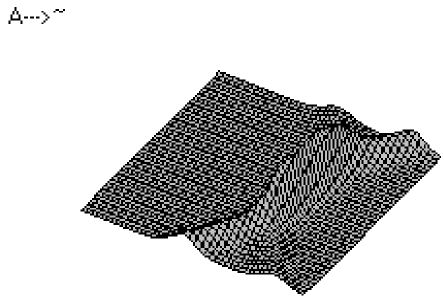
Karena untuk $A \to \infty$ berkenaan dengan $D(\mu_1 + \mu_2, \nu_1 + \nu_2, \omega_1 + \omega_2) = 0$ maka $U^{(1+2)}$ pada persamaan (3.4) adalah relasi dispersi untuk soliton KP. Solusi Soliton pada persamaan (3.3) dan (3.4) sering dikatakan soliton virtual, dan resonansi soliton dengan persamaan (3.3) dan (3.2) dikatakan resonansi minus dan resonansi plus. Untuk menyelidiki dan manganalisis secara detail kasus ini akan ditulis dalam paper berikutnya.

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 33 - 40, April 2001, ISSN : 1410-8518

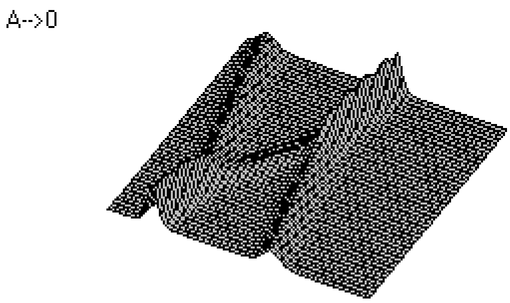
Gambar a



Gambar b



Gambar c



Keterangan :

Gambar a adalah kasus $A = 0$

Gambar b adalah kasus untuk $A >> 1$

Gambar c adalah kasus untuk $0 < A << 1$

5. KESIMPULAN

Dalam menganalisis secara teoritis, masalah interaksi dua soliton masih bersifat open problem. Berdasarkan hasil analisis sementara karakterisasi interaksi dua soliton ini ditunjukkan oleh parameter koefisien interaksi A, dimana parameter ini adalah parameter perubahan fase dari masing-masing soliton.

Interaksi dua soliton ini akan dikatakan soliton yang nyata jika memenuhi syarat relasi dispersi. Penulis akan mengembangkan analisis interaksi dua soliton ini pada paper berikutnya . Juga akan diselidiki perilaku interaksi tiga soliton

DAFTAR PUSTAKA

1. A. Jamaluddin, I.Yuwono, Jafar and Ong Chee Tiong, *Kadomtsev-Petviashvili (KP) Wave Identification From Laboratory Observations,* RWS Report, P4M-ITB, August 1997.

2. E. Cahyono, E. Van Groesen, E. Soewono & S. Subarinah, *Genus Two Soliton to Kadomtsev-Petviashvili Equation, Differential Equation Theory, Numerics and Apllications*, Kluwer Academics Publisher, 1996, 233-243.

3. E. Soewono, *Two Soliton Interactions of the Kadomtsev-Petviashvili (KP I, II)*, 1995 (Unpublished).

4. M. J. Ablowitz & H. Segur, *Soliton and Iverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.

5. P. Peterson and E. Van Groesen, *A Direct and Invers Problem for wave crests modeled by Interaction of two solution*, Physica D, July, 2000, 141 (3-4) : 316-322.