MODEL OPTIMASI *ECONOMIC PRODUCTION QUANTITY* DENGAN SISTEM *DELIVERY ORDER*

Nikken Prima Puspita[1], Siti Khabibah[2], Lucia Ratnasari[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika FSM UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

Abstract. The aims of Economic Production Quantity models are for manage the production schedule and product inventory. The first Economic Production Quantity model developed by E.W Taft on 1918. Taft make some asumption such as daily demand rate constant, daily production rate constant, not stockout allowed, single item product and daily production rate are more than daily demand rate. On the process of delivery product, there is not transportation cost. Pasandideh dan Niaki on 2010 was constructed an Economic Production Quantity models with discrete delivery order. In this research we discussed the Economic Production Quantity model which products delivered by multiple palet system and with transportation cost.

Keywords : delivery order, Economic Production Quantity, inventory, multiple palet, product

1. PENDAHULUAN

Model Optimasi *Economic Production Quantity* (EPQ) digunakan untuk mengatur perencanaan produksi mulai dari pengadaan bahan baku, proses produksi, penyimpanan hasil produksi hingga produk diterima oleh konsumen. Model Optimasi EPQ pertama kali dikembangkan oleh E.W Taft tahun 1918. Model EPQ merupakan perluasan dari model optimasi Economic Order Quantity (EOQ) yang lebih dahulu dikenal. Perbedaan antara model EPQ dan EOQ adalah pada model EPQ diasumsikan perusahaan memproduksi barang sendiri dimana sebagian dapat dijual kepihak lain saat proses produksi masih berlangsung. Sedangkan model EOQ mengasumsikan bahwa barang dipesan dari perusahaan lain. Baik Model EPQ dan Model EOQ bertujuan untuk menentukan jumlah pengeluaran yang paling minimum.

Dalam Model EPQ terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi antara lain jumlah rata-rata produksi harian diketahui konstan, jumlah permintaan tahunan diketahui, tidak diperbolehkan terjadi *stockout*, *single item product* dan rata-rata produksi harian lebih besar dari rata-rata permintaan harian, pengirimian dikirim secara kontinu selama masa produksi. Asumsi-asumsi ini membatasi model EPQ untuk dapat diimpelmentasikan kedalam kehidupan nyata.

Penelitan tentang model EPQ telah berkembang pesat. Penelitian tersebut bertujuan agar model EPQ lebih dapat realistis sehingga dapat bermanfaat bagi industri barang seperti yang telah dituliskan dalam [1], [2], [3], [4], [5] dan [6]. Modifikasi model EPQ lain yaitu dengan mengasumsikan bahwa pengiriman terjadi secara diskret per palet [7] dalam hal ini kapasitas palet dimasukkan sebagai tambahan variabel didalam model EPQ. Oleh karena adanya sistem *delivery order*, maka biaya transportasi perlu dimasukkan kedalam total biaya produksi, sehingga perlu dilakukan penelitian tentang model EPQ dengan sistem *delivery order* dimana pengiriman dilakukan secara bertahap per palet.

2. FORMULASI MODEL *ECONOMIC ORDER QUANTITY* DENGAN SISTEM *DELIVERY ORDER*

Salah satu permasalahan utama yang dihadapi oleh perusahaan yang mendapatkan *supply* barang dari sebuah pabrik adalah menentukan jumlah produk yang dipesan dan kapan harus melakukan pemesanan. Dalam penelitian ini diasumsikan bahwa terjadi interaksi antara sebuah perusahaan (sebagai pengguna) dan pabrik dengan ketentuan sebagai berikut :

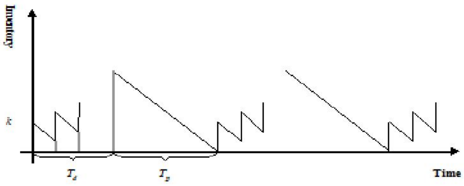
a. Jumlah produksi harian yang dapat dihasilkan pabrik diketahui dan konstan.

b. Jumlah permintaan harian perusahaan diketahui dan konstan.
c. Pabrik mengirim produk yang dipesan oleh perusahaan per palet.
d. Biaya perawatan/penyimpanan dan set-up diketahui.
e. Tidak diperbolehkan ada *stockout* dan keterlambatan.

Asumsi yang telah diberikan dapat dikembangkan untuk satu pabrik yang melayani beberapa perusahaan sebagai pengguna. Dalam model matematika ini parameter yang digunakan antara lain :

Q : Jumlah Produksi dalam satu siklus/Jumlah Pesanan dari Perusahaan
p : Rata-rata produksi harian
D : Perminataan pertahun
T : Waktu yang dihabiskan dalam satu siklus
T_p : Waktu produksi setiap siklus
T_d : *Down Time* setiap siklus
t : Waktu antara pengiriman satu hingga pengiriman berikutnya
L : Waktu tunggu
k : kapasitas palet
m : Jumlah pengiriman setiap siklus
b : Biaya untuk satu kali pengiriman
A : Biaya setup per siklus
h : Biaya penyimpanan perunit pertahun
c : Biaya produksi perunit
TH : Total biaya penyimpanan per tahun
TT : Total biaya transportasi per tahun
TB : Total biaya produksi per tahun
TS : Total biaya setup per tahun
TC : Total biaya yang dikeluarkan per tahun

Dalam model EPQ, produk yang dikirim kepada perusahan diasumsikan terjadi satu kali dengan jumlah yang konstan, artinya barang yang diproduksi dalam satu siklus sama dengan kapasitas 1 palet. Dalam penelitian ini proses pengiriman dibagi menjadi beberapa palet secara diskret sesuai dengan kapasitasnya sehingga $Q = mk$ dan digambarkan dalam gambar berikut:



Gambar 2.1 Model EPQ dengan *Delivery Order* [7]

Dengan adanya sistem pesan antar ini berarti *contractor* harus mengeluarkan biaya setup, biaya produksi, biaya perawatan/penyimpanan dan biaya transportasi untuk pengiriman barang. Total Biaya dalam setahun yang harus dikeluarkan *contractor* dalam dijelaskan sebagai berikut :

a. Total Biaya Setup (TS)

Biaya setup dikeluarkan setiap siklus produksi dengan jumlah konstan dan tidak bergantung pada banyaknya barang yang diproduksi. Dalam setahun siklus produksi dilakukan sebanyak $\frac{D}{Q}$ kali, sehingga total biaya setup dalam setahun adalah sebesar $A\frac{D}{Q}$.

b. Total Biaya Produksi (TP)

Jika untuk satu unit barang dikeluarkan biaya sebesar c, maka untuk sejumlah Q unit dikeluarkan biaya sebesar cQ . Akibatnya total biaya produksi dalam setahun adalah $cQ\left(\frac{D}{Q}\right) = cD.$

c. Total Biaya Peyimpanan (TH)

Untuk menghitung biaya penyimpanan, dibutuhkan data rata-rata inventori. Rata-rata inventori dapat dihitung berdasarkan Gambar 2.1 dengan menghitung luas bagian trapesium (saat pengiriman) dan luas segitiga (saat tidak ada pengiriman). Jumlah trapesium yang terbentuk akan berjumlah $m-1$. Jika luas trapesium j dinotasikan dengan $ls(j)$ dengan

$$ls(j) = \left(\frac{2jk-(2j-1)Dt}{2}\right)t,\ j = 1,2,....,m-1$$

, maka luas total trapesium adalah sebagi berikut :

$$ls = \sum_{j=1}^{m-1} ls(j) = \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{2jk-(2j-1)Dt}{2}\right)t \quad (2.1)$$

$$= (m-1)\frac{Dt^2}{2} + \left(kt - Dt^2\right)m\frac{m-1}{2}$$

Bagian segitiga pada Gambar 2.1, mempunyai luas (rs) sebagai berikut:

$$rs = \frac{1}{2}\left(Q-(m-1)Dt\right)\left(\frac{Q}{D}-(m-1)t\right) \quad (2.2)$$

Dari (2.1) dan (2.2) total luas area dalam satu siklus (s) adalah

$$s = rs + ls = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{D}-(m-1)mkt\right)$$

Dengan $k = pt$ dan $Q = mk$ diperoleh total biaya penyimpanan pertahun adalah

$$TH = hs\frac{D}{Q} = \frac{h}{2}\left(Q-(Q-k)\frac{D}{p}\right)$$

d. Total Biaya Transportasi (TT)

Biaya transportasi per siklus bergantung pada jumlah pengiriman (m), sehingga biaya transportasi untu satu siklus produksi adalah *mb*. Jika dalam satu tahun terdapat $\frac{D}{Q}$ siklus, maka Total biaya transportasi per tahun adalah

$$TT = mb\frac{D}{Q} = \frac{Q}{k}b\frac{D}{Q} = b\frac{D}{k}$$

Berdasarkan (a)-(d) Total biaya yang dikeluarkan pertahun (TC) adalah $TC = TS + TH + TB + TT$. Diperoleh fungsi tujuan yang akan diminimumkan merupakan Fungsi non linier dua variabel yaitu Meminimumkan

$$TC = A\frac{D}{Q} + cD + \frac{h}{2}\left(Q-(Q-k)\frac{D}{p}\right) + b\frac{D}{k} \quad (2.3)$$

dengan kendala $Q = mk, m \geq 1$ dimana Q, m, k merupakan bilangan bulat.

Persamaan (2.3) merupakan fungsi non liner dengan 2 variabel. Dengan menggunakan Turunan parsial tingkat pertama terhadap variabel Q dan k dan matriks Hessian dari Persamaan (2.3), ditentukan berapa banyak barang yang seharusnya diproduksi dan kapasitas palet yang paling optimal untuk meminimumkan biaya produksi.

3. SOLUSI OPTIMAL MODEL *ECONOMIC PRODUCTION QUANTITY* DENGAN SISTEM *DELIVERY ORDER*

Pada bagian ini akan ditentukan solusi optimal masalah optimasi pada Persamaan (2.3). Dengan menggunakan turunan parsial tingkat pertama terhadap variabel Q dan k diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\frac{\partial TC(Q,k)}{\partial Q} = -A\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\frac{D}{p}$$

4. (3.1)

$$\frac{\partial TC(Q,k)}{\partial k} = -b\frac{D}{k^2} + \frac{h}{2}\frac{D}{p}$$

5. (3.2)

Dari Syarat Perlu Order Pertama sebuah fungsi [8] dan [9] agar dapat diperoleh titik minimum/maksimum lokal, maka haruslah

$$\frac{\partial TC(Q,k)}{\partial Q} = -A\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\frac{D}{p} = 0$$

(3.3)

$$\frac{\partial TC(Q,k)}{\partial k} = -b\frac{D}{k^2} + \frac{h}{2}k\frac{D}{p} = 0$$

6. (3.4)

Dari Persamaan (3.3) diperoleh

$$-A\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\frac{D}{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow A\frac{D}{Q^2} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\frac{D}{p}$$

$$\Leftrightarrow A\frac{D}{Q^2} = \frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{p}\right)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{h}{2}Q^2\left(1-\frac{D}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = \frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{p}\right)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{p}\right)}}$$

(3.5)

Dari Persamaan (3.4) diperoleh

$$-b\frac{D}{k^2}+\frac{h}{2}k\frac{D}{p}=0$$

$$\Leftrightarrow b\frac{D}{k^2}=\frac{h}{2}\frac{D}{p}$$

$$\Leftrightarrow b=k^2\frac{h}{2p}$$

$$\Leftrightarrow k=\sqrt{\frac{2bp}{h}} \qquad (3.6)$$

Diperoleh calon peminimal/pemaksimal fungsi *TC(Q,k)* adalah

$$\left(\sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{p}\right)}},\sqrt{\frac{2bp}{h}}\right)$$

Untuk mengetahui apakah hasil ini merupakan hasil optimal, maka harus dilakukan uji optimalitas dengan menggunakan Syarat Cukup Order Dua (SCOD) seperti yang dituliskan dalam [4,5]. Hal ini dilakukan dengan melihat apakah matriks Hessian fungsi *TC(Q,k)* merupakan matriks yang definit positif yaitu nilai determinannya lebih besar sama dengan nol. Dari Persamaan (2.3) diperoleh matriks Hessian fungsi *TC(Q,k)* adalah sebagai berikut:

$$H=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial Q\partial k}\\ \frac{\partial^2 T}{\partial k\partial Q} & \frac{\partial^2 T}{\partial k^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{AD}{Q^3} & 0\\ 0 & \frac{bD}{k^3}\end{pmatrix}$$

sehingga determinan dari matriks Hessian H adalah

$$|H|=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial Q\partial k}\\ \frac{\partial^2 T}{\partial k\partial Q} & \frac{\partial^2 T}{\partial k^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{AD}{Q^3} & 0\\ 0 & \frac{bD}{k^3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{AD}{Q^3}\frac{bD}{k^3}=\frac{AbD^2}{(Qk)^3}$$

Oleh karena komponen-kompenen dari parameter A,b,D,Q,k berkaitan dengan komponen biaya dan kuantitas barang, maka haruslah masing-masing bernilai positif sedemikian hingga nilai $\frac{AbD^2}{(Qk)^3}>0$ atau berakibat $|H|>0$ dan hal ini berarti matriks Hessian fungsi *TC(Q,k)* merupakan matriks yang definit positif. Berdasarkan SCOD, maka hasil perhitungan yang tertulis pada Persamaan (3.5) dan (3.6) merupakan peminimal fungsi *TC(Q,k)*. Untuk selanjutnya dinotasikan Persamaan (3.5) dengan $Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{p}\right)}}$ dan Persamaan (3.6) dinotasikan dengan $k^*=\sqrt{\frac{2bp}{h}}$ dimana Q^* menyatakan jumlah produksi optimal dan k^* merupakan kapasitas palet terbaik. Oleh karena $Q=mk, m\geq 1$ dan Q,m,k merupakan bilangan bulat, maka solusi untuk k^* adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan k^* dan dinotasikan dengan $\left[k^*\right]$ atau $\left[k^*\right]+1$. Dengan cara yang sama oleh karena $Q=mk$, bilangan bulat $\left[\frac{Q^*}{k^*}\right]$ atau $\left[\frac{Q^*}{k^*}\right]+1$ merupakan solusi untuk banyaknya jumlah angkutan terbaik untuk mendistribusikan hasil produksi $\left(m^*\right)$. Dari hasil penjelasan ini diperoleh calon solusi optimal dari masalah optimasi pada penelitian ini dituliskan dalam tabel berikut :

Tabel 3.1. Calon Solusi Model EPQ *Delivery Order*

k	$Q=mk$	TC
$\left[k^*\right]$	$\left[k^*\right]\left[\frac{Q^*}{k^*}\right]$	TC_1
$\left[k^*\right]$	$\left[k^*\right]\left(\left[\frac{Q^*}{k^*}\right]+1\right)$	TC_2
$\left[k^*\right]+1$	$\left(\left[k^*\right]+1\right)\left[\frac{Q^*}{k^*}\right]$	TC_3
$\left[k^*\right]+1$	$\left(\left[k^*\right]+1\right)\left(\left[\frac{Q^*}{k^*}\right]+1\right)$	TC_4

Berdasarkan Tabel 3.1, nilai k dan Q yang dipilih sebagai solusi dari masalah optimasi ini adalah yang menghasilkan nilai

TC_i paling minimal. Dapat dijelaskan kembali bahwa dari Tabel 3.1 diperoleh berapa banyak jumlah barang yang sebaiknya harus diproduksi $\left(Q^*\right)$, jumlah kapasitas palet terbaik $\left(k^*\right)$, jumlah pengiriman dalam satu siklus produksi $\left(m^* = \frac{Q^*}{k^*}\right)$, berapa lama waktu dalam satu kurun waktu produksi $\left(T^* = \frac{Q^*}{D^*}\right)$ dan berapa banyak siklus produksi dalam satu tahun $\left(f^* = \frac{1}{T^*}\right)$.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Artikel ini merupakan hasil penelitian penulis yang dibiayai oleh dana PNBP Universitas Diponegoro Tahun Anggaran 2014 pada Skim Penelitian Pembinaan. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Rektor Universitas Diponegoro, Ketua LPPM Universitas Diponegoro dan Dekan Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh kesimpulan bahwa masalah optimasi Economic Production Quantity dapat dikembangkan dengan menambahkan komponen biaya antar barang. Pada artikel ini telah diperoleh masalh optimasi berupa meminimuman Fungsi biaya yang diperoleh dari total jumlahan biaya persiapan, biaya produksi, biaya perawatan dan biaya transportasi. Dari formulasi model tersebut dapat ditentukan kapan perusahaan harus memulai produksi, berapa banyak barang yang harus diproduksi dalam satu siklus produksi, berapa besar kapasitas palet untuk satu kali pengiriman dan berapa banyak jumlah angkutan terbaik yang harus dimiliki oleh perusahaan.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Bayindir, Z.P., Birbil, S.I., & Frenk, J.B.G, (2007), A deterministic inventory/production model with general inventory cost rate function and piecewise linear concave production costs. *European Journal of Operational Research*. 179 : 114-123.

[2]. Haksever, C., Moussourakis, J., (2008), Determining Order Quantities in Multi-Product Inventory Systems Subject to Multiple Constraints and Incremental Discounts. *European Journal of Operational Research*. 184 : 930-945.

[3]. Liao, J.J., (2007), On an EPQ model for deteriorating items under permissible delay in payments. *Applied Mathematical Modeling*. 31 : 393-403.

[4]. Pasandideh, S.H.R., Niaki, S.T.A., (2008), A genetic algorithm approach to optimize a multi-products EPQ model with discrete delivery orders and constrained space. *Applied Mathematics and Computation*. 195:506-514.

[5]. Pasandideh, S.H.R., Niaki, S.T.A., & Aryan Yeganeh, J., (2010), A parameter-tuned genetic algorithm for multi-product economic production quantity model with space constraint, discrete delivery orders and shortages. *Advances in Engineering Software*. 306 : 306-314.

[6]. Pasandideh, S.H.R., Niaki, S.T.A., & Mirhosseyni, S.S., (2010), A parameter-tuned genetic algorithm to solve multi-product economic production quantity model with defective items, rework, and constrained space. *Published online in the International Journal of Advanced Manufacturing Technology*.

[7]. Pasandideh, S.H.R., Niaki, S.T.A., (2010), The economic production quantity model with discrete delivery order. *Economic computation and economic cybernetics studies and research / Academy of Economic Studies*. 44 : 49-62

[8]. Luknanto, D., (2003), *Pengantar Optimasi Non Linier*. 2000. Yogyakarta

[9]. Nash, S.G., Sofer, Ariela, (1996), Linear and Non Linear Programming. Mc Graw-Hill Companies,Inc., Singapore 9