MODEL *ECONOMIC PRODUCTION QUANTITY* (EPQ) UNTUK PERENCANAAN TERKOORDINASI PADA PRODUK DENGAN *BACKORDER* PARSIAL DAN KOMPONENNYA

Ayu Oktavia[1], Djuwandi[2], Siti Khabibah[3]
[1]Program Studi S1 Matematika, Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
[2,3]Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang
oktaviaayu82@yahoo.com[1], djuwandi225433@gmail.com[2]

Abstrak. *Economic Production Quantity* (EPQ) used to determined policy and oversee inventory levels. This article discussed on EPQ models for planed of product with partial backordered and its component. The final product is assummed have *m* component and coordinated planning used to coordinate component of product and final product which is the components used for basic EPQ models and for final product planned using partial backorder EPQ. Numerical simulation given based data on UD. Adi Mulya.
Keywords : partial *backorder*, EPQ, coordinated planning , inventory.

1. PENDAHULUAN

Setiap perusahaan, baik perusahaan industri maupun perusahaan dagang selalu mengadakan persediaan.Perusahaan harus mampu mengatur persediaan seefektif mungkin agar biaya total yang dieluarkan minimal. Peminimalan biaya persediaan dapat dilakukan dengan model EPQ dan berkembang sesuai dengan masalah real yang ada di kalangan industri. Dalam kehidupan nyata, asumsi yang ada pada model EPQ dipandang sulit diterapkan, karena dalam model EPQ tidak diperbolehkan adanya kekosongan barang (*stockout*). Namun, pada kenyataannya sering dijumpai adanya kekosongan barang. Untuk itu [1] mengembangkan model EPQ dasar dengan adanya asumsi bahwa diperbolehkan adanya *stockout*. Dalam artikel ini dikaji model EPQ yang mengacu pada artikel [2] yang mempertimbangkan koordinasi dalam memproduksi produk akhir dan komponennya.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada artikel ini akan dibahas tentang model EPQ untuk perencanaan terkoordinasi pada produk dengan *backorder* parsial dan komponennya. Dalam model EPQ klasik tidak diperbolehkan adanya kekurangan produksi pada perusahaan. Tetapi, dalam artikel ini diperbolehkan adanya *backorder* dan konsumen bersedia menunggu. Dalam pembahasan artikel ini, model EPQ klasik akan dikembangkan menjadi model EPQ *bakcorder*. Di mana untuk produk akhirnya sendiri direncanakana menggunakan model EPQ dengan *backorder* parsial, sedangkan untuk produksi dari komponennya di kontrol dengan model dasar EPQ tanpa *backorder*.

2.1 Asumsi-asumsi dan Notasi Model

Pada model optimasi dalam tugas akhir ini terdapat beberapa asumsi yang perlu diperhatikan. Asumsi-asumsi tersebut adalah sebagai berikut :

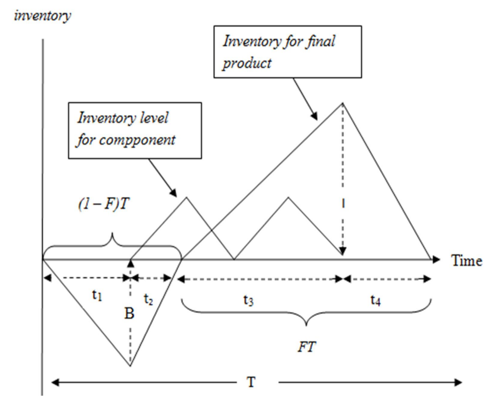
a. Sebagian permintaan selama interval *stockout* akan dipenuhi dengan *backorder*
b. *Backorder* untuk produk akhir akan dipenuhi menggunakan metode FIFO *(First In First Out*).
c. Produksi akhir memiliki kualitas yang sempurna.
d. Produk akhir memiliki *m* komponen.
e. Komponen produk akhir memiliki kualitas yang sempurna.
f. Produksi komponen sesuai dengan proses EPQ tanpa *backorder.*

Pada model optimasi dalam tugas akhir ini terdapat beberapa notasi yang perlu diperhatikan. Notasi-notasi tersebut adalah sebagai berikut :

C_o : Biaya *set up* untuk produk akhir
C_{oi} : Biaya *set up* untuk komponen *i*
C_h : Biaya penyimpanan per bulan per unit dari produk akhir dalam persediaan
C_{hi} : Biaya penyimpanan per bulan per unit dari komponen *i* dalam persediaan
C_b : Biaya *backorder* per bulan per unit dari produk akhir
C_l : $(s - C_p) + C_g$ = Biaya kehilanggan keuntungan pada unit permintaan yang tak terpenuhi dari produk akhir.
β : Presentase permintaan produk akhir yang akan dipenuhi dengan *backorder*
T : Panjang siklus untuk produk akhir
I : Tingkat inventori maksimum dari produk akhir, dengan $\bar{I}$ menjadi tingkat rata – rata inventori satu bulan
B : Jumlah *backorder* maksimum pada produk akhir, dengan $\bar{B}$ menjadi tingkat rata – rata *backorder* sebulan (B=βS)
F : Persentase permintaan produk akhir yang terpenuhi dari persediaan
N_i : Frekuensi produksi komponen *i* selama interval produksi untuk produk akhir

2.2 Formulasi Model

Model *EPQ* untuk perencanaan terkoordinasi pada produk dengan *backorder* parsial dikembangkan dari model EPQ klasik. Biaya total persediaan dalam model ini terdiri dari biaya total persediaan untuk produk ahir dan biaya total persediaan untuk komponen. Model persediaan ini dapat di gambarkan pada Gambar 2.1 berikut :



Gambar 2.1 Model EPQ *backorder* parsial dengan satu siklus produksi untuk produk akhir dan dua siklus produksi untuk komponen.

$$t_1 = (1 - F)T\left(1 - \frac{\beta D}{P}\right)$$

$$t_2 = (1 - F)T\,\frac{\beta D}{P}$$

$$t_3 = \frac{DTF}{P}$$

$$t_4 = FT\left(1 - \frac{D}{P}\right)$$

Gambar 2.1 menunjukkan bahwa pada interval t_1 tingkat persediaan awal bernilai 0 atau tidak melakukan produksi sehingga menyebabkan terjadinya kekosongan persediaan. Permintaan konsumen pada interval akan dipenuhi dengan cara backorder. Backorder akan mencapai maksimum pada tingkat βD , sehingga $B = \beta D t_1$. Pada awal interval t_2 proses produksi dimulai dan permintaan mulai dipenuhi, sehingga persediaan meningkat sebesar $P - \beta D$. Proses produksi dan pemenuhan permintaan berlanjut sampai akhir interval t_3, sedangkan pada interval t_4 hanya terjadi pemenuhan permintaan tanpa adanya proses produksi. Untuk komponen pendukung, terdapat dua siklus produksi dimulai pada awal interval t_2 dan berakhir pada akhir interval t_3.

2.3 Biaya Persediaan untuk Produk Akhir

Biaya total persedian untuk produk akhir terdiri dari biaya total persiapan, biaya total penyimpanan, biaya total *backorder*, dan biaya total *lost sales*.

Sehingga biaya total persediaan untuk produk akhir dapat dilihat sebagai berikut:

$$\Gamma(T,F) = \frac{C_0}{T} + \frac{C_{h'}DTF^2}{2} + \frac{\beta C_{b'}DT(1-F)^2}{2} + C_I D(1-\beta)(1-F) \quad (2.1)$$

dengan $C_{h'} = C_h(1-\frac{D}{P})$ dan $C_{b'} = C_b\left(1-\frac{\beta D}{P}\right)$.

2.4 Biaya Persediaan untuk Komponen

Biaya total untuk komponen terdiri dari biaya persiapan dan biaya penyimpanan barang. Sehingga biaya total persediaan untuk komponen dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$K(N_1,\dots,N_m,T,F) = \frac{\sum_{i=1}^{m} N_i C_{oi}}{T} + \sum_{i=1}^{m} C_{hi}\frac{TD^2[\beta+(1-\beta)F]^2(1-\frac{P}{P_i})}{2PN_i} \quad (2.2)$$

2.5 Biaya Total Persediaan Gabungan

Biaya total persediaan gabungan terdiri dari biaya total persedian untuk produk akhir dan persediaan untuk komponen. Sehingga biaya total persediaan gabungan dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\Gamma(T,F,N_1,\dots,N_m) = \frac{C_O+\sum_{i=1}^{m} N_i C_{oi}}{T} + C_h'\frac{DTF^2}{2} + \frac{TD^2[\beta+(1-\beta)F]^2}{2P}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{C_{hi}'}{N_i} + C_b'\frac{\beta DT(1-F)^2}{2} + C_1 D(1-\beta)(1-F) \quad (2.3)$$

dengan $C_{hi}' = C_{hi}(1-\frac{P}{P_i})$,

sehingga model EPQ untuk perencanaan terkoordinasi pada produk dengan *backorder* parsial dan komponennya adalah sebagai berikut

Meminimalkan $\Gamma(T,F,N_1,\dots,N_m)$

dengan $T>0, 0\le F\le 1,\quad N_1,\dots,N_m$ integer positif.

Untuk menetukan nilai *T, F*, dan N_i yang meminimalkan fungsi $\Gamma(T,F,N_1,\dots,N_m)$ diperlukan lemma-lemma berikut

Lemma 2.1 *Untuk* T *dan* F *tetap, terdapat dengan tunggal himpunan dari* N_i *yang meminimalkan Γ.*

Bukti: Dengan cara mendiferensialkan persamaan (2.3) terhadap N_i untuk setiap i dan $\frac{\partial\Gamma(T,F,N_1,\dots,N_m)}{\partial N} = 0$ menghasilkan calon peminimal

$$N_i^* = \frac{TD[\beta+(1-\beta)F]}{\sqrt{2P}}\sqrt{\frac{C'_{hi}}{C_{oi}}} \quad (2.4)$$

selanjutnya dengan menggunakan matriks Hessian untuk memperlihatkan bahwa $\{N_i^*: i=1,2,\dots,m\}$ merupakan peminimal tunggal. ■

Lemma 2.2 *Fungsi* Γ^*

$$\Gamma^*(T,F) = \frac{G_0}{T} + TR(F) + Q(F) \quad (2.5)$$

dengan R(F) dan Q(F) adalah fungsi kuadrat dan polinomial linear, masing – masing yang diberikan oleh

$$R(F) = G_1F^2 - 2G_2F + G_2$$
$$Q(F) = G_3F + G_4$$

dengan koefisien G_i*, sebagai berikut*

$$G_0 = C_0 \qquad G_1 = \frac{D(C_h^{\cdot}+\beta C_b^{\cdot})}{2} \qquad G_2 = \frac{\beta C_b^{\cdot} D}{2}$$

$$G_3 = \frac{2D(1-\beta)}{\sqrt{2P}}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{C_{hi}'C_{oi}} - C_1D(1-\beta)$$

$$G_4 = \frac{2D\beta}{\sqrt{2P}}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{C_{hi}'C_{oi}} + C_1D(1-\beta) \quad (2.6)$$

Lemma 2.3 *Fungsi biaya Γ mempunyai peminimal tunggal*

Bukti:

Untuk setiap pasangan (T,F), nilai N_i^* tunggal seperti pada Lemma 2.1, hal itu cukup menunjukkan bahwa Γ^* mempunyai peminimal tunggal. Dengan mendifferensialkan secara parsial dari Γ^* terhadap T dan $\frac{\partial\Gamma^*(T,F)}{\partial T} = 0$, untuk setiap F terdapat calon peminimal tunggal T yang diperoleh dari

$$T^* = \sqrt{\frac{G_0}{R(F)}} \quad (2.7)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.7) ke dalam persamaan (2.5) sehingga menghasilkan fungsi dari variabel tunggal F:

$$\Gamma_T^*(F) := \Gamma^*(T^*,F) = 2\sqrt{G_0R(F)} + Q(F) \quad (2.8)$$

Turunan pertama dan kedua dari $\Gamma^*(T^*,F)$ terhadap F, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \Gamma_T^*(F)}{\partial F} = \frac{\sqrt{G_0} R'(F)}{\sqrt{R(F)}} + Q'(F) \qquad (2.9)$$

dan

$$\frac{\partial \Gamma_T^{*''}(F)}{\partial^2 F} = \frac{\sqrt{G_0}[2(R''(F)R(F)-(R'(F)^2]}{2(R(F))^{3/2}} \qquad (2.10)$$

Persamaan (2.10) menunjukkan bahwa nilai $\frac{\partial \Gamma_T^{*''}(F)}{\partial^2 F}$ selalu positif untuk semua F, yang berarti $\Gamma_T^*(F)$ paling banyak mempunyai satu peminimal begitu juga dengan Γ. ■

Dari Lemma 2.3 mengakibatkan beberapa akibat, yaitu :

Akibat 2.4 *Nilai F yang meminimalkan Γ adalah 0 jika dan hanya jika*

$$G_3 - 2\sqrt{G_0 G_2} > 0 \qquad (2.11)$$

Akibat 2.5 *Jika persamaan* (2.11) *tidak terpenuhi, maka peminimal terdapat pada batas* $F = 1$ *jika dan hanya jika*

$$G_3 + 2\sqrt{G_0(G_1 - G_2)} < 0 \qquad (2.12)$$

Lemma 2.6 *Jika* (T^*, F^*) *merupakan pasangan peminimal dari persamaan* (2.4), *maka* F^* *adalah akar dari polinomial kuadrat*

$$P(F) = aF^2 + bF + c \qquad (2.13)$$

dengan koefisien

$a = G_1 G_3^2 - 4G_0 G_1^2$; $b = 8G_0 G_1 G_2 - 2G_2 G_3^2$; $c = G_2 G_3^2 - 4G_0 G_2^2$ (2.14)

dan T^* *memenuhi*

$$T^* = \frac{-G_3}{2(G_1 F - G_2)} \qquad (2.15)$$

F^* *harus dipilih sebagai akar dari Persamaan* (2.13) *yang membuat* T^* *positif.*

Bukti :

Dengan mendifferensialkan persamaan (2.5) masing-masing terhadap T dan F dan sama dengan 0. Polinomial $P(F)$ mempunyai dua akar yang akan menghasilkan $\pm|T^*|$ ketika disubstitusikan ke dalam persamaan (2.15), dan ketika T^* menjadi positif maka pemilihan akar tepat. ■

2. 6 Langkah – Langkah Menentukan Solusi Optimal

Dengan menggunakan Lemma 2.1, Lemma 2.2, Lemma 2.3, Lemma 2.4, dan Akibat 2.4 dan Akibat 2.5 diperoleh cara penyelesaiannya sebagai berikut :

1. Persamaan (2.6) digunakan untuk mencari nilai dari G_0, G_1, G_2, G_3, G_4.
2. Dari akibat 1, Jika $G_3 - 2\sqrt{G_0 G_2} > 0$, digunakan $T = \infty dan\ F = 0$. Produk tidak harus diproduksi. Jika tidak, dilanjutkan ke langkah 3.
3. Dari akibat 2, Jika $G_3 + 2\sqrt{G_0(G_1 - G_2)} < 0$, menggunakan $F = 1$ dan$T = \sqrt{\frac{2C_O}{DC_h'}}$. Produk harus diproduksi tanpa *backorder,* sehingga dilanjutkan ke langkah 7. Jika tidak dilanjutkan ke langkah 4.
4. Menggunakan persamaan (2.14) untuk menghitung nilai dari *a,b,c:*
5. Untuk menentukan dua nilai dari F digunakan rumus persamaan kuadrat
$$F_1, F_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
6. F_1, F_2 digunakan untuk menentukan dua nilai dari T
$$T = \frac{-G_3}{2(G_1 F - G_2)}$$
Kemudian dipilih F yang membuat T positif, di mana $T = T_1\ atau\ T_2$, manapun yang bernilai positif.
7. Selanjutnya menggunakan Persamaan (2.3) untuk menentukan nilai dari $N_1, N_{2,..,} N_m$.

2.7 Pembulatan solusi optimal

Nilai N_i harus integer, akan tetapi nilai yang didapatkan dari Persamaan (2.3) mungkin tidak integer. Sehingga untuk mendapatkan nilai N_i yang integer dapat menggunakan *heuristic integerization*, dengan langkah – langah sebagai berikut:

Langkah pertama: Menentukan nilai untuk T^*dan F^*, kemudian nilai T^* dan F^* yang didapat disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.3) sehingga didapatkan nilai $N_i s$.

Langkah ke dua: Memilih nilai disekitar N_i (pembulatan ke atas dan ke bawah pada nilai N_i) yang memberikan nilai minimum pada fungsi tujuan. Mengulangi langkah ke dua sampai semua komponen memiliki nilai integer. Jika N_i memiliki nilai kurang dari 1, maka nilai pembulatannya harus 1.

2.3 Simulasi Masalah

Simulasi masalah dilakukan di UD. Adi Mulya, kemudian diperoleh data $biaya\ total\ persediaan = 1050.000$, $C_O = 85.000$, $C_h = 75000$ $C_b = 100.000$, $C_I = 390.000$, $\beta = \frac{3}{4} = 0{,}75$ dan parameter lain sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Data Biaya Set up, Biaya Penyimpanan dan Rata-rata Produksi Komponen

Komponen	Biaya *Set Up*	Biaya Penyimpanan	Rata-rata Produksi
1	95000	40000	12
2	95000	40000	12
3	95000	40000	18
4	95000	40000	24
5	95000	40000	36

Dengan menggunakan model EPQ untuk perencanaan terkoordinasi pada produk dengan *backorder* parsial dan komponennya diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 2.2 Hasil Perhitungan

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	Biaya total
Solusi optimal	1,09	1,09	1,26	1,34	1,41	816392,715
N_1 terpilih	1^*	1,09	1,26	1,34	1,41	817087,5999
	2	1,09	1,26	1,34	1,41	840288,3575
N_2 terpilih	1	1^*	1,26	1,34	1,41	817582,7703
	1	2	1,26	1,34	1,41	840783,5279
N_3 terpilih	1	1	1^*	1,34	1,41	821528,5501
	1	1	2	1,34	1,41	833270,9686
N_4 terpilih	1	1	1	1^*	1,41	828118,9414
	1	1	1	2	1,41	834132,1989
N_5 terpilih	1	1	1	1	1^*	837831,439
	1	1	1	1	2	838115,536

Biaya total persediaan yang didapat dari hasil pengambilan data adalah sebesar Rp. 1050.000,- sedangkan dengan menggunakan model EPQ untuk perencanaan terkoordinasi pada produk dengan backorder parsial dan komponennya biaya total persediaan diperoleh sebesar Rp. 837831,439. Sehingga menghemat biaya persediaan sebesar Rp. 212168,561. Hal ini berarti terjadi efisiensi sebesar 20%.

3. PENUTUP

Model EPQ ini dapat digunakan perusahaan untuk mengetahui panjang siklus persediaan, frekuensi produksi, dan total biaya persediaan minimal yang harus dikeluarkan perusahaan sehingga mempermudah perusahaan dalam membuat kebijakan persediaan. Dari hasil simulasi numerik diperoleh biaya total persediaan sebesar Rp. 837831,439 dengan efisiensi sebesar 20%.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Nindya Khaerunnisa (2015), *Model EPQ Parsial Backorder dengan Mempertimbangkan Dua Biaya Backorder,* Skripsi, Jurusan Matematika Universitas Diponegoro. Semarang.

[2] Drake MJ., David W.P., dan Carl T., (2011), Using the EPQ for Coordinated Planning of A Product with Partial Backordering and its Component. *Mathematical and Computer Modelling,* 53 : 359-375.

[3] Widowati, Heri Sulistyo, Farikhin, (2012), *Kalkulus*. Semarang : UPT UNDIP Press.

[4] Koko Martono, (1999), *Kalkulus.* Jakarta : Erlangga.

[5] Arman Hakim Nasution, Yudha Prasetyawan, (2008), *Perencanaan dan Pengendalian Produksi.* Yogyakarta : Graha Ilmu.