ISSN: 2339-2541
JURNAL GAUSSIAN, Volume 5, Nomor 1, Tahun 2016, Halaman 41-50
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

ANALISIS LAPANGAN PEKERJAAN UTAMA DI JAWA TENGAH BERDASARKAN GRAFIK BIPLOT SQRT (*SQUARE ROOT BIPLOT*)

Anik Nurul Aini[1], Diah Safitri[2], Abdul Hoyyi[3]
[1]Mahasiswa Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro
[2,3]Staff Pengajar Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro
anikna@yahoo.com, diahsafitri.fifi@gmail.com, hoyyistat@gmail.com

ABSTRACT

Biplot analysis is one of the methods of descriptive statistical analysis that can present data of the n objects which p variables into a two-dimensional graph. Biplot has several types according to the scale of α used. There are three scales α which is often used in the biplot analysis, that are α = 0, α = 0,5 and α = 1. Biplot with α = 1 is called the RMP biplot (Row Matric Preserving). Biplot with α = 0 is called CMP biplot (Column Matric Preserving). While biplot with α = 0,5 called SQRT biplot (Square Root Biplot). Biplot with a scale of α = 0,5 is the best biplot to describe a data, because it make a graph between variable and object spread evenly. This study aims to create a SQRT biplot amount of population aged 15 years and over who worked according to district/city and major employment opportunities in Central Java. Biplot chart shows areas that have similar characteristics with the closest Euclidean distance. The diversity of characteristics is indicated by the length of the vector, the longest vector contained in the agricultural sector. Based on the biplot analysis in this study, it was obtained that the goodness size biplot is equal to 64,19958%.

Keywords: *Biplot, Singular Value Decomposition, Jobs, SQRT, Square Root Biplot*

1. PENDAHULUAN

Menurut Badan Pusat Statistik (2015), masalah ketenagakerjaan merupakan salah satu poin yang menjadi perhatian utama pemerintah. Kontribusi sektor lapangan kerja dalam penyerapan tenaga kerja digunakan untuk mengetahui andil setiap sektor dalam menyerap tenaga kerja. Perubahan kontribusi sektor dalam menyerap tenaga kerja dalam suatu kurun waktu tertentu memberikan gambaran perubahan struktur perekonomian daerah. Lapangan pekerjaan adalah bidang kegiatan dari usaha/perusahaan/instansi dimana seseorang bekerja atau pernah bekerja. Secara umum, lapangan pekerjaan utama di Indonesia dapat dikelompokkan menjadi sembilan kategori, yaitu: (1) pertanian, perkebunan, kehutanan, perburuan, dan perikanan; (2) pertambangan dan penggalian; (3) industri; (4) listrik, gas, dan air; (5) konstruksi; (6) perdagangan, rumah makan, dan jasa akomodasi; (7) transportasi, pergudangan, dan komunikasi; (8) lembaga keuangan, *real estate*, usaha persewaan, dan jasa perusahaan; dan (9) jasa kemasyarakatan, sosial, dan perorangan.

Menurut Nugroho (2008), biplot memiliki beberapa tipe menurut nilai α yang digunakan. Terdapat tiga nilai α yang sering digunakan dalam analisis biplot, yaitu $\alpha = 0$, $\alpha = 0{,}5$ dan $\alpha = 1$. Biplot dengan $\alpha = 1$ disebut dengan biplot RMP (*Row Matric Preserving*). Biplot dengan $\alpha = 0$ disebut dengan biplot CMP (*Column Matric Preserving*). Sedangkan Biplot dengan $\alpha = 0{,}5$ disebut dengan biplot SQRT (*Square Root Biplot*).

Biplot RMP dapat memberikan taksiran terbaik dari matriks varian dan kovarian dari data. Biplot CMP dapat menduga jarak euclid secara optimal. Namun, biplot dengan nilai $\alpha = 0{,}5$ adalah yang paling baik untuk menggambarkan suatu data (Kohler, 2005).

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Lapangan Pekerjaan

Menurut Badan Pusat Statistik (2015), lapangan pekerjaan adalah bidang kegiatan dari usaha/perusahaan/instansi dimana seseorang bekerja atau pernah bekerja meliputi 9 sektor lapangan usaha yang terdapat pada sektor produksi.

1. Sektor pertanian terdiri dari lima sub-sektor, yaitu tanaman bahan makanan, tanaman perkebunan, peternakan, kehutanan, perikanan.
2. Sektor pertambangan dan penggalian dikelompokkan menjadi tiga sub sektor yaitu Minyak dan Gas Bumi (migas), Pertambangan Tanpa Migas dan Penggalian.
3. Sektor industri pengolahan terdiri dari dua sub sektor yaitu industri migas dan industri non migas.
4. Sektor listrik, gas dan air bersih mencakup tiga sub sektor yaitu listrik, gas, dan air bersih.
5. Sektor Pembangunan mencakup semua pembangunan fisik bangunan, baik berupa gedung, jalan, jembatan, terminal, pelabuhan maupun jaringan listrik, gas, air, telepon dan sebagainya.
6. Sektor perdagangan, hotel dan restoran dibagi menjadi perdagangan besar dan eceran, hotel, dan restoran.
7. Sektor pengangkutan dan komunikasi mencakup kegiatan umum untuk barang dan penumpang, baik melalui darat, laut, sungai, danau maupun udara serta jasa penunjang angkutan dan komunikasi.
8. Sektor keuangan, persewaan dan jasa perusahaan, meliputi bank, lembaga keuangan non bank, jasa penunjang keuangan, sewa bangunan, dan jasa perusahaan.
9. Sektor jasa-jasa mencakup jasa pemerintahan umum serta jasa yang dikelola oleh pihak swasta.

2.2. Matriks dan Vektor

Menurut Anthony dan Harvey (2012), matriks adalah susunan berbentuk segi empat atau persegi panjang dari bilangan-bilangan atau simbol-simbol. Matriks tersebut dapat didefinisikan dengan sebuah huruf, contohnya:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & \cdots & j_{1n} \\ j_{21} & j_{22} & \cdots & j_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{m1} & j_{m2} & \cdots & j_{mn} \end{pmatrix}$$

Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011), vektor adalah sebuah matriks dengan kolom atau baris tunggal. Sebuah himpunan vektor berukuran $(n \times 1)$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang mempunyai sifat normal ($\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = 1$) dan saling *orthogonal* dikatakan menjadi himpunan vektor *orthonormal*. Dua buah vektor, $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ yang berukuran $(n \times 1)$, dikatakan *orthogonal* satu sama lain jika $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = 0$. Jika matriks $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ merupakan vektor yang dinormalkan yaitu $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} = 1$ maka keduanya dikatakan *orthonormal*. Sebuah matriks $\boldsymbol{J}$ yang berukuran $(n \times n)$ dikatakan *orthogonal* jika $\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T = \boldsymbol{I}_n$, hal ini cukup setara dengan mengatakan bahwa baris atau kolom pada matriks $\boldsymbol{J}$ bersifat *orthonormal*.

2.3. Eigen dan Vektor Eigen

Menurut Anthony dan Harvey (2012), pada suatu matriks bujursangkar $\boldsymbol{J}$, sebuah skalar λ merupakan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{J}$. Jika pada suatu vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ didapat $\boldsymbol{Jx} = \boldsymbol{\lambda x}$ maka $\boldsymbol{x}$ tersebut merupakan vektor eigen.

Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011), jika $\boldsymbol{J}$ bersifat simetrik ($\boldsymbol{J}^T = \boldsymbol{J}$), maka vektor eigen yang berpasangan dengan nilai eigen yang berbeda bersifat *orthonormal*.

Leon (2010), menyebutkan bahwa persamaan $\boldsymbol{Jx} = \lambda\boldsymbol{x}$ dapat juga dituliskan dalam bentuk $(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Skalar λ merupakan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{J}$ jika $det(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$.

2.4. *Singular Value Decomposition* (SVD)

Menurut Baker (2013), *Singular Value Decomposition* (SVD) merupakan suatu metode aljabar linier yang memecah sebuah matriks $\boldsymbol{X}$ berukuran *(n* x *p)* menjadi tiga buah matriks, yaitu sebuah matriks *orthogonal* $\boldsymbol{U}$ berukuran *(n* x *r)*, sebuah matriks diagonal $\boldsymbol{L}$ berukuran *(r* x *r)*, dan sebuah transpose matriks *orthogonal* $\boldsymbol{A}$ berukuran *(r* x *p)*. sehingga matriks $\boldsymbol{X}$ tersebut dapat diuraikan menjadi:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}^T$$

Dimana $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$ dan $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$. Matriks $\boldsymbol{U}$ adalah matriks *orthonormal* yang berisi vektor eigen dari $\boldsymbol{XX}^T$. Matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks *orthonormal* yang berisi vektor eigen dari $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$. Matriks $\boldsymbol{L}$ adalah matriks diagonal yang mengandung akar kuadrat dari nilai eigen matriks $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$.

2.5. Analisis Biplot

Menurut Jolliffe (2010), analisis biplot merupakan salah satu metode analisis statistika deskriptif yang dapat menyajikan data dari *n* buah objek dengan *p* buah variabel ke dalam suatu grafik yang berdimensi dua. Dari grafik tersebut kemudian dapat dianalisis ciri-ciri objek dan variabel serta posisi relatif objek-objek tersebut terhadap variabel-variabelnya.

Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011), terdapat empat informasi penting yang dapat diketahui dari analisis biplot, antara lain:

1. Hubungan (korelasi) antar variabel
   Pada grafik dalam metode biplot, variabel-variabel yang analisis digambarkan sebagai suatu garis. Dua buah variabel dikatakan berkorelasi positif jika digambarkan oleh dua garis dengan arah yang sama serta sudut yang sempit. Apabila dua buah variabel mempunyai korelasi negatif maka digambarkan dengan dua buah garis yang arahnya berlawanan dan membentuk sudut yang lebar. Dua buah variabel yang tidak mempunyai korelasi digambarkan dengan dua garis yang membentuk sudut siku-siku (90^0). Hubungan antar variabel juga dapat digambarkan melalui matriks korelasi yang diperoleh dari hasil cosinus sudut yang dibentuk oleh antar garis vektor pada grafik biplot. Variabel yang mempunyai korelasi tinggi menunjukkan bahwa hubungan variabel tersebut kuat.
2. Keragaman variabel
   Keragaman variabel dapat menunjukkan adanya variabel yang memiliki nilai hampir sama pada setiap objek, dapat berupa nilai yang besar maupun sangat kecil. Dengan informasi ini, dapat diperkirakan variabel mana yang perlu ditingkatkan ataupun sebaliknya. Dalam biplot, variabel yang mempunyai keragaman kecil digambarkan sebagai vektor yang pendek, sedangkan variabel dengan keragaman besar digambarkan dengan vektor yang panjang.
3. Kedekatan antar objek
   Kedekatan antar objek menunjukkan bahwa suatu objek memiliki kemiripan karakteristik dengan objek tertentu. Objek-objek tersebut digambarkan sebagai titik-titik yang berdekatan.
4. Nilai variabel pada sebuah objek
   Informasi ini digunakan untuk melihat keunggulan dari setiap objek pada variabel tertentu. Objek yang terletak searah dengan arah variabel yang digambarkan sebagai sebuah garis menunjukkan bahwa objek tersebut mempunyai nilai di atas rata-rata,

sebaliknya objek tersebut berlawanan arah dengan variabel maka menunjukkan bahwa objek tersebut memiliki nilai dekat dengan rata-rata.

Menurut Jolliffe (2010), analisis biplot didasarkan pada *Singular Value Decomposition* (SVD) yaitu penguraian nilai singular suatu matriks. SVD merupakan suatu pemfaktoran matriks dengan menguraikan suatu matriks $\boldsymbol{X}$ berukuran (n x p), dimana n adalah banyaknya objek pengamatan dan p adalah banyaknya variabel.

Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011), biplot dapat dibangun dari suatu matriks data, dengan masung-masing kolom mewakili suatu variabel dan masing-masing baris mewakili objek penelitian. Suatu matriks $\boldsymbol{X}$ yang berukuran (n x p) yaitu memuat sebanyak p variabel dan n objek penelitian yang telah dikoreksi terhadap nilai rata-ratanya dan mempunyai *rank* sebanyak r, dapat diuraikan menjadi:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}^{T}$$

$$\boldsymbol{X}_{(nxp)}=\boldsymbol{U}_{(nxr)}\boldsymbol{L}_{(rxr)}\boldsymbol{A}_{(pxr)}{}^{T}$$

Matriks $\boldsymbol{U}$ merupakan matriks berukuran (n x r), matriks $\boldsymbol{A}$ merupakan matriks berukuran (p x r), dan matriks $\boldsymbol{L}$ berukuran (r x r). Unsur-unsur diagonal matriks $\boldsymbol{L}$ disebut sebagai nilai singular matriks $\boldsymbol{X}$ yang merupakan akar dari nilai eigen-eigen $\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X}$. Kolom-kolom matriks $\boldsymbol{A}$ adalah vektor eigen dari $\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X}$. Kolom untuk matriks $\boldsymbol{U}$ diperoleh dari $\boldsymbol{u_j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a_j}$, j = 1, 2, …, r dengan $\boldsymbol{u_j}$ adalah kolom matriks $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{a_j}$ adalah kolom matriks $\boldsymbol{A}$ dan λ_j adalah nilai eigen ke-i (Mattjik dan Sumertajaya, 2011).

Menurut Jolliffe (2010), penyajian biplot menggambarkan baris $\mathbf{G}$ dan kolom $\mathbf{H}$, sehingga $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{1-\alpha}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$, dengan:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \vdots & \vdots \\ g_{i1} & g_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} \end{bmatrix} \text{dan } \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \vdots & \vdots \\ h_{i1} & h_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} \end{bmatrix}$$

Matriks $\boldsymbol{G}$ menggambarkan titik-titik koordinat dari n objek dan matrik $\boldsymbol{H}$ menggambarkan titik-titik koordinat dari p variabel. Maka matriks $\boldsymbol{X}$ dapat didefinisikan menjadi:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{1-\alpha}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}$$

Nilai α yang digunakan dalam membuat biplot dapat merupakan nilai sembarang pada interval 0 sampai 1, tetapi pengambilan nilai ekstrim $\alpha = 0$ dan α = 1 akan berguna untuk mempermudah interpretasi hasil biplot.

Menurut Kohler (2005), terdapat tiga nilai α yang sering digunakan dalam analisis biplot, yaitu $\alpha = 0$, $\alpha = 0{,}5$ dan $\alpha = 1$.

1) Nilai $\alpha = 0$. Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011), dengan $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{1-\alpha}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ maka ketika $\alpha = 0$, nilai $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{L}$, sehingga dari persamaan $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ diperoleh hubungan:

   $$\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{T})^{T}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{T})$$
   $$\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{G}^{T}\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{T}$$
   $$\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{U}^{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}^{T}$$
   $$\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{T}$$

   Diagonal utama pada matriks $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}}$, $h_{11}^2 + h_{21}^2$, …, $h_{j1}^2 + h_{j2}^2$, …, $h_{p1}^2 + h_{p1}^2$ menggambarkan variansi dari variabel, sedangkan $h_{j1}^2 + h_{j2}^2$, j = 1, 2, …, p menyatakan panjang vektor variabel. Sehingga dapat disimpulkan bahwa panjang vektor variabel sebanding dengan variansi variabel.

2) Nilai $\alpha = 0{,}5$, dengan $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{UL}^{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{1-\alpha}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ maka ketika $\alpha = 0{,}5$, nilai $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{UL}^{0,5}$ dan $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{AL}^{0,5}$. Menurut Kohler (2005), biplot jenis ini cenderung memberikan visualisasi koordinat variabel mendekati atau hampir menyamai koordinat dari objek atau pengamatan.
3) Nilai $\alpha = 1$. Menurut Mattjik dan Sumertajaya (2011), dengan $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{UL}^{\boldsymbol{\alpha}}$ dan $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{1-\alpha}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ maka ketika $\alpha = 1$, nilai $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{UL}$ dan $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}$, sehingga dari persamaan $\boldsymbol{X = U\,L\,A^T}$ diperoleh hubungan:

$$XX^T = (GH^T)\,(GH^T)^T$$
$$XX^T = GH^THG^T$$
$$XX^T = GA^TAG^T$$
$$XX^T = GG^T$$

Jolliffe (2010), menyebutkan bahwa ukuran pendekatan matriks $\boldsymbol{X}$ dengan biplot yang diberikan oleh Gabriel dirumuskan dalam bentuk $\rho^2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sum_{k=1}^{r}\lambda_k}$, dengan λ_1 adalah nilai eigen terbesar pertama, λ_2 adalah nilai eigen lamda terbesar kedua dan λ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ adalah nilai eigen ke-k. apabila nilai ρ^2 mendekati satu, maka biplot memberikan penyajian yang semakin baik mengenai informasi dari data yang sebenarnya.

3. METODE PENELITIAN

3.1.Data

Data yang digunakan dalam penulisan Tugas Akhir ini adalah data sekunder, yaitu data yang diperoleh dari buku Jawa Tengah dalam Angka tahun 2014 yang diterbitkan oleh Badan Pusat Statistik (BPS). Data berupa banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut kabupaten/kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah pada tahun 2013. Variabel yang digunakan adalah delapan lapangan pekerjaan utama meliputi: pertanian; pertambangan dan galian, listrik gas dan air bersih; industri; konstruksi; perdagangan; transportasi; keuangan; dan jasa. Objek yang diamati dalam Tugas Akhir ini yaitu 35 kabupaten dan kota di Jawa Tengah.

3.2.Metode Analisis

Tahapan analisis data adalah sebagai berikut:

1. Memasukkan data banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut kabupaten/kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah.
2. Menyusun matriks $\boldsymbol{X}$ dari data sehingga berukuran $(n \times p)$ yang diperoleh dari hasil transformasi matriks $\boldsymbol{X^*}$ (matriks data asal) dengan cara mengurangi nilai data matriks tersebut dengan rata-ratanya.
3. Menghitung matriks $\boldsymbol{X^TX}$.
4. Menghitung nilai eigen dan vektor eigen, kemudian nilai eigen tersebut diurutkan dari yang terbesar.
5. Membuat matriks $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{A}$, dan $\boldsymbol{U}$ dari matriks $\boldsymbol{X}$ dengan menggunakan metode *Singular Value Decomposition* (SVD).
6. Membuat matriks $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{UL}^{\alpha}$ serta $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{L}^{1-\alpha}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ dengan $\alpha = 0{,}5$.
7. Mengambil dua kolom pertama dari masing-masing matriks $\boldsymbol{G}$ dan $\boldsymbol{H}$ sehingga menjadi matriks ***G2*** dan ***H2***.
8. Membuat grafik biplot SQRT dari matriks ***G2*** dan ***H2***. Setiap baris dari matriks ***G2*** merupakan koordinat (x,y) untuk masing-masing objek dan setiap baris dari matriks ***H2*** merupakan koordinat (x,y) untuk setiap variabel.
9. Melakukan interpretasi terhadap output dan menghitung kebaikan biplot SQRT dalam menjelaskan keragaman data.dan penduga tidak langsung.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Gambaran deskripsi mengenai data banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut kabupaten/kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah pada tahun 2013 dapat dilihat melalui Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Deskripsi Data

Variabel	Rata-rata	Standar Deviasi	Minimum	Maximum
Pertanian	140761	90701	1069	353086
Pertambangan Listrik, Gas dan Air Bersih	2502	2024	169	8675
Industri	86984	56400	10419	241359
Kontruksi	27159	14134	1440	59689
Perdagangan	102446	53833	23442	278668
Transportasi	17253	10939	3357	51988
Keuangan	14245	24387	2075	120081
Jasa	64330	31548	14785	171996

Matriks data $\boldsymbol{X}$ yang digunakan adalah matriks data banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut kabupaten/kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah pada tahun 2013, yang telah distandarkan, yaitu:

Selanjutnya untuk melakukan penguraian nilai singular matriks $\boldsymbol{X}$ yang berukuran (35x8) dengan menggunakan *Singular Value Decomposition* (SVD) sehingga diperoleh tiga buah mariks, yaitu matriks $\boldsymbol{U}$ yang berukuran (35x8), matriks $\boldsymbol{L}$ berukuran (8x8), dan matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran (8x8), terlebih dahulu menghitung nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{X^TX}$ yaitu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 128{,}9119, & \lambda_5 &= 16{,}2355 \\ \lambda_2 &= 45{,}5160, & \lambda_6 &= 9{,}7557 \\ \lambda_3 &= 35{,}3339, & \lambda_7 &= 5{,}8040 \\ \lambda_4 &= 28{,}2500, & \lambda_8 &= 2{,}1930 \end{aligned}$$

Matriks A berukuran (8x8) yang diperoleh dari perhitungan vektor eigen matriks $\boldsymbol{X^TX}$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -0{,}2142 & -0{,}6424 & 0{,}0272 & 0{,}4464 & -0{,}3083 & 0{,}4201 & -0{,}2512 & 0{,}0824 \\ -0{,}2652 & -0{,}3450 & -0{,}6082 & 0{,}1768 & 0{,}5277 & -0{,}2832 & 0{,}2031 & -0{,}0980 \\ -0{,}2420 & 0{,}4034 & -0{,}6617 & -0{,}0832 & -0{,}3702 & 0{,}0827 & -0{,}4312 & 0{,}0646 \\ -0{,}4386 & 0{,}0684 & 0{,}0759 & 0{,}1611 & -0{,}5427 & -0{,}3713 & 0{,}5728 & 0{,}1040 \\ -0{,}4798 & 0{,}1381 & 0{,}1972 & -0{,}0626 & 0{,}0748 & 0{,}2118 & -0{,}0372 & -0{,}8100 \\ -0{,}4291 & -0{,}0954 & 0{,}3532 & -0{,}1295 & 0{,}1541 & -0{,}5193 & -0{,}5614 & 0{,}2381 \\ -0{,}3296 & -0{,}2370 & -0{,}0360 & -0{,}7395 & 0{,}0543 & 0{,}3778 & 0{,}2313 & 0{,}2963 \\ -0{,}3316 & 0{,}4653 & 0{,}1447 & 0{,}4111 & 0{,}4033 & 0{,}3761 & 0{,}1072 & 0{,}4099 \end{bmatrix}$$

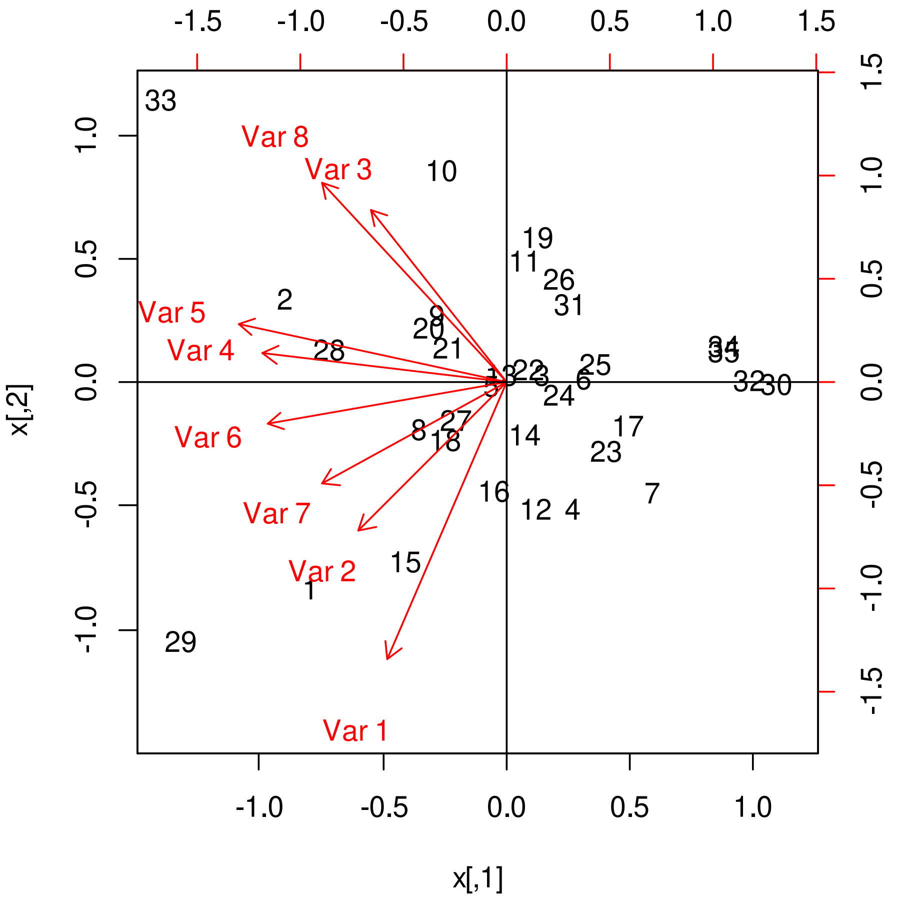
Matriks $\boldsymbol{L}$ berukuran (8x8) yang diperoleh dari akar masing-masing nilai eigen matriks $\boldsymbol{X^TX}$, yaitu:

$$\begin{pmatrix} 11{,}3539 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}7466 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}9442 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5{,}3151 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}0293 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}1234 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}4092 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}4809 \end{pmatrix}$$

Matriks $\boldsymbol{U}$ yang berukuran (35x8) adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -0{,}2376 & -0{,}3178 & -0{,}2380 & -0{,}6107 & -0{,}2173 & 0{,}2702 & 0{,}1444 & 0{,}3174 \\ -0{,}2679 & 0{,}1348 & 0{,}0142 & 0{,}0711 & 0{,}0758 & -0{,}1476 & -0{,}2472 & -0{,}0780 \\ 0{,}0426 & 0{,}0165 & -0{,}3101 & 0{,}0595 & 0{,}0637 & -0{,}0634 & -0{,}0530 & 0{,}1354 \\ 0{,}0791 & -0{,}1928 & -0{,}0634 & 0{,}0889 & 0{,}0537 & 0{,}1365 & -0{,}0501 & -0{,}1771 \\ -0{,}0187 & -0{,}0017 & -0{,}2360 & 0{,}0817 & -0{,}3015 & 0{,}0056 & -0{,}1779 & -0{,}0267 \\ 0{,}0915 & 0{,}0101 & 0{,}1721 & 0{,}0278 & 0{,}1459 & 0{,}0352 & -0{,}1820 & 0{,}1745 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0{,}2604 & 0{,}0533 & 0{,}1243 & -0{,}1457 & 0{,}1236 & -0{,}0495 & 0{,}1053 & -0{,}0259 \end{bmatrix}$$

Grafik biplot yang diperoleh berdasarkan data banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut kabupaten/kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah pada tahun 2013 adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Grafik Biplot SQRT untuk Data Banyaknya Penduduk Berusia 15 Tahun ke Atas yang Bekerja Menurut kabupaten/kota dan Lapangan Pekerjaan Utama di Jawa Tengah Pada Tahun 2013

Berdasarkan grafik biplot SQRT untuk data banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut kabupaten/kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah pada tahun 2013 dapat diperoleh beberapa informasi, antara lain:

1. Hubungan antar variabel

   Grafik Biplot SQRT memperlihatkan bahwa garis 3 dan 1 membentuk sudut yang lebar (lebih dari 90^0), menunjukkan bahwa variabel pertambangan dan petanian mempunyai korelasi negatif.

Tabel 2. Sudut antara Dua Variabel (dalam Derajat)

Variabel	Pertanian	Pertambangan Listrik, Gas dan Air Bersih	Industri	Konstruksi	Perdagangan	Transportasi	Keuangan	Jasa
Pertanian	0							
Pertambangan Listrik, Gas dan Air Bersih	63,96	0						
Industri	96,72	53,86	0					
Konstruksi	68,28	54,77	65,10	0				
Perdagangan	74,63	54,90	67,98	39,91	0			
Transportasi	70,61	54,85	83,63	47,39	36,20	0		
Keuangan	77,00	53,94	76,47	66,73	53,49	55,74	0	
Jasa	89,48	56,56	68,96	58,06	44,52	62,68	85,87	0

Besar sudut yang dibentuk antar garis tersebut dapat dilihat pada Tabel 2. Dari Tabel 2 diperoleh bahwa antara sektor industri dan sektor pertanian memiliki sudut sebesar $96{,}72^0$ (lebih dari 90^0) menunjukkan bahwa antara sektor industri dan sektor pertanian memiliki korelasi yang negatif. Berikut adalah Tabel 3 yang berisi matriks korelasi antar variabel.

Tabel 3. Koefisien Korelasi antar Variabel

Variabel	Pertanian	Pertambangan Listrik, Gas dan Air Bersih	Industri	Konstruksi	Perdagangan	Transportasi	Keuangan	Jasa
Pertanian	1							
Pertambangan Listrik, Gas dan Air Bersih	0,439	1						
Industri	-0,117	0,348	1					
Konstruksi	0,370	0,298	0,421	1				
Perdagangan	0,265	0,290	0,375	0,767	1			
Transportasi	0,332	0,293	0,111	0,677	0,807	1		
Keuangan	0,225	0,344	0,234	0,395	0,595	0,563	1	
Jasa	0,009	0,160	0,359	0,529	0,713	0,459	0,072	1

Dari Tabel 3, nilai korelasi antar variabel terlihat bahwa variabel yang mempunyai hubungan paling kuat yaitu variabel perdagangan dan transportasi yaitu sebesar 0,807 dengan sudut antar vektornya yaitu sebesar $36{,}20^0$. Variabel yang mempunyai hubungan paling kecil yaitu antara variabel pertanian dan jasa yaitu sebesar 0,009 dan memiliki sudut sebesar $89{,}48^0$.

2. Keragaman variabel
   Pada grafik biplot SQRT yang diperoleh terlihat bahwa variabel 1 merupakan vektor yang paling panjang dibanding vektor yang lain, menunjukkan bahwa sektor pertanian paling beragam dibanding sektor yang lainnya. Berikut adalah Tabel 4 yang berisi variansi atau keragaman variabel:

Tabel 4. Varian Setiap Variabel

Variabel	Varian
Pertanian	8.226.740.359
Pertambangan	4.098.256
Industri	3.180.926.575
Kontruksi	199.774.000
Perdagangan	2.897.998.295
Transportasi	119.662.785
Keuangan	594.739.147
Jasa	995.287.069

   Berdasarkan Tabel 4 terlihat bahwa sektor pertanian yang paling beragam kemudian sektor industri dan perdagangan. Sektor pertambangan adalah sektor yang keragamannya paling kecil.

3. Kedekatan antar objek
   Kedekatan antar objek pada grafik biplot SQRT menunjukkan adanya kemiripan antar objek yaitu 35 kabupaten di Jawa Tengah. Untuk lebih jelasnya mengetahui kedekatan objek dapat dilihat pada Lampiran 7 yang berisi tabel jarak euclid antar objek.
   Dari grafik biplot SQRT terlihat bahwa Kota Surakarta, Kab. Karanganyar, Kab. Boyolali, Kab. Sukoharjo saling berdekatan, menunjukkan bahwa kota-kota tersebut memiliki kemiripan. Selain itu, dari grafik tersebut terlihat bahwa Kab. Banyumas, Kab. Banjarnegara dan Kab. Magelang memiliki jarak yang jauh dari kabupaten dan kota yang lainnya, menunjukkan bahwa ketiga kabupaten tersebut berbeda dari kabupaten dan kota yang lainnya.

4. Nilai variabel pada sebuah objek
   Dari grafik biplot SQRT terlihat bahwa titik Kab. Banjarnegara searah dengan variabel perdagangan, menunjukkan bahwa banyaknya penduduk Banjarnegara yang bekerja di sektor perdagangan di atas rata-rata. Penduduk Kab. Grobogan lebih banyak bekerja di sektor konstruksi dan perdagangan, sedangkan yang paling banyak bekerja di sektor pertanian adalah Kab. Rembang.

Ukuran kebaikan biplot SQRT untuk data banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut kabupaten/kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah pada tahun 2013 adalah 64,1129%, menunjukkan bahwa grafik biplot SQRT tersebut mampu menerangkan data sebanyak 64,1129% keseluruhan data yang sebenarnya.

5. KESIMPULAN

Penduduk di Jawa Tengah paling banyak bekerja di sektor pertanian, yaitu dengan rata-rata banyaknya penduduk yang bekerja adalah sebanyak 140761. Variabel yang mempunyai hubungan paling kuat yaitu variabel perdagangan dan transportasi yaitu sebesar 0,807 dengan sudut antar vektornya yaitu sebesar $36{,}20^0$. Variabel yang mempunyai hubungan paling kecil yaitu antara variabel pertanian dan jasa yaitu sebesar 0,009 dan memiliki sudut sebesar $89,48^0$. Sektor yang keragamannya paling kecil adalah sektor pertambangan.

Ukuran kebaikan biplot SQRT data banyaknya penduduk berusia 15 tahun ke atas yang bekerja menurut Kabupaten/Kota dan lapangan pekerjaan utama di Jawa Tengah pada tahun 2013 adalah sebanyak 64,1279% menunjukkan bahwa grafik tersebut mampu menerangkan data sebanyak 64,1279% dari keseluruhan data yang sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anthony, M. dan Harvey, M. 2012. *Linear Algebra*. New York: Cambridge University Press.

Badan Pusat Statistik. 2014. *Jawa Tengah dalam Angka Tahun 2014*. Semarang: Badan Pusat Statistik.

Badan Pusat Statistik. 2015. *Profil Ketenagakerjaan Jawa Tengah: Hasil Sakernas Agustus 2014*. Semarang: Badan Pusat Statistik.

Baker, K. 2013. *Singular Value Decomposition Tutorial*.

Jolliffe, I. T. 2010 *Principal Component Analysis, Second Edition*. New York: Springer.

Kohler, U. 2005. *Data Inspection Using Biplot*. The Stata Journal Vol. 5(2): 208-223.

Leon J. S., 2010. *Linear Algebra with Aplications: Eight Edition*. Dartmouth: University of Massachusetts.

Mattjik, A. A. dan Sumertajaya, I. M. 2011. *Sidik Peubah Ganda Dengan menggunakan SAS*. Bogor: IPB PRESS.

Nugroho, S. 2008. *Statistika Multivariat Terapan*. Bengkulu: UNIB Press.