JURNAL GAUSSIAN, Volume 1, Nomor 1, Tahun 2012, Halaman 249-258
Online di: http://ejournal-s1.undip.ac.id/index.php/gaussian

ANALISIS DATA RUNTUN WAKTU MENGGUNAKAN METODE WAVELET THRESHOLDING

Yudi Ari Wibowo[1], Suparti[2] dan Tarno[3]
[1]Mahasiswa Jurusan Statistika FSM UNDIP
[2,3] Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM UNDIP

ABSTRACT

Latterly, wavelet is used in various application of statistics. Wavelet is a method without parameter which used in signal analysis, data compression, and time series analysis. Wavelet thresholding is a method which reconstructing the largest number of wavelet coefficients. Only the coefficients are greater than a specified value which taken and the rest coefficients are ignored, because considered null. Certain value is called the *threshold* value. The level of smoothness estimation are determined by some factor such as wavelet functions, the type of thresholding functions, level of resolutions and *threshold* parameters. But most dominant factor is *threshold* parameter. Because that was required to select the optimal *threshold* value. At the simulation study was analyzing of the stasioner, nonstasioner and nonlinier data. Wavelet thresholding method gives the value of Mean Square Error (MSE) which is smaller than the ARIMA. Wavelet thresholding is considered quite so well in the analysis of time series data.

Key Words : ARIMA, Wavelet Thresholding.

1. PENDAHULUAN

Wavelet diperkenalkan sepanjang tahun 1980-an hingga awal tahun 1990-an yang awalnya wavelet populer sebagai literatur untuk analisis gelombang. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, wavelet berkembang di berbagai cabang ilmu statistika seperti analisis ketahanan hidup (analisis survival), analisis runtun waktu, analisis regresi, dan stabilisasi variansi (Nason, 2008).

Wavelet Thresholding adalah suatu metode yang menekankan rekonstruksi wavelet dengan menggunakan sejumlah koefisien terbesar, yakni hanya koefisien yang lebih besar dari suatu nilai tertentu yang diambil, sedangkan koefisien selebihnya diabaikan, karena dianggap nol. Nilai tertentu tersebut dinamakan nilai *threshold* (nilai ambang). Tingkat kemulusan estimator ditentukan oleh pemilihan fungsi wavelet, jenis fungsi thresholding, level resolusi dan parameter *threshold*. Kriteria paling dominan ditentukan oleh parameter *threshold* yang optimal (Odgen, 1997). Metode Wavelet Thresholding merupakan suatu alternatif dalam analisis data runtun waktu karena dianggap mampu menghasilkan estimasi yang mulus dengan mereduksi *noise* (gangguan). Metode Wavelet Thresholding dapat diterapkan pada data runtun waktu stasioner, nonstasioner dan nonlinier.

Dalam makalah ini akan dibahas metode Wavelet Thresholding untuk menganalisis data runtun waktu. Estimasi dengan metode Wavelet Thresholding menggunakan fungsi *Soft* dan *Hardthresholding*. Parameter *threshold* optimal yang digunakan yaitu *Universal*, *Minimax* dan *Adaptive threshold threshold*.

2. Analisis Runtun Waktu Parametrik

Analisis runtun waktu merupakan analisis sekumpulan data dalam suatu periode waktu yang lampau yang berguna untuk mengetahui atau meramalkan kondisi masa mendatang (Soejoeti,1987).

Model ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) dengan tiga parameter, (p,d,q) dinotasikan sebagai ARIMA (p,d,q). Apabila d=0 dan q=0, maka model *autoregressive* dinotasikan sebagai AR (p). Apabila p=0 dan d= 0, maka model *moving average* dinotasikan sebagai MA (q). Bentuk umum model ARIMA dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B) + \varepsilon_t$$

operator AR(p) adalah

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$$

dan operator MA(q) adalah

$$Z_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2+\ldots+} \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Parameter d menunjukkan bahwa proses tidak stasioner. Jadi, apabila d=0, maka proses telah stasioner.

2.1 Asumsi dalam Analisis Runtun Waktu Parametrik

1. Residual Mengikuti Proses *White noise* Proses *white noise* merupakan proses stasioner, residual $\varepsilon_t \sim NID\ (0\ , \sigma_\varepsilon^2)$ artinya residual independen berdistribusi normal dengan mean 0 dan varian konstan (Soejoeti, 1987).
2. Linieritas parameter. Jika data menunjukkan kecenderungan nonlinear maka diperlukan estimasi pembentukan model nonlinear yang sesuai dan diharapkan mempunyai keakuratan prediksi yang lebih tinggi (Warsito dan Ispriyanti, 2004).

2.2 Pemodelan Analisis Runtun Waktu Parametrik

Analisis data dengan ARIMA dilakukan dengan beberapa tahap yaitu :

1. Identifikasi Model yaitu pendugaan model runtun waktu berdasarkan plot PACF dan ACF dari data yang sudah stasioner
2. Estimasi parameter model ARIMA
3. Verifikasi model ARIMA dan Uji diagnosis untuk residual mengikuti proses *white noise* atau tidak (Soejoeti, 1987).

2.3 Fungsi Wavelet

Wavelet adalah sebuah nama untuk gelombang kecil yang naik dan turun pada periode waktu tertentu. Sedangkan sebagai pembandingnya adalah gelombang yang besar, contohnya adalah gelombang fungsi sinusoidal (Percival dan Walden, 2000). Fungsi wavelet dibedakan atas dua jenis, yaitu wavelet ayah (ϕ) dan wavelet ibu (ψ) yang mempunyai sifat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$$

Dengan dilatasi diadik dan translasi integer, wavelet ayah dan wavelet ibu melahirkan keluarga wavelet yaitu:

$$\phi_{j,k}(x) = (p2^{j})^{-1/2}\phi(p2^{-j}x - k) \text{ dan } \psi_{j,k}(x) = (p2^{-j})^{1/2}\psi(p2^{-j}x - k)$$

Jenis keluarga wavelet orthogonal diantaranya *Haar, Daubechies, Coiflets, Symlets, Discrete Meyer*, dan *Morlet* (Percival dan Walden, 2000).

2.4 Transformasi Wavelet Diskrit

Tranformasi Wavelet Diskrit (DWT) memiliki sifat transformasi ortonormal linear. DWT dari sebuah deret waktu **X**, dengan panjang N=2^J, dengan pembentukan **W** dari koefisien DWT per-level, dari perkalian matriks filter atas **X** sebagai berikut :

$$\mathcal{W}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{W}_J \\ \mathcal{V}_J \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1\mathbf{X} \\ \mathcal{W}_2\mathbf{X} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{W}_J\mathbf{X} \\ \mathcal{V}_J\mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W_1} \\ \mathbf{W_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{W}_J \\ \mathbf{V}_J \end{bmatrix} = \mathbf{W}$$

Dengan **X** adalah data runtun waktu, adalah matrik filter NxN dari keluarga wavelet dan **W** adalah matrik koefesien DWT (level 1,2,….,*J*) (Percival dan Walden, 2000).

2.5 Filter Wavelet dan Skala

Jika fungsi skala $\phi(t)$ atau *father wavelet* yang mengalami kontraksi (peregangan) dan pergeseran, yang dinotasikan dengan $\phi(t) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^{L-1} g_l\phi(2t - l)$, $\phi(2t - l)$ adalah fungsi skala $\phi(t)$ yang mengalami pergeseran sepanjang sumbu waktu dengan langkah l dengan koefisien filter skala g_l dan fungsi wavelet ibu $\psi(t)$ didefenisikan sebagai $\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^{L-1}(-1)^l h_l\psi(2t - l)$, begitu juga fungsi wavelet $\psi(t)$ mengalami pergeseran sepanjang sumbu waktu dengan langkah l dengan koefisien filter skala h_l. Filter wavelet seharusnya memenuhi tiga kondisi dasar beriku:

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = 1$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2n} = 0$$

dan filter skala memenuhi tiga kondisi dasar berikut:

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l = \sqrt{2}$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = 1$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l g_{l+2m} = 0, m \neq 0$$

(Percival dan Walden, 2000)

2.6 Filter Daubechies Wavelet

Wavelet Daubechies merupakan salah satu dari Keluarga Wavelet ortogonal. *Wavelet Daubechies* ini diambil dari nama belakang penemunya yaitu Ingrid Daubechies.

Pada makalah ini digunakan Daubechies 4 disingkat $D(4)$ yaitu dengan panjang bandwidth L=4, berdasarkan syarat yang harus dipenuhi maka koefesien filter skala dan waveletnya adalah:

$g_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, g_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, g_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, g_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.

Sedangkan untuk koefisien filter wavelet berikut:

$h_0=\frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{-3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.

(Percival dan Walden, 2000)

2.7 Algoritma Piramida

Untuk menghitung koefisien wavelet diskrit $\{W_{j,l} = W_{1,l}, W_{2,l}, \ldots, W_{J0,l}, V_{J0,l}\}$, digunakan "algoritma pyramida" dari Mallat (1989). Berikut langkah-langkah algoritma piramida untuk Transformasi Wavelet Diskrit (DWT) yang menghasilkan output koefisien wavelet dan skala disetiap levelnya :

1. Algoritma Piramida Level ke-1

jika $\mathcal{P}_1$ adalah matrik filter wavelet dan skala level pertama, dikalikan data X maka

$$\mathcal{P}_1\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathcal{W}_1\\ \mathcal{V}_1\end{bmatrix}\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathcal{W}_1\mathbf{X}\\ \mathcal{V}_1\mathbf{X}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{W_1}\\ \mathbf{V_1}\end{bmatrix}$$

Karena $\mathcal{P}_1$ matriks ortonormal, maka membentuk **X** dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\mathbf{X} = \mathcal{P}_1^T\begin{bmatrix}\mathbf{W_1}\\ \mathbf{V_1}\end{bmatrix} = [\mathcal{W}_1^T\mathcal{V}_1^T]\begin{bmatrix}\mathbf{W_1}\\ \mathbf{V_1}\end{bmatrix} = \mathcal{W}_1^T\mathbf{W_1} + \mathcal{V}_1^T\mathbf{V_1}$$

$D_1 = \mathcal{W}_1^T\mathbf{W_1}$ disebut nilai detail level pertama dan $S_1 = \mathcal{V}_1^T\mathbf{V_1}$ disebut nilai aproksimasi atau pemulusan level pertama, sehingga X=D_1+S_1.

2. Algoritma Piramida Level ke-2

Algoritma piramid level ke-2 perolehan nilai koefisien serupa dengan penjabaran koefisien wavelet dan skala di level ke-1, namun untuk level ke-2, proses filterisasi dilakukan terhadap nilai $\{\mathbf{V}_{1,l}\}$, untuk menghasilkan dua deret baru, yaitu $\{W_{2,l}\}$dan $\{V_{2,l}\}$. Transformasi $\mathbf{V_1}$ menuju $\mathbf{W_2}$ dan $\mathbf{V_2}$**:**

$$\mathcal{P}_2\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix}\mathcal{B}_2\\ \mathcal{A}_2\end{bmatrix}\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix}\mathcal{B}_2\mathbf{V_1}\\ \mathcal{A}_2\mathbf{V_1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{W_2}\\ \mathbf{V_2}\end{bmatrix}$$

Misalkan $\mathcal{B}_1$=$\mathcal{W}_1$ dan $\mathcal{V}_1$=$\mathcal{A}_1$, tahap kedua jumlah algoritma piramida terhadap perputaran vektor dasar N/2 pada $\mathcal{V}_1$ menjadi dua set vektor dasar N/4, maka $\mathcal{W}_2$=$\mathcal{B}_2\mathcal{V}_1$=$\mathcal{B}_2\mathcal{A}_1$ dan $\mathcal{V}_2$=$\mathcal{A}_2\mathcal{V}_1$=$\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$. Sehingga koefesien detail level kedua $D_2 = \mathcal{W}_2^T\mathbf{W_2} = \mathcal{A}_1^T\mathcal{B}_2^T\mathbf{V_2}$ dan aproksimasi level kedua $S_2 = \mathcal{V}_2^T\mathbf{V_2} = \mathcal{A}_1^T\mathcal{A}_2^T\mathbf{V_2}$ sehingga :

$\mathbf{X} = \mathcal{W}_1^T\mathbf{W_1} + \mathcal{V}_1^T\mathcal{B}_2^T\mathbf{W_2} + \mathcal{V}_1^T\mathcal{A}_2^T\mathbf{V_2}$ atau $\mathbf{X} = \mathcal{B}_1^T\mathbf{W_1} + \mathcal{A}_1^T\mathcal{B}_2^T\mathbf{W_2} + \mathcal{A}_1^T\mathcal{A}_2^T\mathbf{V_2}$

sehingga $\mathbf{X} = D_1 + S_1 = D_1 + (D_2+S_2)$.

3.Algoritma Piramida Level terakhir (j=J_0)

Algoritma terus berjalan hingga level terakhir dengan langkah yang sama seperti algoritma sebelumnya, menghasilkan koefesien wavelet dan skala sampai level terakhir yaitu $\mathbf{W}_{J0}$ dan $\mathbf{V}_{J0}$ merupakan dua koefisien DWT terakhir, yaitu:

$X = \mathcal{W}^T\mathbf{W} = \sum_{j=1}^{J0}\mathcal{W}_j^T\mathbf{W_j} + \mathcal{V}_{J0}^T\mathbf{V_{J0}}$ atau

$\mathbf{X} = D_1 + S_1$

$= D_1 + (D_2+S_2)$

$= D_1 + D_2 + (D_3+S_3)$

$= D_1 + D_2 + \cdots + D_{(J0)-1} + (D_{J0}+S_{J0})$

$=\sum_{j=1}^{J0} D_j + S_{J0}$

Sehingga nilai aproksimasi S_j merupakan analisis multiresolusi (MRA) dari **X**, dengan j=1,2,...,J_0 (Percival dan Walden, 2000).

3. Analisis Runtun Waktu Menggunakan Wavelet Thresholding

Misalkan data runtun waktu membentuk model **X=D+ε** yang akan dilakukan DWT. **D** adalah hasil estimasi data dan **ε** adalah residual yang berdistribusi IID dengan mean nol. Maka :

$$\mathbf{W} \equiv \mathcal{W}\mathbf{X} = \mathcal{W}\mathbf{D} + \mathcal{W}\boldsymbol{\varepsilon} \equiv d+e \text{ maka } W_{j,l} = d_{j,l} + e_{j,l}$$

$d_{j,l}$ dan $e_{j,l}$ adalah element ke l dari masing-masing $\mathbf{d} \equiv \mathcal{W}\mathbf{D}$ dan $e \equiv \mathcal{W}\boldsymbol{\varepsilon}$. Untuk mengestimasi $\widehat{\mathrm{D}}^{(\mathrm{t})}$ (*thresholding*) mengikuti pola persamaan analisis multiresolusi maka diperoleh:

$$\widehat{\mathbf{D}}^{(\mathbf{t})} = \mathcal{W}^T \mathbf{W}^{(\mathbf{t})} = \sum_{j=1}^{J} \mathcal{W}_j^{\,T}\, \mathbf{W}_j^{(t)} + \mathcal{V}_J^{\,T} \mathbf{V}_J^{(t)}$$

Persamaan tersebut menyatakan pendefinisian koefisien dari detail $F_j^{(t)}$dan koefisien dari aproksimasi atau pemulusan $G_j^{(t)}$dengan $F_j^{(t)} \equiv \sum_{j=1}^{J} \mathcal{W}_j^{\,T}\, \mathbf{W}_j^{(t)}$ dan $G_J^{(t)} \equiv \mathcal{V}_J^{\,T} \mathbf{V}_J^{(t)}$, maka dapat dituliskan :

$$\widehat{\mathbf{D}}^{(\mathbf{t})} = \sum_{j=1}^{J} F_j^{(t)} + G_J^{(t)}$$

Tingkat kemulusan estimasi ditentukan oleh pemilihan fungsi wavelet, jenis fungsi thresholding, level resolusi dan parameter threshold. Yang paling dominan ditentukan parameter threshold yang optimal (Odgen, 1997).

3.1 Langkah-langkah *Thresholding*

Skema *thresholding* untuk mengestimasi **D** terdiri dari tiga langkah dasar yaitu:

1. Menghitung koefisien wavelet melalui Transformasi Wavelet Diskrit (DWT) yaitu$\mathbf{W} \equiv \mathcal{W}\mathbf{X}$.
2. Membentuk koefisien *thresholding* $\mathbf{W}^{(\mathbf{t})}$, dilakukan sesuai fungsi yang diinginkan (fungsi *soft* atau *hard thresholding*)
3. Mengestimasi **D** melalui $\widehat{\mathbf{D}}^{(\mathbf{t})} \equiv \mathcal{W}^T \mathbf{W}^{(\mathbf{t})}$ atau invers dari koefisien DWT yang telah di-*thresholding*.

3.2 Fungsi *Thresholding*

Ada dua jenis fungsi *thresholding* yaitu:

1. *Hard thresholding*

Dimana koefisien *thresholding* $\mathbf{W}^{(\mathbf{t})}$ menjadi $\mathbf{W}^{(\mathbf{ht})}$ dengan elemennya :

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j,l}}^{(\mathbf{ht})} = \begin{cases} \mathrm{W}_{j,l}, & \text{jika} |W_{j,l}| > \lambda \\ 0, & W_{j,l} \text{ yang lain} \end{cases}$$

2. *Soft thresholding*

Dimana koefisien *thresholding* $\mathbf{W}^{(\mathbf{t})}$ menjadi $\mathbf{W}^{(\mathbf{st})}$ dengan elemennya :

$$\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j,l}}^{(\mathbf{st})} = \text{sign}\,\{W_{j,l}\}\, f(|W_{j,l}| - \lambda)$$

dengan

$$\text{Sign}\,\{W_{j,l}\} = \begin{cases} +1, & \text{jika} W_{j,l} > 0 \\ 0, & \text{jika } W_{j,l} = 0 \\ -1, & \text{jika } W_{j,l} < 0 \end{cases} ; f(x) = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ 0, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

λ merupakan parameter thresholding (Percival dan Walden, 2000).

3.3 Pemilihan Parameter Thresholding

Ada dua kategori pemilihan *threshold* yaitu satu harga *threshold* untuk seluruh level resolusi (*Global Thresholding*) dan satu threshold pada tiap level resolusi.

1. *Global Thresholding*

Global thresholding berarti memilih satu parameter *threshold* yang digunakan untuk seluruh level resolusi. Ogden (1997) memberikan dua pemilihan *threshold* yang bergantung pada banyaknya data pengamatan *N* yaitu :

a. *Minimax threshold*

Donoho dan Johnstone (1994) dalam buku Odgen (1997) menabelkan sebagai berikut :

Tabel 1 Nilai *Minimax threshold*

N	λ^M	N	λ^M
2	0	512	2,074
4	0	1024	2,232
8	0	2048	2,414
16	1,200	4096	2,594
32	1,270	8192	2,773
64	1,474	16384	2,952
128	1,669	32768	3,131
256	1,860	65536	3,310

b. *Universal threshold* (λ^U)

jika residual (ε) dari hasil estimasi berdistribusi *white noise*, maka Donoho dan Jhonston dalam buku Percival dan Walden menyarankan parameter *Universal threshold* :

$$\lambda^U = \sigma\sqrt{2\log(N)},$$

σ harus diestimasi dari data melalui fungsi Median Deviasi Absolut yaitu :

$$\hat{\sigma}_{(mad)} = \frac{\text{median}\{|W_{1,l}|\}}{0.6745}$$

2. *Level-Dependent Thresholding*

Yaitu menentukan parameter ditiap level resolusi. Pada tugas akhir ini untuk tipe ini digunakan ***Adaptive threshold***, yang mensyaratkan bahwa residual dari estimasi tidak berdistribusi *white noise* yang berarti berlawanan dengan parameter *Universal threshold* dan hanya digunakan dengan fungsi *soft thresholding*. Pemilihan *threshold* ini dengan prinsip untuk meminimalkan *Stein Unbiased Risk Estimator* (SURE) pada suatu level resolusi. *Threshold* adapt untuk himpunan koefisien detail $W_{j,l}$ yang beranggotakan *L* koefisien didefinisikan sebagai berikut :

$$\lambda^A = \arg min_{0\le\lambda\le\lambda^*} SURE(W_{j,l};\lambda)$$

dengan

$$SURE(W_{j,l};\lambda) = L - 2.\#\{\, l: |W_{j,l}| :\le \lambda\} + \sum_{l=1}^{L}(|W_{j,l}| \Lambda\, \lambda)^2$$

Keterangan :

L = jumlah koefesien wavelet

λ = parameter *threshold*

$W_{j,l}$ = koefesien wavelet

4. Penerapan Metode Wavelet Thresholding

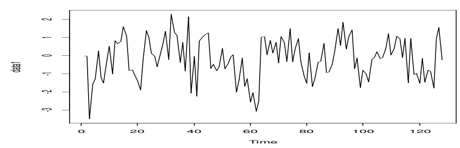
4.1 Sumber Data

Data yang digunakan adalah data simulasi dan data studi kasus. Data simulasi berasal dari pembangkitan data dari software R.14 dengan 4 karakteristik data yaitu stasioner, stasioner dengan *Outlier*, nonstasioner dan nonstasioner dengan *Outlier*.

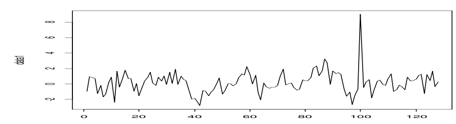
Untuk studi kasus digunakan data sekunder bulanan berat Ekspor Indonesia dalam miliar ton dari bulan Januari 2001 sampai September 2011. Jumlah data yaitu sebanyak 128 observasi.

1. Data Stasioner

Data yang digunakan adalah pembangkitan data random ARIMA(2,0,0) dengan ϕ_1=0.35 dan ϕ_2=0.28. Pembandingnya adalah data tersebut yang diberi sebuah *Outlier* pada data ke 100 dengan nilai 9 dan grafik runtun waktu sebagai berikut :



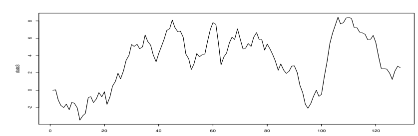
Gambar 1 Grafik Runtun Waktu ARIMA(2,0,0)



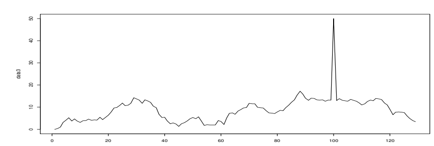
Gambar 2 Grafik Runtun Waktu ARIMA(2,0,0) dengan *Outlier*

2. Data Nonstasioner

Data yang digunakan adalah data random ARIMA(1,1,0) dengan ϕ_1=0.3. Pembandingnya adalah data tersebut yang diberi sebuah *Outlier* pada data ke 100 dengan nilai 50 dan grafik runtun waktu sebagai berikut :



Gambar 3 Grafik Runtun Waktu Data ARIMA(1,1,0)



Gambar 4 Grafik Runtun Waktu Data ARIMA(1,1,0) dengan *Outlier*

Berikut analisis data dengan ARIMA

Tabel 2 Analisis Data dengan Metode ARIMA

Data	Stasioner Tanpa *Outlier*	Stasioner dengan *Outlier*	Nonstasioner tanpa *Outlier*	Nonstasioner dengan *Outlier*
Model	ARIMA(2,0,0)	ARIMA(1,0,0)	ARIMA(1,1,0)	ARIMA(0,1,1)
Uji Parameter	Signifikan	Signifikan	Signifikan	Signifikan
Independensi residual	Terpenuhi	Tidak Terpenuhi	Terpenuhi	Tidak Terpenuhi
Uji Normalitas	Terpenuhi	Tidak Terpenuhi	Terpenuhi	Tidak Terpenuhi
Uji Linieritas	Terpenuhi	Tidak Terpenuhi	Terpenuhi	Tidak Terpenuhi
MSE Model	**1.2007**	**2.105**	**1.0674**	**37.045**

Berdasarkan tabel 2 dapat disimpulkan bahwa data dengan *Outlier* cenderung nonlinier dan melanggar asumsi-asumsi yang seharusnya dipenuhi serta keakuratan estimasi jauh dari harapan. Sehingga tidak cocok jika diestimasi dengan metode linier seperti ARIMA.

4.2 Analisis Wavelet Thresholding Pada Data Simulasi

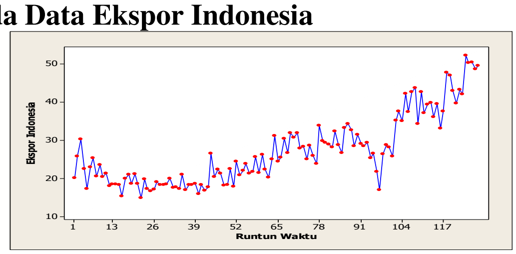
Data yang digunakan sama seperti ARIMA. Analisis Wavelet Thresholding untuk simulasi ini digunakan fungsi Hard dan *Soft thresholding* serta parameter *Minimax threshold*. Karena jumlah data 128 maka parameternya adalah 1.669. Berikut hasil estimasi terbaik untuk masing-masing kriteria data dan perbandingan MSE terhadap estimasi Model ARIMA :

Tabel 3 Perbandingan Nilai MSE

Data	MSE ARIMA	MSE Wavelet Thresholding
Stasioner tanpa *Outlier*	1.2007	0.363723
Stasioner dengan *Outlier*	2.105	0.351130
Nonstasioner tanpa *Outlier*	1.0674	0.094793
Nonstasioner dengan *Outlier*	37.045	0.091194

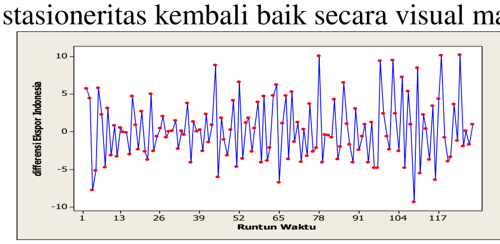
Berdasarkan tabel 3 dapat disimpulkan bahwa analisis data time series dengan metode Wavelet Thresholding menghasilkan MSE yang lebih kecil sehingga dapat dianggap lebih baik daripada metode ARIMA.

4.3 Analisis ARIMA pada Data Ekspor Indonesia



Gambar 5 Grafik Runtun Waktu Data Ekspor Indonesia

Dari gambar 5 terlihat data Ekspor Indonesia tidak stasioner karena mean dan variannya belum konstan dan secara formal dengan Uji Dickey-Fuller dengan bantuan Eviews4 memiliki nilai (τ=0.1488)>(nilai statistik Dickey-Fuller=-2.8848) sehingga diambil kesimpulan data Ekspor Indonesia tidak stasioner. Karena data tidak stasioner maka perlu dilakukan tindakan *differensi* pertama dan uji stasioneritas kembali baik secara visual maupun formal.



Gambar 6 Grafik Runtun Waktu Data Ekspor Indonesia *Differensi* 1

Setelah data di*differensi* terlihat pada grafik runtun waktu sudah stasioner karena mean dan variannya konstan dan secara formal dengan Uji Dickey-Fuller dengan bantuan Eviews4 memiliki nilai (τ=-12.9408)<(nilai statistik Dickey-Fuller=-2.8848). Sehingga diambil kesimpulan data Ekspor Indonesia *differensi* pertama telah stasioner. Model parametrik ARIMA terbaik data Ekspor Indonesia adalah :

Tabel 4 Model Tebaik ARIMA Data Ekspor Indonesia

Model Terbaik	ARIMA(2,1,0)
Estimasi Parameter	Signifikan
Independensi residual	Terpenuhi
Uji Normalitas	Terpenuhi
Uji Linieritas	Terpenuhi
MSE	12.70

ARIMA(2,1,0) adalah model terbaik data Ekspor Indonesia dengan semua asumsi terpenuhi dan memiliki MSE terkecil diantara model parametrik lain yang telah dicobakan.

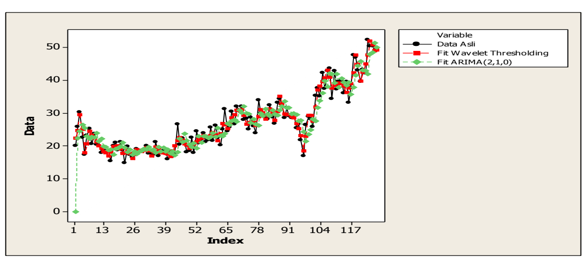
4.4 Analisis Wavelet Thresholding Pada Data Ekspor Indonesia

Estimasi data Ekspor Indonesia dengan Wavelet Thresholding menggunakan filter Daubeshies 4 (D4), fungsi *Soft* dan *Hard thresholding* dan tiga parameter *threshold* (λ) optimal yaitu *Universal*, dan *Adaptive threshold threshold*. Analisis data Ekspor Indonesia dengan metode wavelet thresholding menghasilkan estimasi yang terbaik yaitu :

1. Untuk metode *Minimax Threshold* yang terbaik adalah estimasi fungsi *soft Thresholding* pada level resolusi pertama (j =1) dengan nilai *Threshold* (λ^M) dan MSE yaitu 1.669 dan 3.918186.
2. Untuk metode *Universal Threshold* tidak bisa digunakan karena residualnya tidak berdistribusi Gaussian.
3. Untuk metode *Adaptive Threshold* yang terbaik adalah estimasi fungsi *soft Thresholding* pada level resolusi kedua (j=5) dengan nilai *Threshold* (λ^A) dan MSE yaitu 3.114753 dan 5.59182.

Dari ketiga pernyataan tersebut menunjukkan bahwa parameter optimal *Minimax Threshold* pada level resolusi pertama (j=1) dengan fungsi *Soft Thresholding* memberikan estimasi data runtun waktu data Ekspor Indonesia yang terbaik karena menghasilkan MSE yang terkecil.

4.5 Perbandingan Estimasi ARIMA Terhadap Wavelet Thresholding pada Data Ekspor Indonesia



Gambar 7 Plot Gabungan Data Asli, Fits ARIMA (2,1,0), dan Estimasi Wavelet Thresholding

Dari gambar terlihat plot estimasi dengan metode wavelet thresholding lebih mendekati plot data asli daripada plot estimasi dengan metode ARIMA. Pendekatan secara visual didukung oleh nilai MSE dari estimasi Wavelet Thresholding 3.9182 yang lebih kecil dari pada nilai MSE dari Estimasi ARIMA yaitu 12.70. Berdasarkan kedua pernyataan tersebut, dapat diambil kesimpulan metode Wavelet Thresholding menghasilkan estimasi yang lebih baik untuk analisis runtun waktu data Ekspor Indonesia daripada metode ARIMA.

5. Kesimpulan

Berdasarkan identifikasi permasalahan, hasil analisis data dan pembahasan pada bab sebelumnya, didapat kesimpulan sebagai berikut :

1. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan terhadap empat karakteristik data yaitu stasioner, stasioner dengan *outlier*, nonstasioner dan nonstasioner dengan *outlier*. Analisis ARIMA terhadap data mengandung *outlier* cenderung nonlinier dan melanggar asumsi model parametrik sehingga kurang tepat jika dianalisis dengan ARIMA, lebih baik menggunakan metode nonlinier salah satunya adalah Wavelet Thresholding.
2. Penerapan pada studi kasus data Ekspor Indonesia dengan metode Wavelet Thresholding dan parameter *Minimax threshold* memberikan estimasi yang mulus dan nilai MSE lebih kecil daripada metode ARIMA. Sehingga metode Wavelet Thresholding dianggap lebih baik daripada metode ARIMA.

DAFTAR PUSTAKA

Agung, IGN. 2009. *Time Series Data Analysis Using Eviews*. Singapura: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

[Anonim]. 2008. www.bps.go.id/data ekspor indonesia (diakses 20 Desember 2011).

Anton, H. 1995. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi kelima. Jakarta : Erlangga.

Bruce, A. and Gao, HY. 1996. *Applied Wavelet Analysis with S-PLUS.* New York: Springer Verlag.

Conover, W. J. 1980. *Practical Nonparametric Statistics*. Second Edition. New York:John Wiley.

Gujarati, D. 1978. *Ekonometri Dasar* Zein, Sumarno, penerjemah. Erlangga:Jakarta. Terjemahan dari: *Basic Econometrics*.

Makridakis, S, Wheelwright,S.C., and McGee, V.E. 1999. Suminto, H, penejemah, *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Jakarta : Bina Rupa Aksara.

Maruddani, D.A.I. 2004. *Estimasi Parameter Model Regresi Non Stasioner dengan Variabel Dependen Lag*. Jurnal Matematika dan Komputer. Volume 7 No.1.:42-51. Semarang : UNDIP.

Nason, G.P. 2006. *Wavelet Methods in Statistics with R. Springer*. Bristol: University Walk. Odgen, R.T. 1997. *Essential Wavelets for Statistical Application and Data Analysis*. Boston :Birkhauser.

Percival, D.B. dan Walden, A.T. 2000. *Wavelet Methods for Time Series analysis,*1st *published.* New York : Cambridge University Press.

Soejoeti, Zanzawi.1987. *Analisis Runtun Waktu*. Jakarta : Karunika.

Warsito, B. dan Dwi, Ispriyanti.2004. *Uji Linearitas Data Time Series dengan Reset Test.* Jurnal Matematika dan Komputer. Volume 7 No. 3:36–44. Semarang: UNDIP.

Wei, W.W.S. 2006. *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods,* Canada : Addison Wesley Publishing Company.