

# JURNAL TEKNIK SIPIL

Jurnal Teoretis dan Terapan Bidang Rekayasa Sipil

## Tekuk Torsi Lateral Balok I Kantilever Non Prismatis

Paulus Karta Wijaya

Universitas Katolik Parahyangan - Jurusan Teknik Sipil  
Jalan Ciumbuleuit 94 Bandung, E-mail: paulusk@bdg.centrin.net.id

Paulina Jacintha

P.T. Recta Optima, Jl. Pratista Raya No 49, E-mail: paulina\_jacintha@yahoo.com

### Abstrak

Dalam makalah ini disajikan hasil dari suatu studi tentang tekuk torsi lateral elastis balok kantilever dengan penampang I nonprismatis. Bentuk ketidak prismatisan adalah ketinggian badan (web) bervariasi linier sedangkan lebar sayap konstan. Untuk itu dilakukan analisis tekuk elastis sejumlah balok kantilever nonprismatis. Parameter yang ditinjau adalah parameter tak berdimensi balok untuk tekuk torsi lateral dan kemiringan sisi badan. Analisis dilakukan dengan menggunakan analisis tekuk linier metode elemen hingga yang dibantu program SAP versi 14. Formulasi metode elemen hingga berdasarkan teori bifurkasi. Teori ini menghasilkan suatu persamaan nilai Eigen. Momen kritis adalah nilai Eigen terkecil dari penyelesaian masalah nilai Eigen tersebut. Beban yang ditinjau adalah beban terpusat diujung bebas balok dan beban terbagi merata. Ditinjau juga pengaruh lokasi beban, yaitu beban bekerja pada pusat geser, beban bekerja pada sayap atas (sisi atas badan balok) dan beban bekerja pada sayap bawah (sisi bawah badan balok). Dari studi ini dapat disimpulkan bahwa kemiringan sisi badan berpengaruh kecil terhadap momen kritis balok bila beban bekerja pada pusat geser, akan tetapi pengaruh ketinggian letak beban terhadap pusat geser sangat dipengaruhi oleh kemiringan sisi badan. Selain itu telah didapat persamaan-persamaan untuk memperkirakan besarnya momen kritis elastis balok kantilever nonprismatis melalui analisis regresi terhadap data hasil metode elemen hingga.

**Kata-kata Kunci:** Tekuk torsi lateral, Balok kantilever, Momen kritis elastis, Metode elemen hingga.

### Abstract

This paper presents the results of a study about elastic lateral torsional buckling of web tapered cantilever I beams. Elastic buckling analysis was carried out on a number of web tapered cantilever I beam. Beam parameters are expressed in term of dimensionless parameter for lateral torsional buckling and the slope of the side of the tapered web. The analysis is performed using finite element method and the SAP 2000 v 14 program is used to do the analysis. The finite element formulation is based on bifurcation theory. This theory leads to Eigen Value Problem. Critical moment is the lowest Eigen value. The load to be considered is point load at the free end of the beam and uniformly distributed load. Three location of load are considered. The first is at shear center, the second is at top flange and the third is at the bottom flange. From this study, it can be concluded that the slope of the side of tapered web has little influence on the critical moment. But the influence of load height on critical moment is strongly influenced by the slope of the side of the tapered web. Equations for estimating the critical moment has been obtained by regression of the data results of the finite element method.

**Keywords:** Lateral torsional buckling, Cantilever beam, Elastic critical moment, Finite element method.

## 1. Pendahuluan

Perancangan balok baja perlu meninjau tiga hal. Kekuatan, stabilitas dan kekakuan. Untuk stabilitas ada dua hal yang harus ditinjau. Pertama adalah tekuk lokal dan kedua adalah tekuk torsi lateral. Tekuk torsi lateral adalah suatu gejala dimana pada saat balok mengalami momen lentur sampai pada besaran tertentu, tiba tiba ia mengalami perpindahan lateral keluar

bidang lenturnya disertai torsi. Besarnya momen lentur dimana balok mengalami tekuk disebut momen kritis. Momen kritis merupakan salah satu *limit state* pada perancangan balok baja.

Walaupun telah banyak peneliti mempelajari tekuk torsi lateral, namun sampai saat ini masih banyak yang melakukan penelitian tentang tekuk torsi lateral. Penelitian penelitian yang muthakhir antara lain Denan

(Denan et al, 2010) mempelajari tekuk torsi lateral balok dengan badan (web) berbentuk trapezoid. Kabir dan Seif (Kabir and Seif, 2010) mempelajari tekuk torsi lateral balok I yang diperkuat dengan FRP. Studi mereka menggunakan metode energy dan menerapkan metode Rayleigh-Ritz. Flens dan perkuatan FRP dianggap sebagai elemen hibrida sehingga Teori Laminasi Klasik dapat digunakan. Amir Javidinejad (Javidinejad, 2010) mempelajari tekuk pada balok dan kolom akibat kombinasi beban aksial dan transversal dengan lokasi beban aksial yang bervariasi. Showkati (Showkati, 2008) mempelajari tekuk torsi lateral balok kastela. Ia menggunakan metode elemen hingga untuk menghitung momen kritis balok kastela dan kemudian mencari rasio momen kritis balok kastela dibanding momen kritis balok utuh. Pinarbasi (Pinarbasi, 2011) mempelajari tekuk torsi lateral balok dengan penampang segiempat dengan menggunakan metode variasi iterasi (*variational iteration method*). Younes (Younes et al, 2009) mempelajari efek pengelasan pada tekuk torsi lateral balok I tersusun (I shaped build up steel beam).

Untuk balok diatas dua tumpuan peraturan struktur baja Amerika Serikat (The American Institute of Steel Construction Specification for Structural Steel Building 2010 (ANSI/AISC 360-10) yang akan diadopsi ke dalam peraturan struktur baja Indonesia), untuk selanjutnya disebut AISC 2010, memberikan persamaan untuk memperkirakan besarnya momen kritis balok. Parameter yang menentukan besarnya momen kritis adalah besaran penampang, panjang bagian balok tak tertumpu lateral, modulus elastisitas dan modulus geser. Untuk daerah tekuk elastis, persamaan untuk momen kritis dalam AISC 2010 mengadopsi penyelesaian oleh Timoshenko. Penyelesaian tersebut adalah untuk balok diatas dua tumpuan dengan kondisi ujung rotasi puntir ditahan tetapi pilin (*warping*) bebas. Penyelesaian tersebut adalah untuk beban berupa momen lentur seragam. Untuk momen lentur tidak seragam, AISC 2010 menggunakan faktor modifikasi untuk diagram momen lentur tidak seragam  $C_b$ . Untuk kasus balok kantilever, AISC 2010 menyarankan menggunakan persamaan yang sama dengan nilai  $C_b = 1$ . Penggunaan persamaan tersebut untuk balok kantilever sebenarnya tidak tepat, karena kondisi batasnya yang berbeda. Lagipula perilaku tekuk balok kantilever berbeda dengan balok diatas dua tumpuan. Pada balok diatas dua tumpuan, pada saat tekuk, flens yang mengalami tegangan tekan mengalami perpindahan lateral lebih besar dari pada flens yang mengalami tegangan tarik. Sebaliknya, pada balok kantilever, flens yang mengalami tegangan tarik mengalami perpindahan lateral yang lebih besar dari pada flens yang mengalami tegangan tekan.

Untuk balok kantilever studi tentang tekuk torsi lateral dimulai oleh Timoshenko. Timoshenko (1963) mempelajari tekuk torsi lateral balok simetri ganda prismatic kantilever akibat beban terpusat pada ujung

bebas. Kemudian Nathercod (1973) mempelajari tekuk torsi lateral balok kantilever prismatis dengan studi pengaruh berbagai tumpuan (*restraint*) pada ujung bebas dan pengaruh ketinggian beban yaitu beban bekerja pada flens atas. Dowswell (2004) melakukan studi tekuk torsi lateral balok I kantilever dan mengusulkan formula untuk menghitung momen kritis elastis balok kantilever. Andrade (2007) melakukan studi momen kritis elastis balok kantilever prismatis dengan penampang I simetri ganda maupun penampang I simetri tunggal. Trahair (2010) membahas tekuk torsi lateral inelastis balok baja kantilever dari sudut penerapan berbagai peraturan. Kurniawan (2011) melakukan studi tentang tekuk torsi lateral balok kantilever yang dibuat dari penampang LiteSteel. Balok juga prismatic. LiteSteel adalah penampang kanal dengan flens yang berlubang. Marques (2012) membahas tekuk lentur dan tekuk torsi lateral balok non prismatis (*web tapered*) tetapi tidak membahas balok kantilever. Rusul (2013) mempelajari tekuk distorsi pada balok sayap lebar. Didalamnya ada subbab tentang balok kantilever. Yuan dan Chen (2013) mempelajari tekuk torsi lateral balok Tee non prismatis (*web tapered*). Untuk balok non prismatis (*web tapered*) antara lain Raftoyanis (2010) mempelajari tekuk torsi lateral balok non prismatis *web tapered* dengan menggunakan pendekatan energi. Sampai sejauh ini belum ditemukan publikasi tentang persamaan praktis untuk memperkirakan momen kritis balok I kantilever tidak prismatis.

Dalam buku Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures (Ziemian, 2010) disajikan suatu metode untuk memperkirakan besarnya momen kritis elastis balok baja kantilever dengan penampang I. Momen kritis elastis ini dipandang penting, karena untuk momen kritis inelastis dapat diperoleh dengan memetakan momen kritis elastis menjadi momen kritis inelastis. Persamaan persamaan yang disajikan dalam buku ini untuk balok kantilever berdasarkan karya dari Dowswell (Dowswell, 2004). Persamaan persamaan tersebut adalah untuk balok kantilever prismatis.

Dalam makalah ini disajikan hasil suatu studi momen kritis elastis balok kantilever tidak prismatis. Balok tidak prismatis berupa balok I dengan ketinggian badan yang bervariasi linier, sedangkan lebar sayap tetap konstan sepanjang balok.

## **2. Tujuan dan Metode Penelitian**

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan persamaan untuk menghitung momen kritis elastis balok I kantilever nonprismatis (*web tapered*). Beban yang ditinjau adalah beban terpusat di ujung bebas balok dan beban terbagi merata. Untuk itu dilakukan serangkaian analisis balok kantilever nonprismatis dan hasilnya menjadi data dan persamaan dikembangkan dari hasil regresi data tersebut. Analisis dilakukan

dengan menggunakan metode elemen hingga yang dilaksanakan dengan program SAP2000 v.14.

### 3. Parameter Tak Berdimensi Balok untuk Tekuk Torsi Lateral

Untuk menentukan besaran tak berdimensi penampang, perhatikan persamaan momen kritis elastis balok diatas dua tumpuan yang telah diperoleh Timoshenko.

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y \left( GJ + \frac{EC_w \pi^2}{L^2} \right)} \quad (1)$$

Dengan  $L$  adalah panjang balok,  $E$  adalah modulus elastisitas,  $G$  adalah modulus geser,  $J$  adalah konstanta torsi,  $C_w$  is konstanta pilin (*warping constant*),  $I_y$  adalah momen inersia terhadap sumbu lemah. **Persamaan 1** dapat ditulis dalam bentuk,

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJ L^2}} \quad (2)$$

Maka dengan menggunakan notasi,

$$W = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EC_w}{GJ}} \quad (3)$$

**Persamaan 2** dapat ditulis sebagai berikut,

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + W^2} \quad (4)$$

$W$  adalah parameter tak berdimensi balok untuk tekuk torsi lateral balok tersebut. Terlihat pada **Persamaan 3** bahwa  $W$  melibatkan tidak hanya besaran penampang, tetapi juga besaran elastis dan panjang balok. Parameter  $W$  ini digunakan dalam Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures (Ziemian, 2010).

### 4. Momen Kritis Balok Kantilever Prismatis

Persamaan momen kritis untuk balok kantilever prismatis yang disajikan dalam *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures* menggunakan bentuk yang mirip dengan **Persamaan 4**. Persamaan tersebut meninjau dua macam distribusi momen yaitu distribusi momen akibat beban terpusat diujung balok dan distribusi momen akibat beban terbagi merata. Selain itu persamaan tersebut memperhitungkan posisi beban, yaitu beban bekerja pada pusat geser penampang balok, tepi atas badan balok dan juga kondisi tumpuan lateralnya. Persamaan tersebut adalah sebagai berikut (Ziemian, 2010),

$$M_{cr} = C_L C_H C_B \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{L} \quad (5)$$

Persamaan persamaan untuk  $C_L$ ,  $C_H$  dan  $C_B$ , merupakan fungsi dari  $W$ , dapat dilihat pada *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures* (Ziemian, 2010).

Dalam studi ini, diupayakan mencari persamaan untuk menghitung momen kritis balok kantilever non prismatis. Persamaan mempunyai bentuk yang sama dengan **Persamaan 5**, tetapi studi dibatasi hanya untuk balok kantilever tanpa tumpuan lateral, maka **Persamaan 5** menjadi,

$$M_{cr} = C_L C_H \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{L} \quad (6)$$

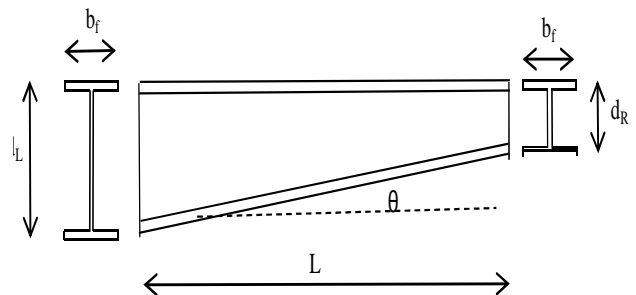
Upaya dilakukan untuk mendapatkan persamaan untuk  $C_L$  dan  $C_H$  untuk balok kantilever non prismatis.

### 5. Analisis Tekuk Balok Kantilever Non Prismatis

Untuk mendapatkan nilai  $C_L$  dan  $C_H$  untuk balok kantilever nonprismatis, dilakukan serangkaian analisis tekuk pada sejumlah balok nonprismatis. Balok nonprismatis berupa variasi ketinggian badan seperti diilustrasikan pada **Gambar 1**.

Karena parameter balok akan dinyatakan dalam bentuk parameter tak berdimensi  $W$ , maka cukup dilakukan analisis untuk membangkitkan sejumlah  $W$ . Nilai  $W$  dihitung adalah nilai  $W$  untuk penampang pada ujung kiri (ujung dengan tinggi badan terbesar). Besaran koefisien  $C_L$  dan  $C_H$  akan merupakan fungsi dari parameter tak berdimensi  $W$  dan kemiringan tepi badan  $tg\theta$ . Kondisi batas ujung kiri balok (penampang dengan tinggi penampang terbesar) adalah jepit, dimana rotasi puntir dan pilin (*warping*) ditahan. Kondisi batas ujung kanan adalah bebas baik untuk lentur, rotasi puntir dan pilin (*warping*).

Untuk membangkitkan data, dilakukan analisis pada balok dengan lebar sayap  $b_f$  200 mm, ketinggian penampang terbesar (ujung kiri)  $d_L$  adalah 600 mm. Ketinggian penampang pada ujung kanan divariasikan dari 100 mm sampai dengan 600 mm. Selain itu panjang balok juga divariasikan, dari panjang balok



**Gambar 1.** Bentuk balok I nonprismatis yang dianalisis

4000 mm sampai 11000 mm dengan interval 1000 mm. Setiap panjang tertentu akan menghasilkan satu besaran tak berdimensi  $W$ . Beban berupa beban terpusat diujung bebas balok, dan beban terbagi merata. Ditinjau tiga lokasi beban, yaitu beban pada pusat geser, beban pada sayap atas (tepi atas badan) dan beban pada sayap bawah (tepi bawah badan).

Selain parameter tak berdimensi  $W$  sebagaimana dirumuskan dalam **Persamaan 3**, parameter yang lain adalah kemiringan tepi badan yang dinyatakan dalam tangen sudut  $\theta$  yaitu (lihat **Gambar 1**),

$$\tan \theta = \frac{d_L - d_R}{L} \tag{7}$$

Mula mula analisis dilakukan untuk beban pada pusat geser. Dalam hal ini nilai  $C_H = 1$ . Untuk setiap nilai  $W$  dan  $\theta$ , dengan metode elemen hingga didapat momen kritis  $M_{cr1}$  dan nilai  $C_L$  diperoleh setelah substitusi  $M_{cr}$  kedalam **Persamaan 6** sehingga didapat,

$$C_L = \frac{M_{cr1}}{\sqrt{EI_y GJ}} \tag{8}$$

Kemudian analisis elemen hingga dilakukan untuk beban pada flens atas, didapat  $M_{cr2}$  dan nilai  $C_H$  dapat dihitung dengan persamaan,

$$C_H = \frac{M_{cr2}}{M_{cr1}} \tag{9}$$

Setelah itu analisis dengan metode elemen hingga dilakukan untuk beban pada flens bawah dan  $C_H$  untuk beban pada flens bawah dapat dihitung dengan **Persamaan 9** pula.

### 6. Analisis Tekuk dengan Metode Elemen Hingga

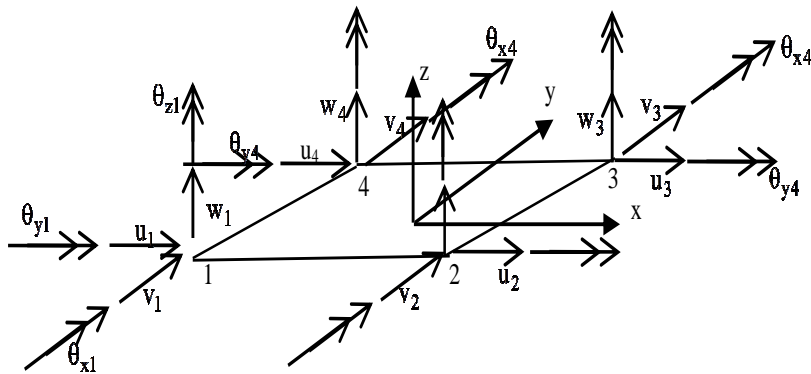
Analisis tekuk diformulasikan dengan teori bifurkasi. Dengan teori itu didapat persamaan yang mempunyai bentuk sebagai berikut (Cook, 2002),

$$[K - \lambda_{cr} [K_G]_{ref}] \{\delta D\} = 0 \tag{10}$$

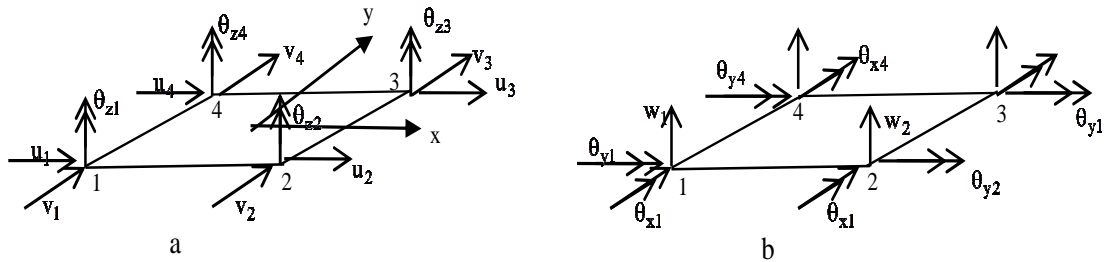
Dimana  $K$  adalah matriks kekakuan struktur.  $K_G$  adalah matriks kekakuan geometri (*geometrical stiffness matrix*) atau matriks kekakuan tegangan (*stress stiffness matrix*) struktur yang merupakan fungsi dari tegangan dan geometri struktur.  $\{\delta D\}$  adalah perubahan vektor perpindahan nodal saat bifurkasi. **Persamaan 10** merupakan persamaan dari masalah nilai Eigen  $\lambda_{cr}$ . adalah nilai Eigen terkecil dan  $\{\delta D\}$  merupakan vektor Eigen.

Dalam analisis tekuk, analisis dilakukan dua kali. Mula mula struktur diberi beban yang pola dan distribusinya seperti yang dikehendaki (yaitu misalnya apakah beban terpusat atau beban terbagi) tetapi besarnya beban boleh sebarang. Beban tersebut disebut beban rujukan (*reference load*). Kemudian dilakukan analisis struktur akibat beban rujukan dan didapatkan tegangan yang terjadi yang disebut tegangan rujukan. Kemudian  $K_G$  dihitung berdasarkan tegangan rujukan tersebut.  $[K_G]_{ref}$  adalah matriks kekakuan geometri yang dihitung berdasarkan tegangan yang timbul akibat beban rujukan tersebut. Kemudian analisis nilai Eigen dilakukan untuk menyelesaikan **Persamaan 10** dan didapatkan nilai Eigen terkecil  $\lambda_{cr}$ . Beban tekuk adalah beban rujukan dikalikan  $\lambda_{cr}$ . Bila analisis tekuk dilakukan untuk besar beban rujukan yang berbeda tetapi pola dan distribusinya sama, maka akan didapat  $\lambda_{cr}$  yang berbeda. Akan tetapi hasil kali beban dan  $\lambda_{cr}$  akan tetap sama yaitu beban tekuk untuk pola beban yang dimaksud.

Elemen yang digunakan adalah elemen cangkang tipis (*thin shell element*) dengan empat titik nodal. Elemen cangkang mempunyai enam kebebasan gerak pada tiap titik nodalnya, tiga translasi dan tiga rotasi. Ilustrasi diberikan dalam **Gambar 2**. Sumbu xyz adalah sumbu lokal. Sumbu x dan sumbu y terletak pada bidang elemen dan sumbu z tegak lurus bidang elemen. Elemen ini merupakan penggabungan elemen tegangan bidang quadrilateral dengan elemen lentur pelat (**Gambar 3**).



Gambar 2. Elemen cangkang empat titik nodal dan perpindahan nodalnya



**Gambar 3 a. Elemen tegangan bidang quadrilateral dan perpindahan nodalnya (termasuk drilling d.o.f.)  
b. Elemen pelat lentur quadrilateral dan perpindahan nodalnya**

Untuk elemen cangkang, empat titik nodal tersebut bisa tidak terletak dalam satu bidang. Bila empat titik nodal tidak sebidang diperlukan langkah tambahan. Tetapi disini disajikan bila empat titik nodal tersebut sebidang.

Untuk mendapatkan enam derajat kebebasan tiap titik nodal, elemen tegangan bidang quadrilateral yang biasanya mempunyai dua derajat kebebasan tiap titik nodal, ditambahkan satu kebebasan gerak berupa rotasi yang vektornya searah sumbu z (**Gambar 3.a**). Rotasi nodal tersebut disebut “drilling d.o.f” (Cook, 2002, Wilson, 2002). Hal ini diilustrasikan pada **Gambar 3.a**. Berikut ini dijabarkan perhitungan matriks kekakuan dan matriks kekakuan tegangan yang didasarkan pada uraian dari Wilson (Wilson, 2002). Berturut turut dijabarkan matriks kekakuan elemen tegangan bidang quadrilateral dengan *drilling d.o.f*, matriks kekakuan elemen pelat quadrilateral dan matriks kekakuan tegangan.

**6.1 Matriks kekakuan elemen tegangan bidang**

Langkah langkah pembentukan matriks kekakuan elemen tegangan bidang dengan drilling d.o.f diilustrasikan pada **Gambar 4**. Pertama, hubungan perpindahan dan perpindahan nodal diformulasikan dari elemen quadrilateral delapan nodal (**Gambar 4.a**). Kedua, perpindahan relative nodal untuk tengah sisi diuraikan kearah normal dan tangensial sisi dan komponen perpindahan tangensial diambil nol (**Gambar 4.b**). Ketiga, perpindahan relative normal sisi dianggap terdistribusi secara parabolic dan perpindahan relative nodal ditengah sisi diubah menjadi rotasi relatif di nodal sudut (**Gambar 4.c**). Keempat, rotasi relative nodal sudut diubah menjadi rotasi total dan fungsi bentuk dimodifikasi agar melewati patch test (**Gambar 4.d**).

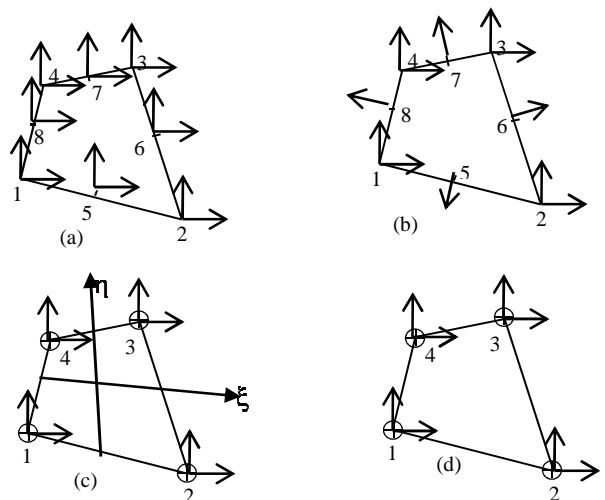
Hubungan vector perpindahan dan vector perpindahan nodal adalah sebagai berikut,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{11}$$

Dimana, **N** adalah matriks fungsi bentuk,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Adapun fungsi bentuk  $N_1$  sampai dengan  $N_8$  adalah fungsi bentuk standar untuk elemen kwadrat quadrilateral, dapat dilihat pada buku teks elemen hingga (Cook, 2002, Wilson, 2002).



**Gambar 4. Langkah langkah pembentukan matriks kekakuan**

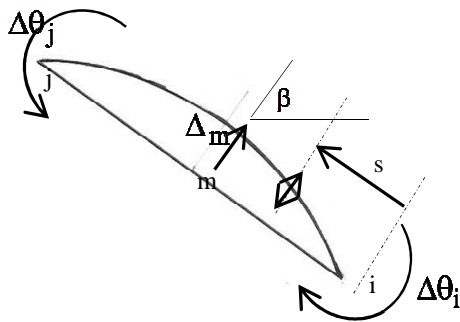
Vektor **d** adalah vektor perpindahan titik nodal sebagai berikut,

$$\mathbf{d} = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ \Delta u_5 \ \Delta v_5 \ \Delta u_6 \ \Delta v_6 \ \Delta u_7 \ \Delta v_7 \ \Delta u_8 \ \Delta v_8)^T \tag{13}$$

$u_i$  dan  $v_i$  dengan  $i = 1$  sampai dengan 4 adalah perpindahan total nodal 1 sampai dengan empat.  $\Delta u_i$  dan  $\Delta v_i$  dengan  $i = 5$  sampai dengan 8 adalah perpindahan relative, yaitu perpindahan yang diukur dari garis lurus yang menghubungkan nodal sudut dalam konfigurasi terdeformasi.

Selanjutnya perpindahan relative nodal nomor 5 sampai dengan 8 diambil perpindahan relative normal saja (tegak lurus sisi elemen) sedangkan perpindahan relative tangensial dianggap nol sehingga perpindahan relative arah x dan y merupakan penguraian perpindahan relative normal ini.

Kemudian perpindahan normal relative nodal 5 sampai 8 dinyatakan dalam rotasi relatif nodal sudut dengan



Gambar 5. Sisi suatu elemen dan deformasi relatifnya

menganggap deformasi sisi elemen terdistribusi secara parabolik (Gambar 5).

Dengan anggapan parabolik tersebut demikian perpindahan nodal m ditengah sisi elemen tersebut dinyatakan dalam rotasi relative ujung sisi elemen adalah,

$$\Delta_m = \frac{L}{8}(\Delta\theta_j - \Delta\theta_i) \tag{14}$$

Dengan  $\Delta\theta_i$  dan  $\Delta\theta_j$  adalah rotasi nodal i dan rotasi nodal j. L adalah panjang sisi elemen.

Dengan anggapan ini maka perpindahan nodal 5 sampai dengan nodal 8 dapat diubah menjadi perpindahan rotasi pada nodal sudut (nodal 1 sampai dengan nodal 4). Matriks fungsi bentuk dan vektor perpindahan nodal berubah menjadi,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & M_{x1} & M_{x2} & M_{x3} & M_{x4} \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & M_{y1} & M_{y2} & M_{y3} & M_{y4} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{d} = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ \Delta\theta_1 \ \Delta\theta_2 \ \Delta\theta_3 \ \Delta\theta_4)^T \tag{16}$$

Dengan  $M_{x1}$  sampai dengan  $M_{x4}$  dan  $M_{y1}$  sampai dengan  $M_{y4}$  adalah fungsi bentuk yang berkaitan dengan rotasi normal relative  $\Delta\theta_1$  sampai dengan  $\Delta\theta_4$ .

Melalui diferensiasi vektor perpindahan dan dengan Persamaan 11, vektor regangan dapat dinyatakan dalam vektor perpindahan nodal,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{11} \ \mathbf{B}_{12}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Dengan

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{11} \ \mathbf{B}_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{N} \tag{18}$$

Untuk dapat memenuhi constant stress patch test, maka  $\bar{\mathbf{B}}_{12}$  perlu diubah menjadi (Wilson, 2002),

$$\bar{\mathbf{B}}_{12} = \mathbf{B}_{12} - \frac{1}{A} \int \mathbf{B}_{12} dA \tag{19}$$

Dan matriks kekakuan elemen dihitung dengan persamaan,

$$\bar{\mathbf{k}} = \int \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \tag{20}$$

Dimana E adalah matriks elastisitas untuk tegangan bidang.

Karena matriks kekakuan berdasarkan Persamaan 20 mengandung kebebasan gerak rotasi relative terhadap rotasi elemen sebagai benda tegar maka matriks kekakuan tersebut perlu ditransformasikan agar rotasi nodal menjadi rotasi absolut. Rotasi benda tegar pada titik pusat elemen dapat dihitung dengan persamaan,

$$\theta_o = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tag{21}$$

Dengan mensubstitusikan u dan v dari Persamaan 11 dengan matriks N dari Persamaan 15 dan koordinat di pusat elemen ( $\xi = \eta = 0$ ) dimana  $\xi$  dan  $\eta$  adalah koordinat natural maka Persamaan 21 menjadi,

$$\theta_o = \mathbf{b}_o \mathbf{d} \tag{22}$$

Dengan d seperti pada Persamaan 16, maka matriks  $\mathbf{b}_o$  berukuran 1 x 12. Selisih antara rotasi absolut dan rotasi relative pada pusat element adalah,

$$\mathbf{d} = \theta_o - \sum_{i=1}^4 M_i(0,0) \Delta\theta_i = \bar{\mathbf{b}}_o \mathbf{d} \tag{23}$$

Kemudian dengan menggunakan suatu kekakuan  $k_o$ , dihitung suatu matriks kekakuan  $\mathbf{k}_o$  sebagai berikut,

$$\mathbf{k}_o = \int \bar{\mathbf{b}}_o^T k_o \bar{\mathbf{b}}_o dV = k_o \text{Vol} \bar{\mathbf{b}}_o^T \bar{\mathbf{b}}_o \tag{24}$$

Vol adalah volume elemen. Menurut Wilson (2002) nilai  $k_o$  dapat diambil sama dengan 0,025G dengan G adalah modulus geser.

Setelah matriks  $\bar{\mathbf{k}}$  ditambahkan matriks  $\mathbf{k}_o$  menjadi matriks kekakuan k maka rotasi relative nodal berubah menjadi rotasi total.

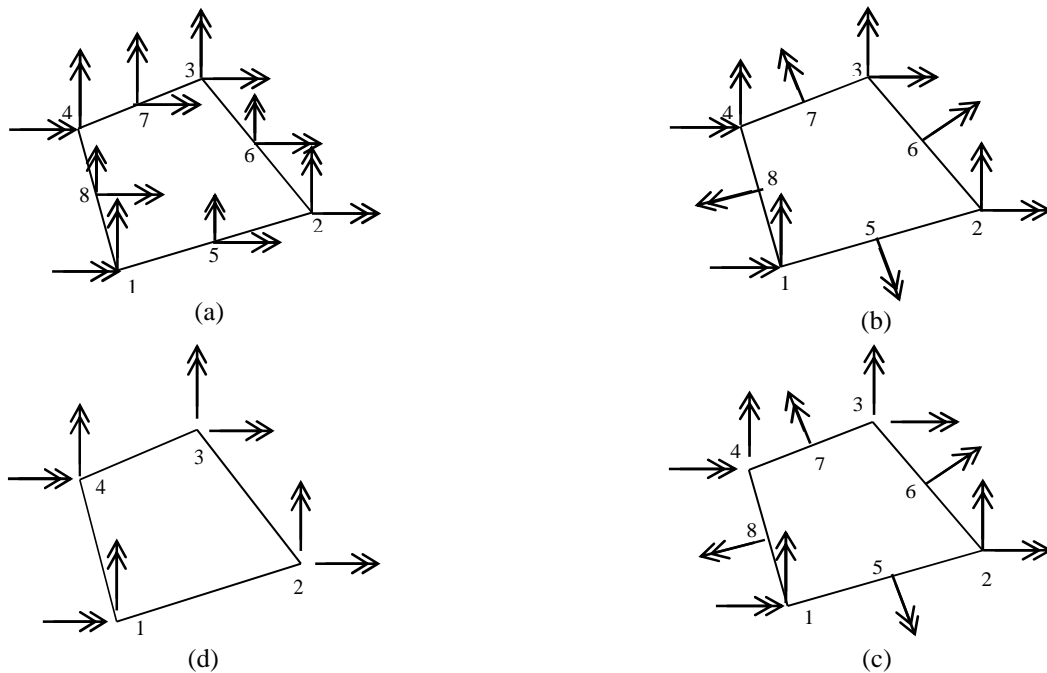
Kemudian matriks kekakuan elemen k tersebut dirakitkan kedalam matriks kekakuan struktur sesuai dengan nomor kebebasan gerak.

### 6.2 Elemen lentur pelat

Dalam program SAP, elemen pelat tipis diformulasikan berdasarkan teori pelat Mindlin. Anggapan yang digunakan adalah sebagai berikut (Wilson, 2002). Pertama, suatu garis lurus yang tegak lurus garis netral,

sebelum pembebanan tetap lurus sesudah pembebanan. Namun garis lurus tersebut tidak harus tetap tegak lurus garis netral. Dengan anggapan ini, deformasi geser diperhitungkan. Kedua, tegangan normal diarah tegak lurus bidang pelat (diarah ketebalan) dianggap kecil dibanding tegangan lentur dan karenanya diabaikan. Maka kondisi tegangan bersifat tegangan bidang (*plane stress*). Anggapan ini digunakan untuk pelat dengan ketebalan menengah (*moderat thick plate*). Teori pelat ini tetap dapat digunakan untuk pelat tipis dimana berlaku Teori Kirchoff, mudah diformulasikan secara elemen hingga dan tetap akurat (Wilson, 2002).

Formulasi elemen hingga pelat quadrilateral (empat titik nodal) berikut ini didasarkan uraian dari Wilson (Wilson, 2002). Langkah langkah pembentukan matriks kekakuan elemen diilustrasikan pada **Gambar 6**. Mula mula elemen segi empat diformulasikan dengan delapan titik nodal (**Gambar 6.a**). Elemen diformulasikan menggunakan rotasi sebagai kebebasan gerak. Masing masing node mempunyai dua rotasi sehingga elemen tersebut mempunyai 16 rotasi nodal (enam belas derajat kebebasan). Kemudian rotasi pada node di tengah sisi elemen diuraikan kearah normal dan tangensial sisi tersebut. Selanjutnya komponen rotasi tangensial diambil nol (**Gambar 6.b**). Dengan demikian elemen tersebut mempunyai 12 rotasi nodal. Selanjutnya perpindahan translasi nodal untuk nodal sudut dimasukkan (**Gambar 6.c**). Untuk itu translasi  $w$  (translasi arah sumbu  $z$ ) pada sisi elemen dianggap terdistribusi dalam fungsi polinom derajat tiga. Setelah didapat matriks kekakuan elemen, dilakukan kondensasi statik untuk mengeliminasi rotasi nodal ditengah sisi elemen (**Gambar 6.d**).



Gambar 6. Proses pembentukan matriks kekakuan elemen pelat empat nodal

Mula mula rotasi dinyatakan dalam rotasi nodal dengan persamaan,

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{25}$$

Dengan matriks fungsi bentuk  $\mathbf{N}$  sama dengan **Persamaan 12**, dan vektor perpindahan nodal adalah

$$\mathbf{d} = (\theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ \theta_{x4} \ \theta_{y4} \ \Delta\theta_{x5} \ \Delta\theta_{y5} \ \Delta\theta_{x6} \ \Delta\theta_{y6} \ \Delta\theta_{x7} \ \Delta\theta_{y7} \ \Delta\theta_{x8} \ \Delta\theta_{y8}) \tag{26}$$

Dengan  $\theta$  adalah rotasi dan  $\Delta\theta$  adalah rotasi relative. Subscript menunjukkan arah dan nomor titik nodal.

Dengan menganggap rotasi tangensial pada sisi elemen adalah nol, maka matriks fungsi bentuk menjadi

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & M_{x1} & M_{x2} & M_{x3} & M_{x4} \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & M_{y1} & M_{y2} & M_{y3} & M_{y4} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Dimana  $M_{xi}$  dan  $M_{yi}$  adalah fungsi bentuk yang terkait dengan rotasi normal relative nodal di tengah sisi elemen. Fungsi bentuk tersebut dapat dilihat pada rujukan (Wilson, 2002). Vektor perpindahan nodal menjadi,

$$\mathbf{d} = (\theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ \theta_{x4} \ \theta_{y4} \ \Delta\theta_5 \ \Delta\theta_6 \ \Delta\theta_7 \ \Delta\theta_8)^T \tag{28}$$

Dengan anggapan bahwa garis lurus tetap lurus setelah deformasi, maka perpindahan suatu titik dalam elemen pelat sejarak  $z$  dari garis netral dapat dinyatakan sebagai berikut, (**Persamaan 29 dan 30**)

$$u_x = z \theta_y(\xi, \eta) \tag{29}$$

$$u_y = -z \theta_x(\xi, \eta) \tag{30}$$

$\xi$  dan  $\eta$  adalah koordinat natural. Hubungan regangan  $\epsilon_\xi$ ,  $\epsilon_\psi$ ,  $\gamma_{\xi\psi}$  dan perpindahan dinyatakan sebagai berikut,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y(\xi, \eta)}{\partial x} \tag{31}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x(\xi, \eta)}{\partial y} \tag{32}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \theta_y(\xi, \eta)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(\xi, \eta)}{\partial x} \right) \tag{33}$$

$\gamma_{\xi\zeta}$  dan  $\gamma_{\psi\zeta}$  dinyatakan dalam perpindahan  $w$  dan rotasi. Penurunannya dapat dilihat pada rujukan (Wilson, 2002). Sebagai hasil akhir hubungan regangan-perpindahan nodal dapat ditulis sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{b}(\xi, \eta) \mathbf{d} = \mathbf{a}(z) \mathbf{b}(\xi, \eta) \mathbf{d} \tag{34}$$

Matriks  $\mathbf{a}(z)$  adalah bagian dari **Persamaan 34** yang mengandung variable  $z$ . Secara ringkas **Persamaan 34** ditulis sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \tag{35}$$

Dengan  $\mathbf{B} = \mathbf{a}(z) \mathbf{b}(\xi, \eta)$ . Maka matriks kekakuan elemen dapat dihitung dengan persamaan,

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \int \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dA \tag{36}$$

$\mathbf{E}$  adalah matriks elastisitas dan  $\mathbf{D} = \int \mathbf{a}^T(z) \mathbf{E} \mathbf{a}(z) dz$ .

Agar matriks kekakuan elemen dari **Persamaan 36** dapat memenuhi patch test untuk momen konstan, maka matriks  $\mathbf{b}$  perlu dimodifikasi.

Matriks kekakuan elemen  $\mathbf{k}$  dari persamaan berdimensi  $16 \times 16$ , mengandung rotasi relative nodal di tengah sisi elemen. Dengan menggunakan kondensasi statik rotasi ini dieliminasi sehingga didapat matriks kekakuan elemen empat titik nodal dengan dua belas derajat kebebasan.

Kemudian matriks kekakuan elemen tersebut dirakitkan kedalam matriks kekakuan struktur sesuai dengan nomor kebebasan gerakannya.

### 6.3 Matriks kekakuan geometri

Matriks kekakuan geometri (*geometric stiffness matrix*) atau disebut juga matriks kekakuan tegangan (*stress stiffness matrix*) digunakan untuk memperhitungkan

pengaruh tegangan aksial atau tegangan membrane (untuk cangkang atau pelat) terhadap matriks kekakuan. Dalam hal tegangan tekan maka kekakuan lentur berkurang. Pada saat beban mencapai beban kritis, matriks kekakuan menjadi singular. Matriks kekakuan geometri dibentuk dari enersi regangan tambahan akibat perubahan konfigurasi struktur. Untuk menjabarkan persamaannya, tinjau struktur dengan perpindahan  $u$ ,  $v$  dan  $w$  dimana vector perpindahan dinyatakan dalam perpindahan nodal,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{37}$$

Enersi regangan suku orde tinggi dapat dinyatakan dalam persamaan (Cook, 2002),

$$U_\sigma = \int \boldsymbol{\delta}^T \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{s} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta} dV \tag{38}$$

dimana,

$$\boldsymbol{\delta} = (u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z)^T \tag{39}$$

Dengan  $\mathbf{0}$  adalah matriks nol dan  $\mathbf{s}$  adalah matriks tegangan akibat beban rujukan

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{xo} & \tau_{xyo} & \tau_{xzo} \\ \tau_{xyo} & \sigma_{yo} & \tau_{yzo} \\ \tau_{xzo} & \tau_{yzo} & \sigma_{zo} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Dengan substitusi **Persamaan 37** ke dalam **Persamaan 39** didapat,

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{G} \mathbf{d} \tag{41}$$

Substitusi **Persamaan 41** ke dalam **Persamaan 38** didapat,

$$U_\sigma = \mathbf{d}^T \mathbf{k}_G \mathbf{d} \tag{42}$$

Dengan,

$$\mathbf{k}_G = \int \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{s} \end{bmatrix} \mathbf{G} dV \tag{43}$$

$\mathbf{k}_G$  adalah matriks kekakuan geometri elemen yang kemudian dirakit kedalam matriks kekakuan geometri struktur  $\mathbf{K}_G$ .

Untuk menguji akurasi dan konvergensi elemen cangkang tipis untuk analisis tekuk, terlebih dahulu dilakukan analisis tekuk untuk balok prismatis dengan beban momen seragam, beban terpusat dan beban merata. Balok prismatis terbuat dari WF600x200x11x17 panjang 8 meter dengan tumpuan sendi dan rol. Hasilnya ditampilkan dalam **Tabel 1**. Selisih momen kritis hasil metode elemen hingga dan persamaan AISC cukup kecil. Ini berarti bahwa model elemen hingga dengan elemen cangkang tipis empat titik nodal telah dapat mencapai konvergensi dan akurat.



**Tabel 1. Momen kritis balok prismatic WF600x200x11x17 hasil analisis dengan metode elemen hingga dan persamaan AISC akibat beban momen seragam, beban terpusat ditengah bentang dan beban merata**

Beban	M <sub>cr</sub> MEH [N-m]	M <sub>cr</sub> pers.[N-m]	Selisih (%)
Momen seragam	306764,4	302462,5	1,42
terpusat	395236,7	397977,1	-0,69
merata	343195,8	343707,5	-0,15

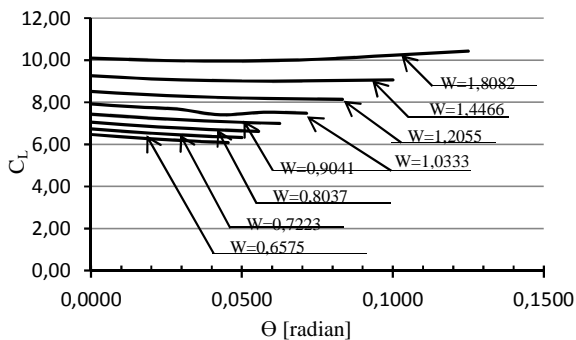
**7. Hasil Analisis dan Diskusi**

Hasil analisis disajikan dalam Gambar 2 sampai dengan Gambar 7. Gambar 2 dan Gambar 3 menyajikan grafik koefisien C<sub>L</sub> untuk berbagai nilai W sebagai fungsi dari tgθ masing masing untuk beban terpusat dan beban merata.

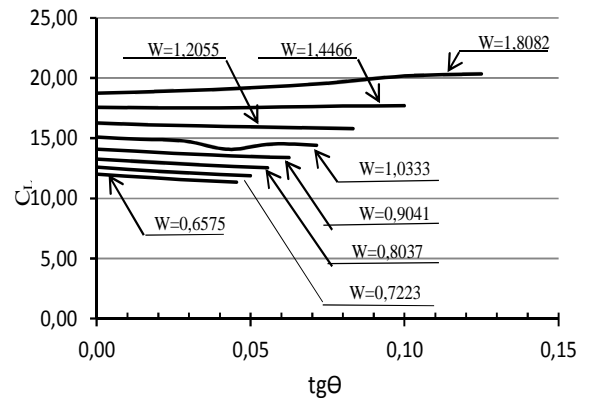
Dari Gambar 7 dan Gambar 8, dapat disimpulkan bahwa untuk beban terpusat maupun beban terbagi merata, nilai C<sub>L</sub> relatif konstan terhadap kemiringan web balok non prismatis. Ada perubahan tetapi kecil, berkisar antara 1% sampai dengan 6%. Ini berarti momen kritis balok kantilever akibat beban terpusat atau beban merata hanya terpengaruh sedikit oleh ketidakprismatisan balok.

Gejala ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Momen lentur akibat beban merata dan beban terpusat di ujung bebas terdistribusi dari nol diujung bebas dan mencapai maksimum di ujung jepit. Maka tegangan juga terdistribusi dari nol diujung bebas dan maksimum diujung jepit. Pada daerah ujung bebas, karena tegangannya kecil, maka pengurangan material didaerah tersebut tidak mengurangi ketahanan terhadap stabilitas balok.

Gambar 9 dan Gambar 10 menyajikan grafik nilai C<sub>H</sub> yaitu faktor posisi beban untuk beban pada flens atas. Nilai C<sub>H</sub> lebih kecil dari satu. Dari Gambar 9 dan Gambar 10 dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai kemiringan tepi badan, semakin besar nilai C<sub>H</sub>. Artinya semakin kecil pengurangan momen kritis akibat posisi beban diatas pusat geser.



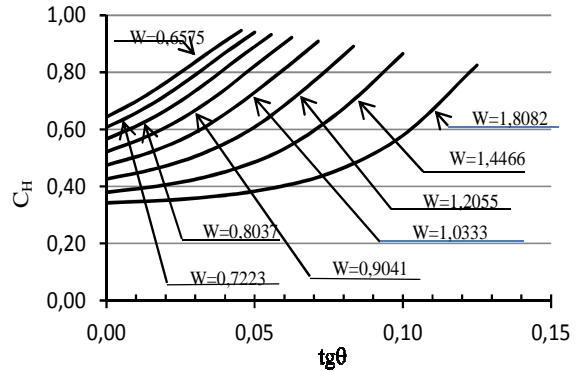
**Gambar 7. Koefisien C<sub>L</sub> untuk beban terpusat sebagai fungsi dari tgθ untuk berbagai nilai W**



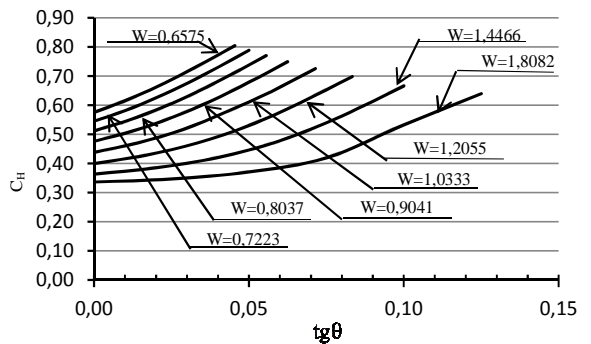
**Gambar 8. Koefisien CL untuk beban merata sebagai fungsi dari tgθ untuk berbagai nilai W**

Perilaku ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Untuk posisi beban pada flens atas, pada waktu terjadi tekuk akan timbul perpindahan rotasi φ dan timbul momen puntir tambahan sebesar PΔ dimana Δ perpindahan lateral titik tangkap beban (lihat Gambar 11). Arah momen puntir tambahan ini adalah searah dengan arah putaran akibat tekuk φ sehingga membuat balok semakin tidak stabil. Maka momen kritis untuk posisi beban pada flens atas lebih kecil dibanding posisi beban pada pusat geser, sehingga nilai C<sub>H</sub> lebih kecil satu. Besarnya Δ adalah,

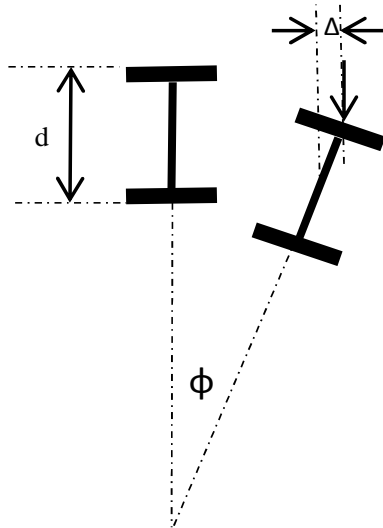
$$\Delta = \frac{1}{2} d \sin \phi \tag{44}$$



**Gambar 9. Koefisien CH untuk beban terpusat sebagai fungsi dari tgθ untuk berbagai nilai W**



**Gambar 10. Koefisien CH untuk beban merata sebagai fungsi dari tgθ untuk berbagai nilai W**

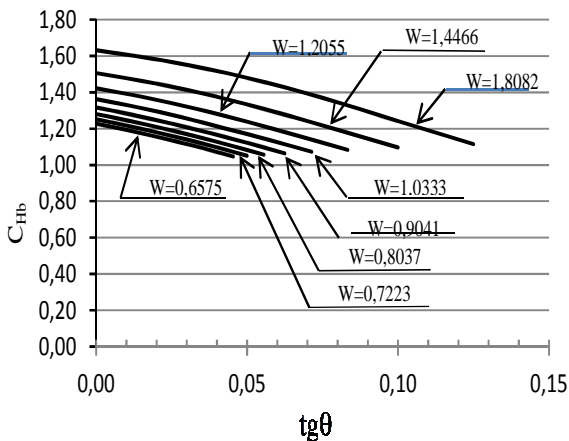


Gambar 11. Pengaruh posisi beban

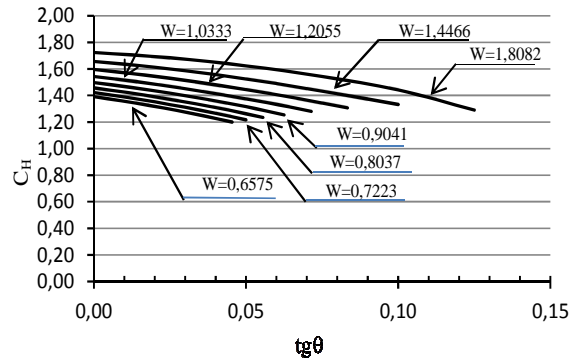
Pada balok non prismatis, besarnya  $d$  pada lokasi mendekati ujung bebas semakin mengecil, sehingga  $\Delta$  juga mengecil dan pengaruhnya mengecil. Semakin besar  $\theta$ , semakin kecil  $d$  sehingga semakin kecil juga pengaruh  $P\Delta$ . Hal ini membuat factor  $C_H$  membesar.

Gambar 12 dan 13 menyajikan factor posisi beban untuk beban pada flens bawah  $C_H$ . Untuk posisi beban pada flens bawah, nilai  $C_H$  lebih besar satu. Kebalikan dari pada posisi beban diatas, untuk posisi beban dibawah, nilai  $C_H$  mengecil bila kemiringan web membesar.

Penjelasan untuk ini sama dengan penjelasan untuk  $C_H$ . Posisi pada flens bawah, momen punter  $P\Delta$  mempunyai arah kebalikan dari pada arah putaran akibat tekuk  $\phi$  sehingga meningkatkan momen kritis. Hal ini menyebabkan nilai  $C_H$  lebih besar satu. Untuk balok nonprismatis, bila  $\theta$  membesar maka tinggi penampang  $d$  mengecil dan  $\Delta$  juga mengecil sehingga pengaruh  $P\Delta$  juga mengecil. Hal ini menyebabkan nilai  $C_H$  juga mengecil.



Gambar 12. Koefisien CH untuk beban terpusat sebagai fungsi dari tgθ untuk berbagai nilai W



Gambar 13. Koefisien CH untuk beban terpusat sebagai fungsi dari tgθ untuk berbagai nilai W

### 8. Persamaan untuk $C_L$ dan $C_H$

Data data nilai  $C_L$  dan  $C_H$  dan untuk berbagai nilai  $W$  dan  $\theta$  masing masing diregresikan untuk mendapatkan persamaan yang dapat digunakan untuk memprediksikan besarnya  $C_L$  dan  $C_H$  dan menghasilkan persamaan sebagaimana di bawah ini.

Persamaan untuk  $C_L$  untuk beban terpusat di pusat geser ujung balok adalah sebagai berikut,

$$C_L = 3,4854 W - 2,6961 \theta + 4,0931 \quad (45)$$

Persamaan ini diperoleh melalui regresi dengan  $R^2 = 0,9873$ .

Persamaan untuk  $C_L$ , untuk beban merata yang bekerja di pusat geser balok adalah,

$$C_L = 6,9197 W - 0,1916 \theta + 7,3575 \quad (46)$$

dengan nilai  $R^2$  sebesar 0,9787.

Persamaan untuk  $C_H$  untuk beban terpusat di flens atas ujung balok ada dua persamaan.

Untuk  $1 \leq W \leq 1,8082$

$$C_H = -0,1302W^2 + 4,6032\theta + 0,6138 \quad (47)$$

Dengan nilai  $R^2$  sebesar 0,8745.

Untuk  $0,6575 \leq W < 1$

$$C_H = -0,3785W^2 + 6,6306\theta + 0,7984 \quad (48)$$

dengan  $R^2$  sebesar 0,9901.

Persamaan untuk  $C_H$ , untuk beban merata di flens atas.

Untuk  $1 \leq W \leq 1,8082$

$$C_H = -0,0896W^2 + 3,0033\theta + 0,5364 \quad (49)$$

nilai  $R^2$  sebesar 0,9029

Untuk  $0,6575 \leq W < 1$

$$C_H = -0,3196W^2 + 4,36\theta + 0,711 \quad (50)$$

nilai  $R^2$  sebesar 0,9876.

Persamaan untuk  $C_H$  untuk beban terpusat di flens bawah.

Untuk  $1 \leq W \leq 1,8082$

$$C_H = 0,143W^2 - 36,6925\theta^2 + 1,1468 \quad (51)$$

Untuk  $0,6575 \leq W < 1$

$$C_H = 0,2614W^2 - 67,7509\theta^2 + 1,0808 \quad (52)$$

dengan  $R^2$  sebesar 0,9412.

Persamaan untuk  $C_H$  untuk beban merata di flens bawah.

Untuk  $1 \leq W \leq 1,8082$

$$C_H = 0,1085W^2 - 30,4377\theta^2 + 1,3771 \quad (53)$$

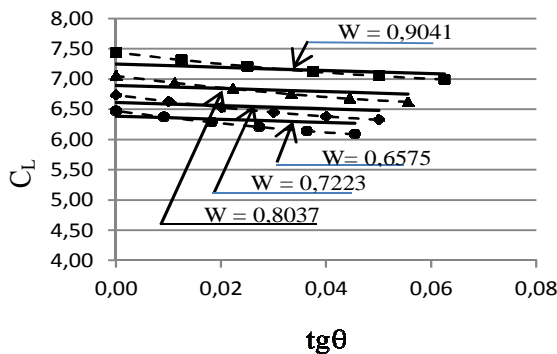
dengan nilai  $R^2$  sebesar 0,9381.

Untuk  $0,6575 \leq W < 1$

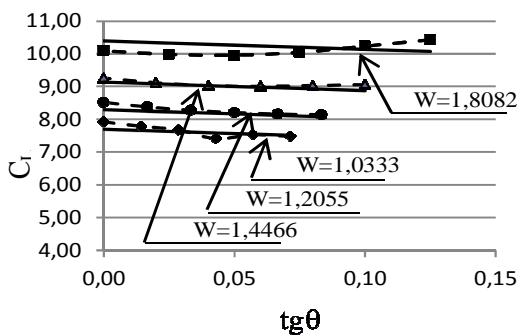
$$C_H = 0,3363W^2 - 67,2638\theta^2 + 1,2105 \quad (54)$$

dengan nilai  $R^2$  sebesar 0,9459

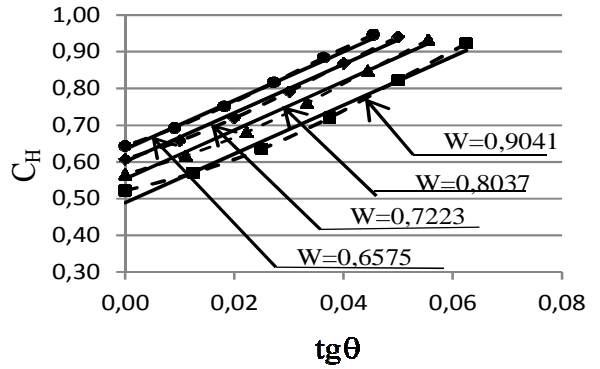
**Persamaan 45** sampai dengan **Persamaan 54** digambarkan beserta datanya disajikan pada **Gambar 9** sampai dengan **Gambar 20**. Untuk memperlihatkan posisi data dengan jelas, persamaan digambarkan secara dua dimensi untuk setiap data  $W$  sehingga kurva merupakan fungsi dari  $\theta$ . Kurva dengan garis tebal adalah kurva hasil regresi.



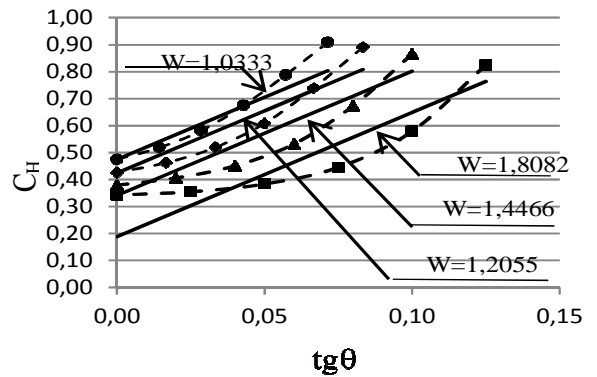
Gambar 14. Kurva regresi CL untuk beban terpusat dibanding data untuk  $W = 0,6575$



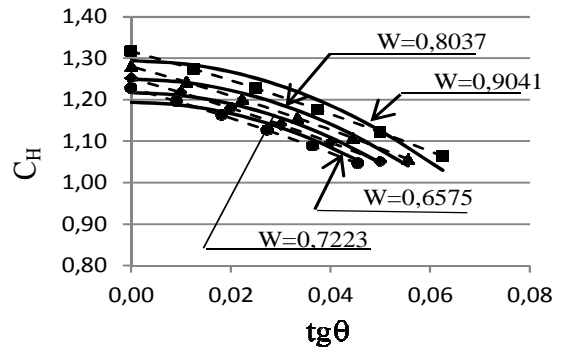
Gambar 15. Kurva regresi CL untuk beban terpusat dibanding data untuk  $W = 1,0333$



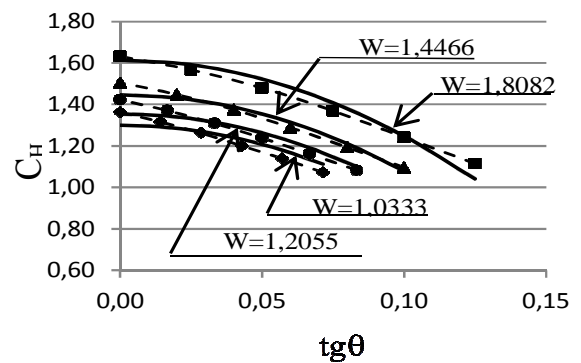
Gambar 16. Kurva regresi  $C_H$  untuk beban terpusat di flens atas untuk  $W = 0,6575$



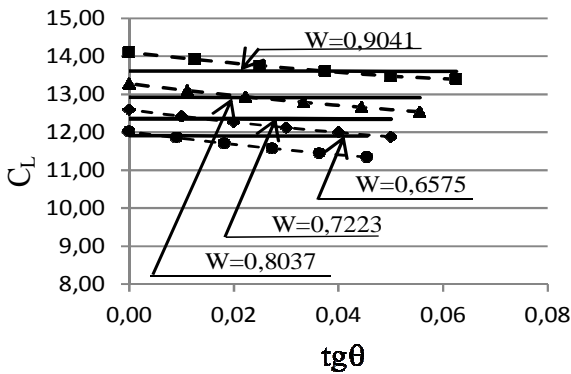
Gambar 17. Kurva regresi  $C_H$  untuk beban terpusat di flens atas untuk  $W = 1,0333$



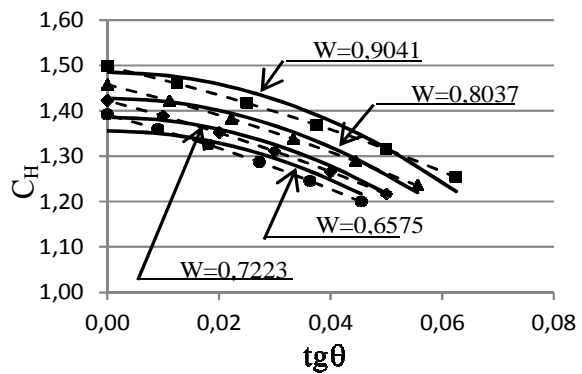
Gambar 18. Kurva regresi  $C_H$  untuk beban terpusat di flens bawah untuk  $W = 0,6575$



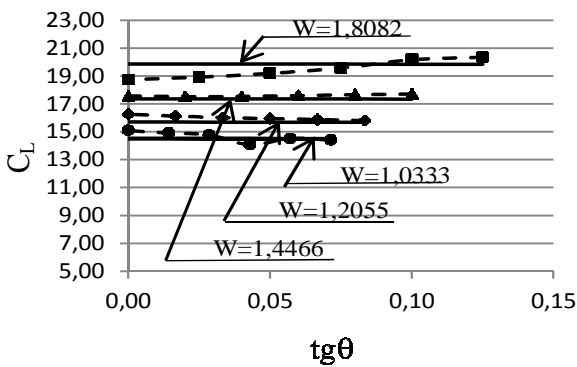
Gambar 19. Kurva regresi  $C_H$  untuk beban terpusat di flens bawah untuk  $W = 1,0333$



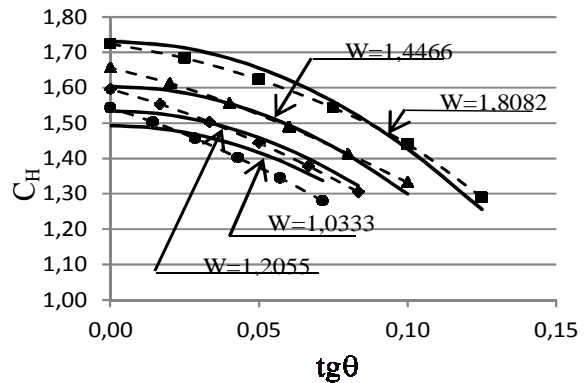
Gambar 20. Kurva regresi CL untuk beban merata dibanding data untuk  $W = 0,6575$



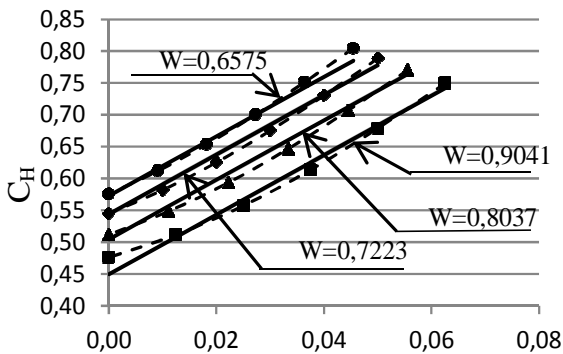
Gambar 24. Kurva regresi CH untuk beban merata di flens bawah untuk  $W = 0,6575$



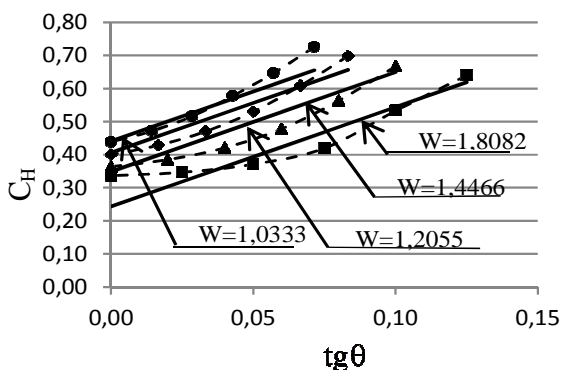
Gambar 21. Kurva regresi CL untuk beban merata dibanding data untuk  $W = 1,03333$



Gambar 25. Kurva regresi CH untuk beban merata di flens bawah untuk  $W = 1,03333$



Gambar 22. Kurva regresi CH untuk beban merata di flens atas untuk  $W = 0,6575$



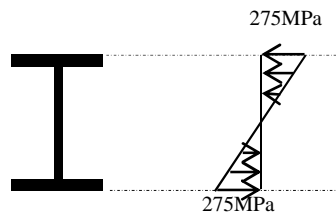
Gambar 23. Kurva regresi CH untuk beban merata di flens atas untuk  $W = 1,03333$

## 9. Kontrol Tegangan

Analisis yang dilakukan dalam studi ini adalah dengan anggapan material masih elastis. Berikut ini disajikan hasil pemeriksaan tegangan pada kondisi bifurkasi untuk memperlihatkan bahwa persamaan-persamaan yang didapatkan masih berlaku. Untuk itu ditinjau balok yang paling pendek yaitu balok dengan nilai  $W = 1,8082$ . Misalnya balok yang ditinjau mempunyai penampang IWF1100x200x11x17 dan tegangan leleh 400 MPa. Dengan **Persamaan 3** dapat dihitung panjang balok yang sedang ditinjau yaitu. Untuk  $W=1,8082$  momen kritis terbesar adalah bila  $\theta = 0$  dan beban pada flens bawah.  $C_L$  dihitung dengan persamaan 42 dan  $C_H$  dihitung dengan **Persamaan 44**. Dengan menggunakan **Persamaan 6** dapat dihitung momen kritis. Dan tegangan dapat dihitung. Hasil hitungan disajikan dalam **Tabel 2**. Dalam **Tabel 2** tersebut, angka  $0,7F_y$  adalah untuk memperhitungkan tegangan sisa sebesar  $0,3 F_y$ . Dari hasil hitungan tersebut, dapat disimpulkan bahwa balok masih dalam kondisi elastis karena tegangan terbesar yang terjadi pada saat momen kritis tercapai lebih kecil dari pada  $0,7F_y$ .

Tabel 2. Hasil pemeriksaan tegangan

Parameter tak berdimensi W	1,8082
Panjang balok (dari pers 3)	6795 mm
$C_L$	10,39
$C_H$	1,61
$M_{cr}$	1553121373 N-mm
$S_x$	5644517 mm <sup>3</sup>
Tegangan $f = M_{cr}/S_x$	275 MPa
Tegangan leleh $F_y$	400 MPa
$0,7 F_y$	280 MPa
Kesimpulan	Masih elastik



Gambar 21. Distribusi tegangan pada penampang balok IWF1100x200x11x17 pada saat bifurkasi

Sudah barang tentu untuk suatu nilai W tidak semua penampang memenuhi syarat elastik, tetapi selalu ada penampang yang dapat memenuhi syarat elastik.

## 10. Kesimpulan

Telah dipelajari perilaku tekuk torsi lateral balok kantilever nonprismatis dan didapat kesimpulan sebagai berikut.

1. Bila beban bekerja pada pusat geser, maka besarnya momen kritis balok nonprismatis tidak berbeda jauh dari balok kantilever prismatis. Perbedaan terletak antara 1 sampai dengan 6%.
2. Bila beban bekerja pada sayap atas (tepi atas badan), pengaruh destabilisasi dari lokasi beban berkurang dengan bertambahnya kemiringan badan. Artinya rasio momen kritis akibat beban diflens atas dibanding momen kritis akibat beban pada pusat geser semakin bertambah dengan bertambahnya kemiringan badan.
3. Bila beban bekerja pada sayap bawah (tepi bawah badan), rasio momen kritis akibat beban yang bekerja di sayap bawah terhadap momen kritis yang bekerja di pusat geser semakin berkurang dengan bertambahnya kemiringan badan.
4. Telah didapatkan persamaan persamaan untuk memperkirakan besarnya koefisien  $C_L$  dan  $C_H$

## 11. Ucapan terima kasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Universitas Katolik Parahyangan yang telah mengizinkan penulis menggunakan lisensi program SAP 2000 v 14.

## Daftar Pustaka

- American Institute of Steel Construction, 2010, *Specification for Structural Steel Buildings*, American Institute of Steel Construction, Illinois.
- Andrade, A., Camotim, D., Costa, P.P., 2007, On The Evaluation of Elastic Critical Moment in Doubly and Singly Symetric I Section Cantilevers, *Journal of Constructional Steel Research*, 63, pp.894-908.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., 2002, *Concept and Application of Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons.
- Denan, F, Osman, M.H., Saad, S., 2010, The Study of Lateral Torsional Buckling Behaviour of Beam With Trapezoid Web Steel Section by Experimental and Finite Element Analysis, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences* 2(3).
- Dowswel I.B., 2004, Lateral Torsional Buckling of Wide Flange Cantilever Beams, *Engineering Journal*, Third Quarter, 2004.
- Javidinejad, A., 2010, Buckling of Beams and Column Under Combined Axial and Horizontal Loading With Various Axial Loading Application Location, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol 42 No 4 pp19-20.
- Kabir, M.Z., Zeif, A.E. 2010, *Lateral Torsional Buckling of Retrofitted Steel I Beams Using FRP Sheets*, Transaction A: Civil Engeering Vol 17, No 4 pp 262-272, August 2010.
- Kurniawan, C.W., Mahendran, M., 2011, Elastic Lateral Torsional Buckling of LiteSteel Beams under Transverse Loading, *International Journals of Steel Structures*, 11(4),pp 395-407.
- Marques, L., 2012, *Tapered Steel Members: Flexural dan Lateral Torsional Buckling*, Disertations, Universidade de Coimbra.
- Nathercod, D.A., 1973, The Effective Length of Cantilevers as Governed By Lateral Buckling, *The Structural Engineer*, Vol. 51.
- Pinarbasi, S., 2011, Lateral Torsional Buckling of Rectangular Beams Using Variational Iteration Method, *Scientific Research and Essays* Vol 6 (6),pp. 1445-1457.
- Raftoyiannis, I.G., Adamakos, T, 2010, Critical Lateral Torsional Buckling Moments of Steel Web Tapered I-Beams, 2010, *The Open Construction and Building Technology Journal*.4, pp105-112.

- Showkati, H., 2008, Lateral Torsional Buckling of Castelated Beam, *Iranian Journal of Science and Technology*, Vol. 32, No B2, pp 153-156.
- Rusul, H., 2013, *Distorsional Lateral Torsional Buckling Analysis of Beams of Wide Flange Cross Sections*, Thesis, Dept of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Ottawa.
- Trahair, N.S., 2010, *Steel Cantilever Strength By Inelastic Lateral Buckling*, Research Report R912, School of Civil Engineering, The University of Sydney.
- Timoshenko, Gere, 1963, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill.
- Trahair, N.S., 2010, *Steel Cantilever Strength By Inelastic Lateral Buckling*, Research Report, School of Civil Engineering, The University of Sydney.
- Wilson, E.L., 2002, *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*, Computer and Structures. Inc., Berkeley, California, USA.
- Younes, R.M., Farsakh, G.A., Hunaiti, Y.M. (2009), Effect of Welding on Lateral Torsional Buckling Resistance of I Shaped Built-up Steel, *Jordan Journal of Civil Engineering*, Vol 3 No 4.
- Yuan, W.B., Kim, B.S., Chen, C.Y., 2013, Lateral Torsional Buckling of Steel Web Tapered Tee Section Cantilevers, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 87, pp 31-37.
- Ziemian, R., (2010), *Guide To Stability Design Criteria for Metal Structures*, John Wiley & Sons, Inc. pp 226-227.