PENYELESAIAN SOLITON PADA PERSAMAAN GELOMBANG

G. Nugroho
Laboratorium Konversi Energi dan Pengkondisian Lingkungan
Jurusan Teknik Fisika FTI-ITS
Jl. Arif Rahman Hakim, Sukolilo, Surabaya
Email : gunawan@ep.its.ac.id
gunawanzz@yahoo.com

Abstrak

Persamaan gelombang ditinjau kembali pada penelitian ini. Penyelesaian persamaan gelombang berbentuk soliton dapat dilakukan dengan menggunakan 2 syarat menurut tinjauan spatial dalam hal dispersi gelombang. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penyelesaian persamaan gelombang berbentuk periodik diubah ke dalam bentuk soliton dengan menggunakan deret kemudian deret tersebut digeneralisir. Analisa satu dimensi menunjukkan bahwa syarat-syarat yang diperlukan dapat terpenuhi dengan mudah, sedangkan pada kasus dua maupun tiga dimensi, muncul term nonlinier yang cukup kompleks

Kata kunci : *Persamaan gelombang, soliton, dispersi*

Abstract

The wave equation is reviewed in this research. Soliton solution of wave equation can be generated by two constrains according to spatial dispersion. Method that used in current investigation is periodic solution of wave equation transformed to soliton by utilizing power series. The results are then generalized. One dimesional analysis shows that the constrains is trivially fulfilled, but two and three dimensional studies show that nonlinear term is appeared, therefore the problems are not easily solved.

Keywords *: Wave equation, soliton, dispersion*

Pendahuluan

Soliton memegang peranan penting dalam menggambarkan banyak fenomena fisis. Soliton merupakan hasil penyelesaian persamaan diferensial nonlinier. Nonlinieritas persamaan diferensial ini dalam tinjauan fisis merupakan kompetisi dari dua variabel yaitu dispersi dan nonlineritas sistem-sistem fisis. Sistem-sistem tersebut mencakup shallow water yang digambarkan dengan persamaan Korteweg-deVries, optika nonlinier diwakili persamaan Helmholtz, fisika partikel yang salah satunya digambarkan dalam persamaan Sine-Gordon, model Skyrmion dan bidang-bidang aplikasi lainnya (Mourachkine A, 2004). Penemuan terbaru menunjukkan bahwa soliton juga diamati dalam kondensasi Bose-Einstein (Adhikari, S K, 2003). Sementara itu, telah dikembangkan juga konstruksi persamaan Navier-Stokes dalam bentuk lengkap menjadi persamaan gelombang untuk mendeskripsikan aliran turbulen serta kemungkinan solusi soliton dalam persamaan tersebut (Nugroho & Biyanto, 2007). Adapun analisis tersebut dapat diperluas ke dalam fenomena transport secara umum.

Dalam bidang optika nonlinier, sistem pandu gelombang planar nonlinier telah menjadi bahan penelitian yang intensif baik secara numerik maupun analitik. Baru-baru ini dilaporkan bahwa perambatan gelombang planar optik dalam pandu gelombang planar dengan medium nonlinier orde tiga mempunyai distribusi medan spatial tidak uniform dalam arah lateral paralel terhadap bidang dan mencocoki model soliton (Harsoyono H dkk, 2003). Kemudian untuk kondisi awal terlokalisasi, teknik scattering invers meramalkan bahwa sejumlah terhingga soliton didapatkan tidak bergantung pada apakah gangguan awal adalah box rectangular ataupun profil sech. Ditunjukkan bahwa gangguan box rectangular amplitudo kecil menghasilkan banyak soliton, sedangkan gangguan amplitudo besar hanya menghasilkan satu soliton (Grimshaw R dkk) persamaan Sine-Gordon secara khusus memainkan peran penting dalam fisika zat padat. Persamaan ini menggambarkan domain wall pada ferromagnet, dislokasi pada kristal dan fluxon dalam sambungan Josephson panjang. Baru-baru ini ditunjukkan bahwa mode internal Sine-Gordon tidak hanya muncul untuk beberapa gaya luar tetapi dapat menjadi tidak stabil. Jika tingkat ketidakstabilan ini sangat besar, maka soliton dapat dihancurkan dan kemudian dapat ditransformasikan menjadi antisoliton dan dua soliton baru (Alamousi S dkk, 1997).

Upaya yang lebih mendasar dilakukan oleh Shabat (2005), dinyatakan bahwa evolusi nonlinier yang berhubungan dengan problem spectral dapat disusun menjadi hierarki. Sepanjang pengetahuan penulis, seluruh penelitian tentang soliton mendasarkan diri pada analisa sistem nonlinier baik mencakup jenis-jenis soliton yang dapat dihasilkan untuk menyelesaikan persamaan, interaksi soliton, pemecahan soliton, dan sebagainya (1-12). Kontribusi yang akan diberikan dalam penelitian ini adalah menghasilkan soliton dalam persamaan gelombang linier dengan metode deret dan syarat-syarat tertentu. Oleh karena itu penelitian ini akan meninjau persamaan gelombang linier, kemudian penyelesaian periodik darinya akan diubah kedalam bentuk profil soliton dan digeneralisir. Solusi yang menimbulkan syarat-syarat yang harus dipenuhi sepenuhnya mengikuti May Ong (1994).

Penyelesaian Persamaan Gelombang

Ditinjau persamaan gelombang sebagai berikut,

$$\Delta\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Untuk kasus satu dimensi spatial arah x, persamaan (1) dapat ditulis,

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

Penyelesaian persamaan (2) secara umum adalah sebagai berikut,

$$\Psi(x,t) = A\sin(x \pm t) + B\cos(x \pm t) \qquad (3)$$

dimana A dan B adalah konstanta yang tergantung kepada kondisi batas sistem. Sekarang dianggap kondisi batas sistem sedemikian hingga persamaan (3) tereduksi menjadi,

$$\Psi(x,t) = B\cos(x \pm t) \qquad (4)$$

Ekspresi di atas dapat dinyatakan dalam term deret cosinus sebagai berikut (Kreyszig, 1993 dan Pipes dkk, 1981),

$$\Psi(x,t) = B\left\{1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - ...\right\} \qquad (5)$$

dimana $\xi = x \pm t$.

Pembentukan Soliton

Untuk membentuk soliton pada penyelesaian persamaan gelombang, maka penyelesaian tersebut akan diekivalenkan dengan profil soliton sebagai berikut,

$$\Psi(x,t) = C\sec h(x \pm t) \qquad (6)$$

Dengan cara yang sama, persamaan di atas diubah kedalam bentuk deret menjadi,

$$\Psi(x,t) = C\left\{1 + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} + ...\right\} \qquad (7)$$

Kemudian persamaan (5) dan (7) disamakan maka akan didapat ekspresi C adalah

$$C = B\left\{1 - \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} - ....\right\}\left\{1 + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} + ...\right\} \qquad (8)$$

Sehingga berdasarkan hasil ekivalensi tersebut persamaan (6) secara umum dapat ditulis sebagai,

$$\Psi(x,t) = C(x \pm t)D(x \pm t) \qquad (9a)$$

atau dapat ditulis,

$$\Psi(x,t) = C(\xi)D(\xi) \qquad (9b)$$

Nilai $\xi = x \pm t$ dapat digeneralisir dengan meninjau penyelesaian persamaan gelombang bersama faktor dispersi sebagai berikut,

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(\omega t + kx)} \qquad (10)$$

dari (9a) parameter waktu t dapat dibuat berdiri sendiri dan sebagai konsekuensinya nilai x yang tergeneralisasikan, yaitu f(x) dengan $\xi = f(x) \pm t$.

Berikutnya, untuk memberikan hasil yang konsisten, maka persamaan (9) disubstitusikan ke dalam persamaan (1) dengan menggunakan aturan rantai seperti di bawah,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(C\frac{\partial D}{\partial \xi} + D\frac{\partial C}{\partial \xi} \right)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \left(C\frac{\partial\ D}{\partial \xi^2} + D\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial C}{\partial \xi}\frac{\partial D}{\partial \xi} \right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left(C\frac{\partial\ D}{\partial \xi^2} + D\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial C}{\partial \xi}\frac{\partial D}{\partial \xi} \right)$$

sehingga substitusi persamaan di atas memenuhi persamaan gelombang dengan beberapa konstrain sebagai berikut,

(i) $(\nabla f)^2 = 1$ (11)

(ii) $\nabla^2 f = 0$ (12)

Dengan demikian dari ekspresi (11) dan (12) dapat dianalisis dengan masing-masing ekspresi untuk arah satu sampai tiga dimensi. Untuk kasus arah perambatan satu dimensi terlihat bahwa f(x) = x atau -x., untuk kasus dua dimensi dapat ditulis,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 1 = 0$$

dan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Kedua persamaan di atas dapat digabung menjadi satu sebagai berikut,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1 = 0 \qquad (13)$$

yang mempunyai solusi,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left\{ \frac{A}{\left[C_1 \sin\sqrt{A}x + C_2 \cos\sqrt{A}x \right]^2} \right\} + \frac{1}{2}\ln\left\{ \frac{\left[C_3 \sin\sqrt{A-1}y + C_4 \cos\sqrt{A-1}y \right]^2}{A-1} \right\} \qquad (14)$$

Sedangkan untuk kasus tiga dimensi, dengan menggunakan cara yang sama pada uraian sebelumnya maka formulasinya dapat diekspresikan seperti di bawah,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + 1 = 0 \qquad (15)$$

yang mempunyai penyelesaian

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln\left\{ \frac{A}{\left[C_1 \sin\sqrt{A}x + C_2 \cos\sqrt{A}x \right]^2} \right\} + \frac{1}{2}\ln\left\{ \frac{B}{\left[C_3 \sin\sqrt{B}y + C_4 \cos\sqrt{B}y \right]^2} \right\} + \frac{1}{2}\ln\left\{ \frac{A+B+1}{\left[C_5 \sin\sqrt{-A-B-1}z - C_6 \cos\sqrt{-A-B-1}z \right]^2} \right\} \qquad (16)$$

Dalam persamaan (16) terlihat bahwa perlu 6 kondisi batas untuk membuat nilai f(x,y,z) menjadi eksplisit.

Pada analisa dua maupun tiga dimensi terlihat bahwa pemenuhan syarat-syarat untuk pembentukan soliton pada persoalan persamaan gelombang membawa kepada persoalan nonlinieritas yang cukup kompleks. Secara matematis, persoalan ini membawa kembali kepada persoalan nonlinieritas dari awal. Namun tidak demikian secara fisis. Hasil soliton pada persamaan gelombang yang linier dapat menggiring ke dalam konsekuensi yang tidak biasa. Konsekuensi ini menyangkut bidang-bidang seperti optika, hidrodinamika, fisika partikel dan sebagainya yang akan memerlukan pembahasan tersendiri untuk menguraikannya.

Kesimpulan

Persamaan gelombang telah dianalisis dengan mengambil arah-arah spatial sebagai parameter utama dalam tinjauan dispersi. Gelombang soliton dapat digenerasikan dengan menggunakan metode deret dengan 2 syarat yang harus dipenuhi (constrain). Analisis menunjukkan bahwa pada kasus satu dimensi, gelombang soliton dapat dihasilkan dalam term linier. Analisis dua dan tiga dimensi memberikan hasil nonlinieritas yang cukup kompleks karena terdapat term kuadratik pada salah satu syarat yang ditentukan.

Daftar Pustaka

Adhikari, S, K,, 2003, ”Bright Vortex Solitons in Bose Condensates”, *arXiv:cond-mat/0308415v4*.

Alamousi, S, dkk, 1997, ”Real Time Dynamics of Soliton Diffusion”, *arXiv:cond-mat/9708225v1*.

Fairlie, D, B,, 2005, ”Implicit Solutions to Some Lorentz Invariant Nonlinear Equations Revisited”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol 12, Number 3, pp. 449 – 456.

Grimshaw, R, dkk., “Generation of Large-Amplitude Solitons in the Extended Korteweg-de Vries Equation”.

Grosset, M, dan Veselov, P., 2005, ”BernoulliNumbers and Solitons”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol12 Number 4, pp. 469 – 474.

Nugroho G. dan Biyanto T.R., 2007, “Analisis Soliton pada Gelombang Hidrodinamika Berdasarkan Persamaan Maxwell Navier-Stokes”, *Jurnal Reaktor UNDIP*, vol. 10, hal. 42 – 45.

Harsoyono, H dkk, 2003, ”Nonlinear OpticalWaveguide Coupling with Planar Solitonic Field Profile”, *Elsevier Optics Communications*, pp. 63 – 71.

Kreyszig, E. 1993, ”*Advanced Engineering Mathematics 7th Ed*”, John Wiley & Sons Inc., Singapore.

Melrose D. B. dan Stoneham R. J., 1977, ”Generalized Kramers-Kronig Formula for Spatially Dispersive Media”, *J.Phys A:Math. Gen.*, Vol 10, No 1.

Mourachkine A., 2004, ”NonlinearExcitations:Solitons”, Ar*Xiv:cond-mat/0411452v1*.

M.O. Tjia, 1994, ”*Gelombang*”, Dabara Publishers, Solo, Indonesia.

Pipes L. A. dan Harvill L. R. 1981, ”*Applied Mathematics for Engineers and Physicists*”, McGrawHill International Book Company.

Shabat A., 2005, ”Universal Solitonic Hierarchy”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol 12, Supplement 1, pp. 614 – 624.