

Desain Sistem Kontrol Dengan Metode Penempatan Kutub (*Pole Placement*) Pada Motor DC Servo

Fendy Santoso

Fakultas Teknologi Industri, Jurusan Teknik Elektro, Universitas Kristen Petra
e-mail: fendy@petra.ac.id

Abstrak

Ada banyak metode dalam perancangan sistem kontrol. Salah satunya adalah perancangan sistem kontrol menggunakan metode penempatan kutub (*pole placement*). Setelah model matematika dapat diperoleh, langkah selanjutnya adalah menentukan performansi sistem yang diinginkan. Dari hasil design berdasar kriteria performansi yang diinginkan ditentukan lokasi pole yang diperlukan. Dan akhirnya dapat dihitung besarnya gain umpan balik keadaan, dan kompensasi gain masukan.

Makalah ini membahas perancangan sistem kontrol dengan metode penempatan kutub, dengan plant motor dc servo. Setelah dilakukan perhitungan dilakukan simulasi sistem dengan program Matlab. Dari hasil simulasi dapat dilihat respon sistem sesungguhnya telah sesuai dengan kriteria perancangan. Hal itu terjadi karena, lokasi pole sistem asal digeser menuju lokasi pole yang diperlukan, sesuai dengan kriteria design, yaitu: nilai lonjakan maksimum dan settling time.

Kata kunci : sistem kontrol, penempatan kutub, motor dc servo.

Abstract

There are many methods in designing control systems. One of them is pole placement method. After mathematical model is obtained, the next step is to determine the system's performances that is wanted. Thus poles location can be determined. And Finally, the values of the state feedback gain and input setting gain can be calculated.

This paper explained the control system design using pole placement method, applicated in a dc servomotor plan. After calculation has done the next step was to simulate system's performance with Matlab. From the simulation result could be seen that system's responses match with design criteria. Those things could be done because system's pole locations have moved to the location that was needed, based on design criteria: maximum overshoot and settling time.

Keywords : control system, pole placement, dc servomotor.

Pendahuluan

Kestabilan dan respon sistem yang baik merupakan permasalahan dalam perancangan sistem kontrol. Dengan metode pole placement kita dapat merancang suatu sistem kotrol yang stabil dan memiliki respon dinamis sesuai dengan kriteria perancangan misalnya: *maximum overshoot* (Mp) dan *settling time* (ts), asalkan model matematika sistem dapat diketahui.

Teori Kontrol Modern dan Klasik

Metode ruang keadaan merupakan suatu metode analisis dalam teori kontrol modern. Teori kontrol modern berbeda dengan teori kontrol konvensional. Teori kontrol modern dapat

diterap kan pada sistem multi masukan multi keluaran, yang kondisinya linier ataupun tak linier, dengan parameter sistem konstan atau berubah terhadap waktu. Sedangkan teori kontrol konvensional hanya dapat diterapkan pada sistem satu masukan, satu keluaran, dengan parameter konstan.

Dinamika sistem dapat dinyatakan ke dalam bentuk persamaan ruang keadaan (*state space*) seperti pada persamaan (1).

Persamaan keadaan sistem (*state space equations*):

$$\frac{dx}{dt} = [A]x(t) + [B].u(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \dots + b_{1r}u_r(t)$$

Catatan: Diskusi untuk makalah ini diterima sebelum tanggal 1 Juni 2003. Diskusi yang layak muat akan diterbitkan pada Jurnal Teknik Elektro volume 3, nomor 2, September 2003.

$$\begin{aligned}
 x_2 &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + \\
 &\quad b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \dots + b_{2r}u_r(t) \\
 &\quad \vdots \\
 x_n &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + \\
 &\quad b_{n1}u_1(t) + b_{n2}u_2(t) + \dots + b_{nr}u_r(t)
 \end{aligned}$$

x : vektor keadaan (nx1)
 A : matriks sistem (nxn)
 B : matriks masukan (nxr)
 u : vektor masukan (rx1)
 y : vektor keluaran (px1)
 c : matriks keluaran (pxn)
 D : matriks yang menunjukkan hubungan masukan dan keluaran (pxr)

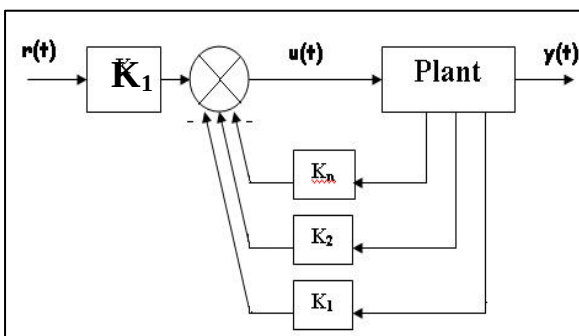
Sedangkan persamaan keluaran sistem:
 $Y = [C] \cdot x(t)$ (2)

$$\begin{aligned}
 y_1 &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) \\
 y_1 &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) \\
 &\quad \vdots \\
 y_n &= c_{n1}x_1(t) + c_{n2}x_2(t) + \dots + c_{nn}x_n(t)
 \end{aligned}$$

Hubungan persamaan keadaan dengan fungsi alih sistem:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3)$$

1. Sistem Kontrol Dengan Metode Penempatan kutub (Pole Placement)



Gambar 2. Sistem Kontrol Dengan Umpan Balik Keadaan (state feedback)

Gambar 2 merupakan blok diagram sistem kontrol dengan metode penempatan kutub. Tujuan sistem tersebut adalah menentukan vektor kontrol u sedemikian rupa sehingga respon sistem sesuai dengan kriteria design.

Sistem diatas dapat dibawa ke model persamaan ruang keadaan dan persamaan keluaran seperti pada persamaan (5) dan (6).

$$U = -[k][x(t)] \quad (4)$$

$$\left[\frac{dx}{dt} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (5)$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1}] x(t) \quad (6)$$

$$(A - Bk) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & \dots & (-a_{n-1} - k_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Metode pole placement tersebut menggunakan formula ackerman yang dinyatakan dalam persamaan (8) untuk menghitung besarnya gain umpan baliknya.

Formula Ackerman:

$$|sI - A + Bk| = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \dots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) = 0 \quad (8)$$

$$a_c(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$$

Dari persamaan diatas diperoleh besarnya nilai gain pengendali *state* sebesar:

$$k_n = a_{n-1} - a_{n-1} \quad (9)$$

Kompensasi gain masukan: $K = k_1$

2. Model sistem orde dua

Dinamika sistem orde dua dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial orde dua sebagai berikut:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t) \quad (10)$$

Dalam bentuk Transformasi Laplace:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (11)$$

Sedangkan respon sistem kurang teredam (*underdamped*) untuk masukan fungsi step:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left[\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right]; (t \geq 0) \quad (12)$$

Performansi sistem:

$$M_p = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\pi}{\omega_d}} * 100\% ; t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \text{ (kriteria 2 \%)} \quad (13)$$

$$\sigma = \zeta\omega_n ; \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Keterangan:

$T(s)$: fungsi alih sistem

t_s : settling time

M_p : maksimum persen overshoot (%)

z : redaman sistem
 w_n : frekuensi alamiah sistem (rad/s)

Motor DC servo

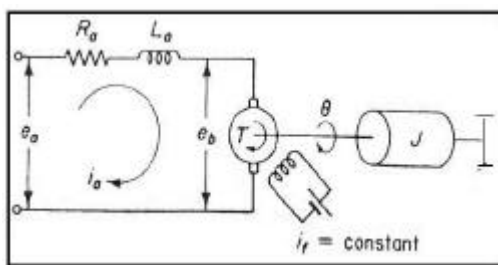
Motor dc servo merupakan motor dc yang digunakan pada sistem servo. Sedangkan sistem servo itu sendiri bertujuan mengontrol posisi suatu beban mekanis terhadap suatu posisi acuan. Pada *servomotor* dc, inersia rotor dibuat sangat kecil, sehingga menghasilkan motor dengan rasio torsi-inersia sangat tinggi. Contoh penggunaan motor dc servo misalnya pada *disk drive*, *tape drive*, dll.



Gambar 3 Motor DC Servo

Pada servomotor dc kumparan medan dihubungkan seri atau terpisah dengan jangkar. Bila medan dibangkitkan secara terpisah maka fluks magnet tidak tergantung pada arus jangkar magnet. Pada beberapa servomotor dc medan dihasilkan oleh magnet permanent, karenanya besarnya fluks magnet konstan. Servomotor dc seperti ini dinamakan servomotor dc magnet permanent.

1. Persamaan Umum Motor DC



Gambar 4: Motor DC Medan Tetap, kontrol jangkar

Medan konstan, fluks konstan dan torsi mempunyai arah sesuai kumparan magnet, sehingga $T = K \cdot i_a$, K = konstanta motor, untuk fluks

konstan, tegangan induksi e_b sebanding dengan kecepatan sudut: $w = \frac{dq}{dt}$ atau $e_b = k_b w = k_b \frac{dq}{dt}$, dengan e_b adalah emf balik, dan k_b adalah konstanta emf balik.

- Persamaan differensial loop jangkar ialah:

$$L_a \frac{di}{dt} + R_a \cdot i + e_b = e_a; \quad e = c_1 \Phi_e i_a \quad (14)$$

- Persamaan differensial loop medan:

$$R_e i_e + N_e \frac{d\Phi_e}{dt} = V_e; \quad \Phi_e = f(i_e) \quad (15)$$

Arus Jangkar magnet menghasilkan torsi yang bekerja terhadap inersia dan gesekan, sesuai persamaan :

$$J \frac{dw}{dt} = m_d - m_L; \quad m_d = c_2 \Phi_e i_a \quad (16)$$

$$J \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} = T; \quad T = K \cdot i_a \quad (17)$$

Diasumsikan semua syarat awal adalah nol, kemudian diambil transformasi Laplace dari ketiga persamaan diatas :

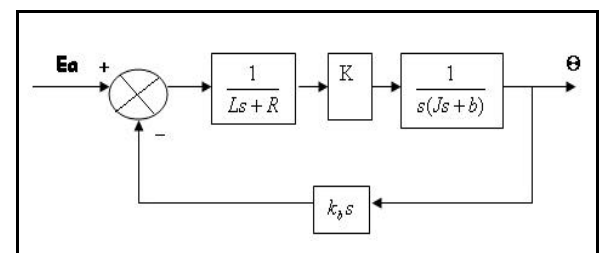
$$K_b s q(s) = E_b(s)$$

$$(L_a s + R_a) I_a(s) + E_b(s) = E_a(s) \quad (18)$$

$$(J s^2 + b s) q(s) = T(s) = K I_a(s)$$

Dengan melalui substitusi persamaan diatas, maka diperoleh rumus fungsi alih servomotor dc:

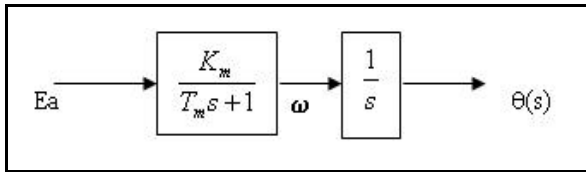
$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s [L_a J s^2 + (L_a b + R_a J) s + R_a b + K K_b]} \quad (19)$$



Gambar 5: Blok Diagram Motor dc Servo

Nilai induktansi (L_a) dalam kumparan magnet biasanya kecil dan dapat diabaikan. Bila L_a diabaikan, maka dapat mereduksi orde fungsi alih diatas menjadi model sistem orde dua:

$$\frac{q(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (20)$$



Gambar 6. Blok Diagram Motor dc Servo Yang Disederhanakan

- $K_m = \frac{K}{R_a b + K K_b} \Rightarrow$ konstanta penguatan motor
- $T_m = \frac{R_a J}{R_a b + K K_b} \Rightarrow$ konstanta waktu motor
- $J = J_m + n^2 J_L$; $b = b_m + n^2 b_L$

Dari persamaan fungsi alih diatas terlihat bahwa fungsi alih mengandung suku $\frac{1}{s}$ Jadi sistem bersifat sebagai integrator.

Besaran-besaran fisik motor:

R_a = tahanan jangkar (Ω)

e_b = GGL (EMF) balik (Volt)

L_a = induktansi kumparan jangkar (H)

θ = perpindahan sudut poros motor (rad)

I_a = arus kumparan jangkar (A)

T = torsi motor (N.m)

I_f = arus medan (A)

J = momen inersia ekivalen (kg-m^2)

E_a = tegangan masukan (V)

b = koefisien gesek viskos (N.m/red/sec)

K = konstanta torsi motor

2. Data Besaran-Besaran Motor Servo: [1]

Momen inersia motor : $J_m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Kg-m}^2$

Momen inersia beban : $J_L = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg-m}^2$

Koefisien gesek motor : diabaikan

Koefisien gesek beban : $b_L = 4 \cdot 10^{-2} \text{ N-m/red/sec}$

Tahanan jangkar : $R_a = 0,2 \Omega$

Induktansi motor : diabaikan

Konstanta EMF balik : $K_b : 0,055 \text{ volt-sec/rad}$

Konstanta torsi motor : $K = 6 \cdot 10^{-5} \text{ N-m/A}$

Rasio roda gigi : $N_1/N_2 = 1/10$

Konstanta detektor kesalahan: $k_1 = \frac{24}{p} \text{ volt/rad}$

Penguatan amplifier : $k_p = 10$

Penguatan lainnya:

$K_1 = K \text{ detektor kesalahan} * K \text{ amplifier} * K \text{ roda gigi}$

$K_1 = 24/\pi * 10 * 0,1 = 7,64$

Dari data tersebut dapat dihitung besarnya momen inersia ekivalen (**J**) dan koefisien gesek liat ekivalen (**b**) mengacu pada poros motor:

$$J = J_m + n^2 J_L = 1 \cdot 10^{-5} + 4,4 \cdot 10^{-5} = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg-m}^2$$

$$b = b_m + n^2 b_L = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$K_m = \frac{K}{R_a b + K K_b} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{(0,2)(4 \cdot 10^{-4}) + (6 \cdot 10^{-5})(5,5 \cdot 10^{-2})} = 0,72$$

$$T_m = \frac{R_a J}{R_a b + K K_b} = \frac{(0,2)(5,4 \cdot 10^{-5})}{(0,2)(4 \cdot 10^{-4}) + (6 \cdot 10^{-5})(5,5 \cdot 10^{-2})} = 0,13$$

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s[L_a J s^2 + (L_a b + R_a J)s + R_a b + K K_b]} \quad (21)$$

dengan mengabaikan nilai Induktansi motor, maka fungsi alih motor menjadi:

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{R_a J s^2 + (R_a b + K K_b)s} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} = \frac{0,72}{s(0,13s + 1)} \quad (22)$$

Lokasi kutub-kutub (*poles*): $p_1 = 0$, $p_2 = -7,692$.

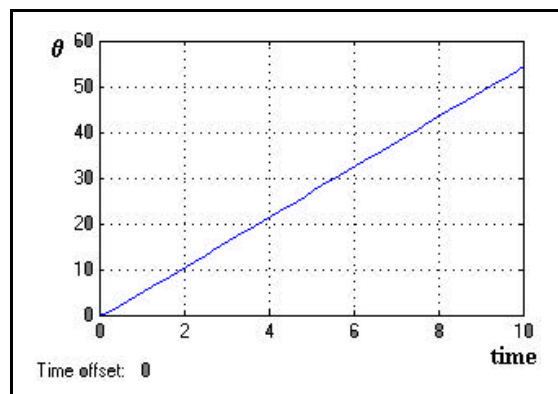
Persamaan ruang keadaan sistem:

$$y = x_1 = q ; \quad \frac{dq}{dt} = w \quad (23)$$

$$\frac{dw}{dt} = -7,692w + 5,538 E_a$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7,692 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5,538 \end{bmatrix} E_a$$

$$|sI - A + Bk| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7,692 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 5,538 \end{vmatrix} [k_1 \ k_2] = s^2 + (7,692 + 5,538k_2)s + 5,538k_1$$



Gmbar 8. Respon Loop Terbuka Motor dc Servo Dengan Input Unit Step

Motor dc servo mempunyai kutub (*pole*) di titik asal sehingga sistem bersifat sebagai *integrator*. Hal tersebut mengakibatkan keluaran *plant* perputaran sudut (q) untuk masukan step menuju tak berhingga.

Program Matlab (Matrix Laboratory)

Matlab merupakan program keluaran The Math Works, Inc. Dengan Matlab kita bisa membuat program sendiri, ataupun menggunakan berbagai toolbox - toolbox yang telah ada, misalnya simulink. Simulink merupakan salah satu toolbox yang berguna untuk analisis sistem kontrol linier, time invariant. Dalam Simulink sistem fisik diwakili oleh model matematika dalam bentuk Transformasi Laplace.

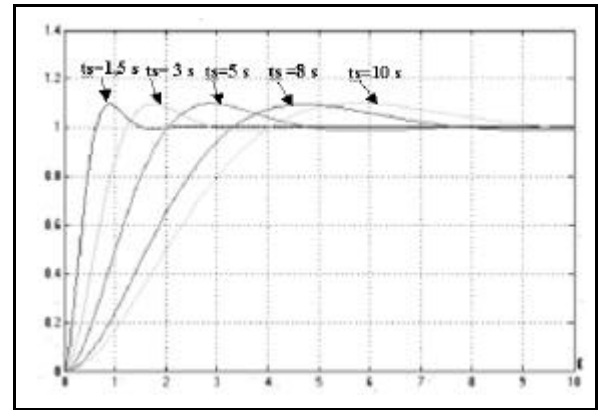
Perancangan Sistem Kontrol dengan Metode Penempatan Kutub

Perancangan performansi sistem meliputi lonjakan maksimum [*maximum percent overshoot (Mp)*] dan waktu mencapai keadaan mantap [*settling time(ts)*]. Dari hasil analisis diperoleh data sebagai berikut:

Tabel 1. Hubungan spesifikasi desain dengan parameter sistem

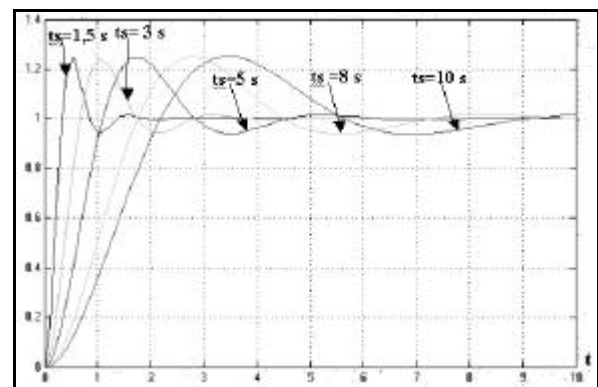
No.	Mp (%)	ts (s)	ω_n (rad/s)	(ζ)	$K=k_1$	k_2	Fungsi Alih (Transfer Function)
01.	25	1,5	6,907	0,40	7,882	-0,425	$\frac{43,65}{s^2 + 5,338s + 43,65}$
02.	25	3	3,242	0,41	1,898	-0,908	$\frac{10,513}{s^2 + 2,665s + 10,513}$
03.	25	5	1,980	0,40	0,707	-1,100	$\frac{3,92}{s^2 + 1,6s + 3,92}$
04.	25	8	1,242	0,40	0,278	-1,208	$\frac{1,541}{s^2 + s + 1,541}$
05.	25	10	0,993	0,40	0,178	-1,244	$\frac{0,986}{s^2 + 0,8s + 0,986}$
06.	10	1,5	4,51	0,59	3,673	-0,412	$\frac{20,34}{s^2 + 5,412s + 20,34}$
07.	10	3	2,25	0,59	0,914	-0,907	$\frac{5,063}{s^2 + 2,67s + 5,063}$
08.	10	5	1,35	0,59	0,330	-1,100	$\frac{1,83}{s^2 + 1,6s + 1,83}$
09.	10	8	0,84	0,60	0,126	-1,208	$\frac{0,7}{s^2 + s + 0,7}$
10.	10	10	0,68	0,59	0,083	-1,245	$\frac{0,457}{s^2 + 0,797s + 0,457}$
11.	5	1,5	3,87	0,69	2,709	-0,425	$\frac{15}{s^2 + 5,34s + 15}$
12.	5	3	1,94	0,69	0,677	-0,905	$\frac{3,75}{s^2 + 2,68s + 3,75}$

Dari tabel diatas terlihat bahwa redaman sistem hanya berpengaruh pada nilai lonjakan maksimum (*maximum overshoot*). Jika nilai **Mp** tetap dan nilai ts diubah-ubah maka besarnya redaman sistem (ζ) relatif konstan. Sedangkan jika nilai maksimum overshoot diubah maka nilai redaman sistem juga akan berubah.

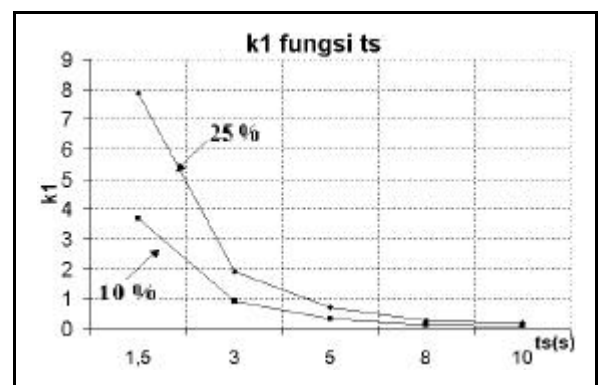


Gambar 9. Respon Motor dc Servo untuk masukan unit step dengan spesifikasi perancangan: Mp=10% untuk berbagai variasi nilai ts

Gambar 9 dan 10 merupakan respon sistem untuk kriteria *overshoot* 10 % dan 25%. Dari gambar terlihat bahwa nilai repon mempunyai nilai variasi *settling time*, sesuai dengan kriteria desain.

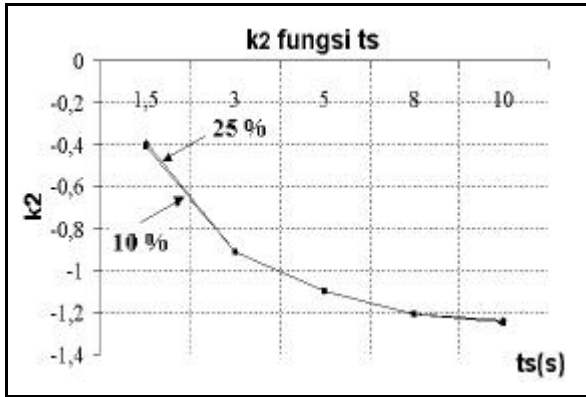


Gambar 10. Respon Motor dc Servo untuk masukan unit step dengan spesifikasi perancangan: Mp=25% untuk berbagai variasi nilai ts

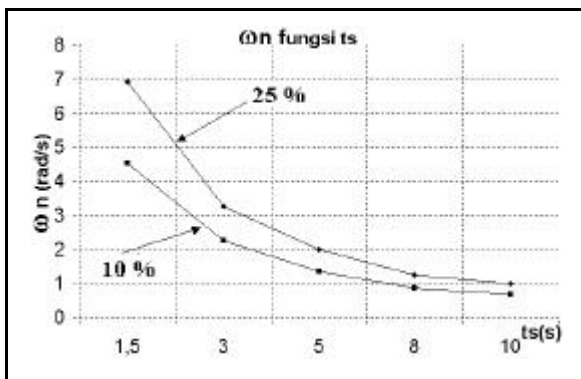


Gambar 11. Perbandingan hasil perhitungan nilai k_1 untuk Mp=25% dan Mp=10% untuk berbagai variasi nilai ts

Dari gambar 11 terlihat bahwa nilai k_1 dan k_2 menurun bersamaan dengan bertambahnya nilai t_s , hal itu terjadi karena nilai frekuensi alamiah sistem (ω_n) menurun dengan bertambahnya *settling time*.



Gambar 12. Perbandingan hasil perhitungan nilai k_2 untuk $M_p=25\%$ dan $M_p=10\%$ untuk berbagai variasi nilai t_s



Gambar 13. Perbandingan hasil perhitungan nilai ω_n untuk $M_p=25\%$ dan $M_p=10\%$ untuk berbagai variasi nilai t_s

Dari grafik pada gambar 13 terlihat bahwa semakin besar nilai time settling, menyebabkan nilai frekuensi alamiah sistem (ω_n) semakin menurun.

Kesimpulan

Dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Langkah awal dalam melakukan desain sistem kontrol dengan metode *pole placement* adalah menentukan model matematika plant.
2. Dengan penambahan sistem kontrol metode *pole placement* akan menggeser lokasi *pole* plant menuju ke lokasi *pole* yang diinginkan sesuai dengan kriteria desain.

3. Dengan metode penempatan kutub dapat memperbaiki performansi sistem dan dapat mengubah sistem tidak stabil menjadi sistem stabil.
4. Diperlukan suatu kompensasi gain pada *input setting* sebesar $K=k_1$, untuk mengkompensasi nilai akhir sistem akibat pergeseran lokasi pole.

Daftar Pustaka

- [1] Ogata K., Modern Control Engineering, Prentice Hall International, Inc., 1996.
- [2] Ogata K., Solving Control Engineering Problems with MATLAB, Prentice Hall International, Inc., 1994
- [3] Gopal M., Control System Engineering, Wiley Eastern Limited, New Delhi., 1982
- [4] Leonhard W., Control of Electrical Drives, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg. New York Tokyo., 1985
- [5] Shearer, J. Lowen., Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems, Macmillan Publishing Company, New York., 1990
- [6] Shahian Bahram, Hassul Michael., Control Sistem Design Using Matlab. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey., 1993
- [7] Lewis, F.L., Optimal Control. John Wiley and Sons, Inc., 1996
- [8] Houpis D'Azzo, Linier Control Systems Analysis and Design, 1986
- [9] Fujinaka Torum, Omatu Sigeru, Pole Placement Using Optimal Regulators, T.IEE., pp. 240-245, 2000.