Jurnal Sainstek Vol. V No. 137-140, Desember 2013 ISSN: 2085-8019

KEBERADAAN TITIK TETAP PADA RUANG BANACH-2

Ika Metiza Maris

Program Studi Tadris Matematika, Jurusan Tarbiyah, STAIN Batusangkar
Jl. Sudirman No. 137 Kuburajo Lima Kaum Batusangkar 27213
Email : ikametizamaris@yahoo.com

ABSTRACT

On finite dimensional, in this paper will show that 2-Banach Space is a Banach space. This is prove by use Cauchy sequence end convergence properties. Then will be show the e. xistence of fixed point in 2-banach space, with the first proving existence of fixed point in banach space.

Key words: banach space, banach space -2, fixed point

PENDAHULUAN

Konsep tentang ruang norm-2 pertama kali di perkenalkan Gahler (Gahler, 1965) pada pertengahan tahun 1960. Semenjak saat itu, Gunawan dan Mashadi (Gunawan dan Mashadi, 2001) dan lainnya mulai mempelajari dan mengembangkan konsep ini dengan berbagai hasil.

Misalkan X ruang vektor atas lapangan riil dengan dimensi hingga besar sama dua, yang dilengkapi dengan fungsi norm-2 yaitu $\|.,.\|$. Sehingga $(X, \|.,.\|)$ disebut ruang norm-2. Selanjutnya jika setiap barisan di ruang norm-2 adalah barisan Cauchy dan konvergen maka ruang norm-2 tersebut dikatakan sebagai Ruang Banach-2. Ruang Banach-2 disebut juga dengan ruang norm-2 lengkap.

Pada tulisan ini akan diperlihatkan bahwa ruang banach-2 merupakan ruang banach. Pada ruang banach dapat ditunjukkan keberdaan titik tetap dengan memanfaatkan kontraksi pada sebuah pemetaan. Selanjutnya dengan menggunakan semua hal yang telah diketahui sebelumnya akan diperlihatkan keberadaan titik tetap pada ruang banach-2.

RUANG BANACH-2

Pada bagian ini akan diperkenalkan lebih dahulu mengenai ruang norm-2 dan ruang banach. Kedua konsep tersebut akan digunakan sebagai alat untuk menunjukkan bahwa ruang banach-2 juga merupakan ruang banach.

Definisi 1

Misalkan X ruang vektor atas lapangan riil dengan dimensi d dengan $2 \leq d < \infty$, norm-2 pada X adalah suatu fungsi $\|.,.\|: X \times X \to \mathbb{R}$ dan untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

a. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier
b. $\|x, y\| = \|y, x\|$
c. $\|x, ay\| = |a|\|x, y\|$, untuk semua $a \in \mathbb{R}$
d. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

Pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut ruang norm-2

Contoh: Ruang linier riil $\mathbb{R}$ dan ruang linier kompleks $\mathbb{C}$, dimana $x \to |x|$ adalah sebuah norm merupakan ruang norm-2 di di $\mathbb{R}$ dan di $\mathbb{C}$.

Pada ruang norm-2 juga dapat dibentuk sebuah barisan. Barisan (x_n) di ruang norm-2 di X dikatakan konvergen ke x jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Berikut akan ditunjukkan beberapa sifat penting dari kekonvergenan barisan dan definisi barisan Cauchy.

Lema 2

Suatu barisan (x_n) di ruang norm-2 di X dikatakan konvergen ke x jika dan hanya jika $lim_{n\to\infty}\|x_n - x,\ u_i\| = 0, \forall i = 1,2,\ldots$

Lema 3

Suatu barisan (x_n) di ruang norm-2 di X dikatakan konvergen ke x jika dan hanya jika $lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty = 0$

Definisi 4

Suatu barisan (x_n) di ruang norm-2 di X dikatakan barisan cauchy jika $lim_{m,n\to\infty}\|x_m - x_n,\ y\| = 0, \forall y \in X$

Selanjutnya jika setiap barisan Cauchy di ruang norm-2 bersifat konvergen maka akan membentuk Ruang Banach.

Definisi 5

Ruang norm-2, $(X, \|.,.\|)$, dikatakan Ruang Banach jika dan hanya jika untuk setiap barisan Cauchy di ruang tersebut bersifat konvergen. Lebih lanjut, Jika setiap barisan Cauchy tersebut konvergen ke suatu titik di X, maka disebut ruang banach-2.

Teorema berikut ini akan membuktikan bahwa Ruang Banach-2 adalah ruang banach. Pembuktian akan dilakukan dengan memanfaatkan barisan Cauchy dan kekonvergenan pada ruang banach.

Teorema 6

Pasangan $(X, \|.,.\|)$ adalah Ruang Banach-2 jika dan hanya jika $(X, \|.\|_\infty)$ adalah ruang banach.

Bukti : Berdasarkan lema 2 dan lema 3, jelas bahwa kekonvergenan terhadap ruang norm-2 X ekivalen dengan kekonvergenan terhadap ruang norm X.

Selanjutnya berdasarkan definisi ruang banach-2, X memiliki barisan (x_n) yang konvergen ke x di X, sehingga berdasarkan lema 2 diperoleh

$$lim_{n\to\infty}\|x_n - x,\ u_i\| = 0, \forall i = 1,2,\ldots.$$

Selanjutnya dengan lema 3 didapatkan $lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_\infty = 0$. Jadi barisan (x_n)adalah barisan Cauchy terhadap ruang norm X.

Dengan definisi ruang banach, X memiliki barisan (x_n) yang konvergen, dengan menggunakan lema 2 dan lema 3 didapatkan $lim_{n\to\infty}\|x_n - x,\ u_i\| = 0, \forall i = 1,2,\ldots$, sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\ , y\|_\infty = 0\ , \forall y \in X$$

Jadi barisan (x_n)adalah barisan Cauchy terhadap ruang norm-2 X. ■

TITIK TETAP PADA RUANG BANACH-2

Sebelum menunjukkan keberadaan titik tetap pada ruang banach-2, akan diperkenalkan terlebih dahulu kontraksi dari suatu pemetaan

Definisi 7

Pemetaan T dari ruang norm X terhadap dirinya sendiri disebut *kontraksi* jika terdapat $0 \le \lambda < 1$ sehingga $\|T_x - T_y\| \le \lambda\|x - y\|, \forall x, y \in X$.

Contoh: Misalkan $f(x) := \sqrt{x}$ pada interval $A := [1, \infty)$. Jika x, u ada di A maka

$$\|f(x) - f(u)\| = \|\sqrt{x} - \sqrt{u}\| = \frac{\|x - u\|}{\sqrt{x} + \sqrt{u}} \le \frac{1}{2}\|x - u\|$$

diperoleh $= \frac{1}{2}$. Sehingga $f(x)$ adalah kontraksi.

Teorema berikut akan memperlihatkan keberadaan titik tetap pada ruang banch. Keberadaan titik tetap pada ruang banach dapat ditentukan dengan memanfaatkan definisi ruang banach dan kekonvergenan pada barisan Cauchy.

Teorema 8

Misalkan X adalah ruang banach dan T adalah kontraksi di T. Maka terdapat titik tunggal x_0 di X sehingga $T_{x_0} = x_0$. Titik x_0 disebut titik tetap di X.

Bukti: Ambil x merupakan elemen tetap di X. Definisikan suatu barisan (x_n) dengan $x_1 = T_x$, $x_2 = T_{x_1}$, $x_{n+1} = T_{x_n}, n \ge 1$.
Misalkan $\|x_1 - x\| = \alpha$, maka $\|x_1 - x_2\| =$

$\|T_{x_1} - T_x\| \leq \lambda\|x_1 - x\| = \lambda\alpha$ dan untuk $n \geq 2$ diperoleh

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|T_{x_n} - T_{x_{n-1}}\| \leq \lambda\|x_n - x_{n-1}\|,$$

sehingga

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda\|x_n - x_{n-1}\| \leq \lambda^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq \lambda^3\|x_{n-2} - x_{n-3}\| \leq \cdots \leq \lambda^{n-1}\|x_2 - x_1\| \leq \lambda^n\|x_1 - x\| = \lambda^n\alpha, \quad n \geq 1.$$

Misalkan $n = 0,1,2,\ldots$ dan $m = 0,1,2,\ldots$ maka diperoleh :

$$\begin{aligned}\|x_n - x_{n+m}\| &= \|x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + \cdots + x_{n+m-1} - x_{n+m}\| \\ &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{n+m-1} - x_{n+m}\| \\ &\leq \alpha\lambda^n + \alpha\lambda^{n+1} + \cdots + \alpha\lambda^{n+m-1} \\ &\leq \alpha\lambda^n(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m-1} \\ &= \alpha\lambda^n(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots) \\ &= \alpha\lambda^n\frac{1}{1-\lambda} \\ &= \alpha\frac{\lambda^n}{1-\lambda}, 0 \leq \lambda < 1\end{aligned}$$

Untuk $n \to \infty$ diperoleh $\lambda^n \to 0$, ini menunjukkan barisan (x_n) adalah barisan Cauchy. Karena X adalah ruang banach maka barisan (x_n) konvergen pada titik x_0 di X. Selanjutnya ambil $\varepsilon > 0$ kemudian pilih n sehingga $\|x_0 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\|x_{n-1} - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, maka

$$\begin{aligned}\|x_0 - T_{x_0}\| &= \|x_0 - x_n + x_n - T_{x_0}\| \\ &\leq \|x_0 - x_n\| + \|x_n - T_{x_0}\| \\ &= \|x_0 - x_n\| + \|T_{x_{n-1}} - T_{x_0}\| \\ &\leq \|x_0 - x_n\| + \lambda\|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Jadi $x_0 = T_{x_0}$.

Misalkan titik tetap di ruang banch-2 tidak tunggal yaitu x_0 dan y_0 di X dan $x_0 \neq y_0$, maka $T_{x_0} = x_0$ dan $T_{y_0} = y_0$. T kontraksi maka terdapat $\lambda \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq \lambda < 1$ sehingga berlaku $\|x_0 - y_0\| = \|T_{x_0} - T_{y_0}\| \leq \lambda\|x_0 - y_0\|$, sehingga $\|x_0 - y_0\| \leq \lambda\|x_0 - y_0\|$. Karena $0 \leq \lambda < 1$ hanya akan terpenuhi bila $\|x_0 - y_0\| = 0$ maka $x_0 = y_0$, jadi kontradiksi dengan $x_0 \neq y_0$. Jadi titik tetap pada ruang banach tunggal. ■

Hasil utama dari tulisan ini adalah keberaaan titik tetap pada ruang banach-2. Teorema ini telah pernah dibuktikan dengan cara yang berbeda oleh Duta (Duta, 2010) dan oleh Gunawan dan Mashadi (Gunawan dan Mashadi,2001).

Teorema 9 (Utama)

Misal $(X, \|.,.\|)$ *adalah Ruang Banach-2 dan missal T adalah pemetaan sendiri terhadap X, sedemikian hingga* $\|T_x - T_y\| \leq \lambda\|x - y,z$, *$\forall x,y,z \in X$, λ adalah konstanta (0,1) maka T punya titik tetap tunggal di X.*

Bukti:

Pada norm, pemetaan T memenuhi $\|T_x - Ty \leq \lambda x - y\infty$, *$\forall x,y \in X$. Karena X, ,.* adalah ruang banach, sehingga berdasarkan teorema 8, T punya titik tetap tunggal di X. Selanjutnya diketahui bahwa $(X, \|.,.\|)$ adalah ruang banach-2 merupakan ruang banach, sehingga rua..g banach2 juga mempunyai titik tetap di X dan tunggal.

■

KESIMPULAN

Pada tulisan ini telah dibahas mengenai ruang banach-2 yang merupakan ruang banach. Dengan fakta tersebut, didapatkan keberadaan titik tetap pada ruang banach. Dengan menggunakaan keberdaan titik tetap pada ruang banach, juga dapat ditentukan keberdaan titik tetap pada ruang banach-2

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Bill, Jacob. Linier Algebra. 1987. WH Freeman and Company, USA: A90

S. GÃahler. 1965. *Linear 2-normietre RÃaume*, Math. Nachr: 28.

Hendra, Gunawan dn MAshadi 2001. On Finite Dimensional 2-normed space, Soochow. *Journal of Mathematic*, Vol. 27.

Hemen Duta. 2010. On Some 2-Banach Space. *General Mathematic*, Vol 18, No. 4.

Howard, Anton. 1998. Aljabar Linier Elementer, Edisi Kelima, Jakarta: Penerbit Erlangga.

Robert G. Bartle. 1975. *The Element of Real Analysis*, Second Edition. Urbana: Wiley International Edition.

W.A Light, 1990: *An Introduction to Abstract Analysis*. Conwall: TJ. Press.