Jurnal Sainstek Vol. II No. 2: 172-177, Desember 2010 ISSN: 2085-8019

BARISAN AUSLANDER-REITEN

Ika Metiza Maris

Kelompok Keahlian Aljabar, FMIPA ITB
Jln. Ganesha no.10 Bandung 4013. Email: ikametizamaris@yahoo.com

ABSTRACT

This paper introduces Auslander-Reiten Sequences in mod A, where A is a finite dimensional K-algebra. We will also introduces almost split morphism, as a special form of morphisms, which will provide a natural way to present the form of Auslander-Reiten sequences. These sequences are particulary useful in representation theory of algebras.

Key words: almost split morphisms, , irreducible morphisms, almost split sequences

PENDAHULUAN

Barisan Auslander-Reiten adalah bentuk khusus dari bentuk barisan eksak. Barisan ini disebut juga barisan hampir terpisah. Notasi morfisma tak tereduksi dan barisan hampir terpisah ini diperkenalkan oleh Auslander (Auslander, 1974) dan Auslander dan Reiten (1975; 1977). Morfisma tak tereduksi akan digunakan untuk mengkonstruksi modul tak terdekomposisi. Dan morfisma tak terduksi merupakan komponen dari morfisma hampir terpisah. Untuk dapat membentuk barisan hampir terpisah, cara yang paling alami digunakan adalah melalui morfisma hampir terpisah.

Tulisan ini merupakan studi literatur yang merupakan pembahasan mendalam dari Teori Auslander-Reiten (Assem *et al.* 2005). Sistematika pembahasan adalah sebagai berikut: pada bagian pertama akan dibahas mengenai bentuk khusus morfisma yaitu morfisma minimal, morfisma hampir terpisah dan morfisma tak tereduksi. Pada bagian kedua akan di bahas mengenai Barisan Auslander-Reiten dan pembahasan bagian pertama akan digunakan untuk memberikan karakteristik untuk barisan tersebut.

BARISAN AUSLANDER-REITEN

Morfisma Tak Tereduksi

Pada bagian pertama ini akan diperkenalkan gagasan dari morfisma tak tereduksi, minimal, dan morfisma hampir terpisah di kategori $mod\ A$. Berdasarkan teorema ketunggalan dekomposisi, setiap modul di $mod\ A$ adalah jumlah langsung dari modul tak terdekomposisi sedemikian hingga dekomposisinya itu tunggal dan begitu juga dengan permutasi dari suku-suku tak terdekomposisinya.

Definisi 1.1

Misal L, M, N adalah modul di $mod\ A$

1. Homomorfisma A-modul $f : L \longrightarrow M$ disebut minimal kiri jika setiap $h \in EndM$ sedemikian hingga $hf = f$ adalah automorfisma.
2. Homomorfisma A-modul $g : M \longrightarrow N$ disebut minimal kanan jika setiap $k \in EndM$ sedemikian hingga $gk = g$ adalah automorfisma.

3. Homomorfisma A-modul $f : L \longrightarrow M$ disebut hampir terpisah kiri, jika:
   a. f bukan *section*, yaitu tidak memiliki invers kiri
   b. Untuk setiap A-homomorfisma $u : L \longrightarrow U$ yang bukan *section*, terdapat $u' : M \longrightarrow U$ sedemikian sehingga $u'f = u$, yaitu, u' membuat diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[dl, "u'"] \\ U & \end{tikzcd}$$

4. Homomorfisma A-modul $g : M \longrightarrow N$ disebut hampir terpisah kiri, jika:
   a. g bukan *rectraction*, yaitu tidak memiliki invers kanan.
   b. Untuk setiap A-homomorfisma $v : V \longrightarrow N$ yang bukan *rectraction*, terdapat $v' : V \longrightarrow M$ sedemikian sehingga $gv' = v$, yaitu, v' membuat diagram berikut komutatif

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "v'"'] \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

5. Homomorfisma A-modul $f : L \longrightarrow M$ disebut hampir terpisah minimal kiri jika memenuhi minimal kiri dan hampir ter-pisah kiri.
6. Homomorfisma A-modul $g : M \longrightarrow N$ disebut hampir terpisah minimal kanan jika memenuhi minimal kanan dan hampir ter-pisah kanan.

Untuk pembahasan pertama, akan ditunjukkan bahwa morfisma hampir terpisah kiri (kanan) memiliki target (asalnya) yang tunggal.

Proposisi 1.2

1. *Homomorfisma A-modul $f : L \longrightarrow M$ dan $f' : L \longrightarrow M$ adalah hampir terpisah kiri maka terdapat isomorfisama $h : M \longrightarrow M'$ sedemikian hingga $f' = hf$*
2. *Homomorfisma A-modul $g : M \longrightarrow N$ dan $g' : M' \longrightarrow N$ adalah hampir terpisah kanan maka terdapat isomorfisama $k : M \longrightarrow M'$ sedemikian hingga $g = g'k$.*

Pada lema berikut akan dinyatakan bahwa morfisma hampir terpisah berhubungan dengan modul tak terdekomposisi

Lema 1.3

1. *Jika $f : L \longrightarrow M$ adalah morfisma hampir terpisah kiri di $\mathbf{mod}\, A$ maka modul L adalah modul tak terdekomposisi.*
2. *Jika $g : M \longrightarrow N$ adalah morfisma hampir terpisah kanan di $\mathbf{mod}\, A$ maka modul N adalah modul tak terdekomposisi.*

Selanjutnya akan dibahas menge-nai bentuk khusus morfisma lainnya, yaitu morfisma tak tereduksi.

Definisi 1.4 Homomorfisma $f : X \longrightarrow Y$ di $mod\ A$ dikatakan tak tereduksi jika memenuhi:

1. f bukan *section* atau *rectaction*
2. Jika $f = f_1 f_2$ maka f_1 adalah *rectraction* dan f_2 adalah *section*

Morfisma tak tereduksi di $mod\ A$ adalah epimorfisma atau monomorfisma: yaitu, jika $f : X \longrightarrow Y$ tak tereduksi tapi bukan epimorfisma, dan $f = jp$ adalah faktorisasi kanonik pada $im\, f$, maka j bukan *rectraction* dan akibatnya p ada-lah *section*, dan f adalah monomorfisma.

Contoh 1.5

Misalkan $a \in A$ adalah idempoten primitif maka A-modul kanan eA adalah tak terdekomposisi dan inklusi $rad\, eA \hookrightarrow eA$ adalah hampir terpisah kiri dan morfisma tak teeduksi. Perhatikan bahwa, jika $v \in Hom_A(V, eA)$ dan v bukan *rectraction* maka

$im\ v$ adalah sub modul sejati dari eA. Selanjutnya diperoleh bahwa $im\ v \subseteq rad\ eA$, yaitu, $v : V \rightarrow eA$ terfaktorkan melalui $rad\ eA$. Dan akibatnya $rad\ eA \hookrightarrow eA$ adalah morfisma hampir terpisah kiri. Diikuti dengan kemaksimalan $rad\ eA$ pada eA maka $rad\ eA \hookrightarrow eA$ adalah morfisma tak terduksi.

Selanjutnya akan dirumuskan definisi morfisma tak tereduksi dengan menggunakan notasi radikal, $rad\ A$, dari kategori $mod\ A$.

Lema 1.6

Misalkan X, Y adalah modul tak terdekomposisi di $mod\ A$. Morfisma $f : X \rightarrow Y$ adalah tak tereduksi jika dan hanya jika $f \in rad_A(X,Y)/rad_A^2(X,Y)$.

Selanjutnya akan dilihat karakter-istik dari monomorfisma tak tereduksi (atau epimorfisma tak tereduksi) di $mod\ A$ melalui *cokernel*nya (atau kernelnya).

Lema 1.7 *Misalkan*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

adalah barisan eksak pendek tidak terpisah di mod A.

1. Homomorfisma $f: L \rightarrow M$ adalah tak tereduksi jika dan hanya jika untuk setiap homorfisma $v : V \rightarrow N$, terdapat $v_1: V \rightarrow M$ sedemikian hingga $v = gv_1$ dan $v_2: M \rightarrow V$ sedemikian hingga $g = vv_2$
2. Homomorfisma $g: M \rightarrow N$ adalah tak tereduksi jika dan hanya jika untuk setiap homorfisma $u : L \rightarrow U$, terdapat $u_1: M \rightarrow U$ sedemikian hingga $u = u_1 f$ dan $u_2: U \rightarrow M$ sedemikian hingga $f = u_2 u$.

Sebagai aplikasi Lema (1.7), akan diperlihatkan pada Akibat (1.8) bahwa morfisma tak tereduksi dapat digunakan untuk mengkonstruksi modul tak terdekomposisi.

Akibat 1.8

1. Jika $f: L \rightarrow M$ adalah tak tereduksi monomorfisma maka $N = coker\ f$ adalah modul tak terdekomposisi.
2. Jika $g: M \rightarrow N$ adalah tak tereduksi epimorfisma maka $L = ker\ g$ adalah modul tak terdekomposisi.

Pada teorema berikut ini akan di-tunjukkan bahwa morfisma tak tereduksi merupakan komponen dari morfisma hampir terpisah.

Teorema 1.9

1. Misal $f: L \rightarrow M$ adalah morfisma hampir terpisah minimal kiri di $mod\ A$ maka f tak tereduksi. Lebih lanjut, homomorfisma $f': L \rightarrow M'$ di A-modul adalah tak terduksi jika dan hanya jika $M' \neq 0$ dan terdapat dekomposisi jumlah langsung $M \cong M' \oplus M$ dan homomorfisma $f'': L \rightarrow M''$ sedemikian hingga $\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix}: L \rightarrow M' \oplus M$ adalah hampir ter-pisah minimal kiri.
2. Misal $g: M \rightarrow N$ adalah morfisma hampir terpisah minimal kanan di $mod\ A$ maka g tak tereduksi. Lebih lanjut, homomorfisma $g': M' \rightarrow N$ di A-modul adalah tak tereduksi jika dan hanya jika $M' \neq 0$ dan terdapat dekomposisi jumlah langsung $M \cong M' \oplus M$ dan homomorfisma $g'': M'' \rightarrow N$ sedemikian hingga $[g' \quad g'']: M' \oplus M \rightarrow N$ adalah hampir terpisah minimal kanan.

Barisan Auslander-Reiten

Pada bagian ini akan didefinisikan bentuk khusus dari barisan eksak pendek, yang secara khusus juga banyak digunakan dalam teori representasi aljabar.

Definisi 2.1 Barisan eksak pendek di $mod\ A$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

adalah barisan hampir terpisah jika memenuhi: f adalah morfisma hampir terpisah minimal kiri dan g adalah morfisma hampir terpisah minimal kanan.

Berdasarkan Lema (1.3), bahwa jika barisan tersebut ada maka L dan N modul tak terdekomposisi. Barisan Auslander-Reiten tidak akan pernah menjadi barisan terpisah (karena f tidak *section* dan g tidak *rectraction*) sehingga L bukan modul injektif dan N bukan modul projektif. Lebih lanjut Barisan Auslander-Reiten ini tunggal: yaitu jika $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ dan $0 \longrightarrow L' \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow 0$ adalah dua barisan hampir terpisah di $mod\ A$, maka berdasarkan Proposisi (1.2) pernyataan berikut ekuivalen:

a. Kedua barisan di atas isomorfik
b. Terdapat isomorfisma $L \cong L'$ dari A-modul
c. Terdapat isomorfisma $N \cong N'$ dari A-modul

Lema 2.2 *Misalkan*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

adalah diagram komutatif dimana tiap baris merupakan barisan eksak dan tidak terpisah.

1. Jika L tak terdekomposisi dan w adalah automorfisma, maka u auto-morfisma dan akibatnya v auto-morfisma
2. Jika N tak terdekomposisi dan u ada-lah automorfisma, maka w automor-fisma dan akibatnya v automorfisma

Pada teorema berikutnya akan ditunjukkan karakteristik dari Barisan Auslander-Reiten. Ini merupakan hasil utama dari tulisan ini. Teorema ini akan dituliskan secara lengkap berikut buktinya.

Teorema 2.3 (Utama) *Misalkan barisan eksak pendek di mod A*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Pernyataan berikut ekuivalen:

1. Barisan yang diberikan adalah barisan hampir terpisah
2. L tak terdekomposisi dan g adalah morfisma hampir terpisah kanan
3. N tak terdekomposisi dan f adalah morfisma hampir terpisah kiri.
4. f adalah morfisma hampir terpisah minimal kiri.
5. g adalah morfisma hampir terpisah minimal kanan.
6. L dan N tak terdekomposisi, f dan g adalah morfisma tak tereduksi

Bukti:

Dari definisi Barisan Auslander-Reiten, (1) mengakibatkan (4) dan (5). Berdasarkan Lema (1.3), (1) menye-babkan (2) dan (3). Berdasarkan Teorema (1.9) dan Lema (1.3), (1) mengakibatkan (6). Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (5) mengakibatkan (2). Misalkan g adalah morfisma hampir terpisah kanan, maka berdasarkan Teorema (1.9), g tak tereduksi. Selanjutnya karena Akibat (1.8), diperoleh $L = \ker g$ modul tak terde-komposisi. Jadi (2) terpenuhi. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan (4) meng-akibatkan (2).

Kemudian akan dibuktikan (2) mengakibatkan (3). Misalkan L tak ter-dekomposisi dan g adalah morfisma hampir terpisah kanan. Maka g bukan *rectraction* sehingga f bukan *section*. Misalkan $u: L \longrightarrow U$, sedemikian hingga $u'f \neq u$ untuk semua $u': M \longrightarrow N$. Akan ditunjukkan u adalah *section*. Misalkan V adalah *amalgamed sum*, berdasarkan sifatnya, diperoleh diagram komutatif sebagai berikut:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "h"] & V \arrow[r, "k"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Barisan paling bawah adalah barisan eksak tak terpisah, maka k bukan *rectraction*. Karena g hampir terpisah kanan, maka terdapat $\bar{v}: V \longrightarrow M$ se-demikian hingga $= gv'$, sehingga di-peroleh diagram komutatif berikut:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{u}u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\bar{v}v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dimana $\bar{u}$ diperoleh dari menurunkan $\bar{v}$ dengan melewati kernel g. Berdasarkan Lema (2.2) , karena L tak terdekomposisi dan 1_N automorfisma maka $\bar{u}u$ juga automorfisma. Akibatnya u adalah *section*.

Selanjutnya akan diperlihatkan jika (2) dan (3) berlaku maka (1) akan berlaku. Misalkan L dan N tak terdekomposisi, f dan g adalah morfisma hampir terpisah. Misalkan $h \in EndM$ sedemikian hingga $hf = f$. Akan ditunjukkan h adalah automorfis-ma. Terdapat diagram komutatif berikut:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dari diagram komutatif tersebut diper-oleh, berdasarkan Lema (2.2), h adalah automorfisma. Jadi f minimal kiri. De-ngan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa g adalah minimal kanan.

Terakhir akan dibuktikan (6) mengakibatkan (2). Berdasarkan hipo-tesis, L tak terdekomposisi dan g bukan *rectraction*. Misalkan $v: V \longrightarrow N$ bukan *rectraction*. Misalkan V tak ter-dekomposisi. Karena f tak tereduksi, maka berdasarkan Lema (1.7) terdapat $v': V \longrightarrow M$ sedemikian hingga $v = gv'$, jadi g adalah morfisma hampir terpisah kanan. Atau terdapat $h: M \longrightarrow V$ sedemi-kian hingga $g = vh$. Karena g morfisma tak tereduksi dan v bukan *rectraction* maka h adalah *section*. Karena V tak terdekomposisi maka h isomorfisma. Akibatnya $v' = h^{-1}$, sehingga $g = vh$ jika dan hanya jika $gv' = g$. Jadi g adalah morfisma terpisah kanan.

KESIMPULAN

Pada tulisan ini telah dibahas mengenai bentuk barisan hampir terpisah dengan beberapa karakteristiknya. Barisan hampir terpisah tidak akan pernah menjadi barisan terpisah. Barisan hampir terpisah di $mod\ A$ itu tunggal : yaitu, jika $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ dan $0 \longrightarrow L' \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow 0$ adalah dua barisan hampir terpisah di $mod\ A$, maka kedua barisan tersebut isomorfik.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih diucapkan kepada Dr. Muchtadi Intan Detiena atas bimbingan dan motivasinya. Dan, tulisan ini telah disam-paikan pada Seminar Nasional Matematika Himpunan Peminat Aljabar di UIN Jakarta Tanggal 27 Maret 2010.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Assem I. Simon D, Skowronski A. 2005. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math.Soc. Students Text 65, Cambridge University Press.

Auslander M, Reiten I. Representation theory of Artin Algebras III. 1975. *Comm. Algebra*, 3: 269-310

Auslander M. dan Reiten I. 1977. Representation theory of Artin Algebras IV: Invariant given by Almost Split Sequences. *Comm. Algebra,* 5: 443-518.

Auslander M. Reinten I, Smaloe S. 1995. *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, New York.