Konvergensi Barisan dan Teorema Titik Tetap pada Ruang b-Metrik

Cahyaningrum Rahmasari, Sunarsini, dan Sadjidon
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: sunarsini@matematika.its.ac.id

***Abstrak*— Dalam paper ini, dibahas mengenai ruang b-metrik yang merupakan generalisasi dari ruang metrik. Bahasan yang menarik untuk dikaji dalam ruang b-metrik diantaranya adalah mengenai konvergensi barisan serta teorema titik tetap. Untuk mendapatkan teorema titik tetap dalam ruang b-metrik, perlu ditunjukkan bahwa ruang b-metrik tersebut lengkap. Pada paper ini, ditunjukkan bahwa ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang b-metrik yang lengkap, sehingga didapatkan pula teorema titik tetap dalam ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$..**

***Kata Kunci*—Ruang Metrik, Ruang b-Metrik, Konvergensi Barisan, Teorema Titik Tetap.**

I. PENDAHULUAN

Dalam mempelajari ilmu pengetahuan tentu di dalamnya mempelajari matematika. Analisis fungsional merupakan salah satu cabang dari matematika analisis. Konsep umum yang dibahas dalam analisis fungsional diantaranya ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, ruang hasil kali dalam, dan ruang Hilbert.

Pembahasan dalam analisis fungsional pun mulai berkembang, salah satunya tertuju pada perumuman ruang metrik serta pengembangan teorema titik tetap pada ruang-ruang tertentu.

Masalah konvergensi barisan merupakan salah satu bagian yang cukup menarik pada pembahasan di dalam analisis fungsional. Khususnya barisan di dalam ruang metrik dan ruang *b*-metrik.

Teorema titik tetap atau teorema pemetaan kontraktif merupakan hal yang penting dalam pembahasan mengenai ruang metrik. Teorema ini menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan pada ruang metrik itu ada dan tunggal. Teorema ini pertama kali dibuktikan oleh Stefan Banach pada tahun 1920.

Selain itu, pengembangan teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik pun banyak diteliti. Konsep dari ruang *b*-metrik diperkenalkan dan dipelajari pada tahun 1989 oleh Bakhtin [9]. Bakhtin memperkenalkan ruang *b*-metrik sebagai generalisasi dari ruang metrik.

Dengan menggunakan gagasan ini, pada tahun 1993 Czerwik [8] menampilkan suatu generalisasi dari teorema titik tetap Banach pada ruang b-metrik.

Dalam paper ini, akan dikaji mengenai konvergensi barisan dan teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik.

A. Ruang b-Metrik

Sebelum membahas mengenai ruang b-metrik, terlebih dahulu perlu dijelaskan mengenai pengertian ruang metrik serta konvergensi dalam ruang metrik. Hal tersebut merupakan ide dasar dari konsep ruang b-metrik.

Definisi 1.1[3] *Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan metrik atau fungsi jarak sebagai fungsi bernilai real $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut.*

Untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:
(M1) $d(x, y) \geq 0$.
(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(M3) $d(x, y) = d(y, x)$.
(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Jika d metrik di X, maka pasangan (X, d) disebut ruang metrik.

Contoh 1.2 [3] Pada himpunan $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan metrik $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Berikutnya diberikan definisi mengenai barisan konvergen dalam ruang metrik.

Definisi 1.3[3] *Suatu barisan (x_n) dari titik-titik dalam suatu ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen ke $x \in X$, dinotasikan dengan $x_n \to x$ untuk $n \to \infty$ atau*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

jika barisan bilangan real tak-negatif $d(x_n, x) \to 0$ saat $n \to \infty$; dengan kalimat lain, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk $n \geq N$.

Berikut diberikan definisi mengenai barisan Cauchy pada ruang metrik.

Definisi 1.4[3] *Misalkan (X, d) suatu ruang metrik. Suatu barisan (x_n) dari titik-titik di X merupakan barisan Cauchy jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ apabila } m, n \geq N.$$

Selanjutnya diberikan definisi mengenai ruang metrik lengkap.

Definisi 1.5[3] *Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan $E \subseteq X$. Himpunan E dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di E mempunyai limit di E. Jika X lengkap maka dikatakan (X, d) ruang metrik lengkap.*

Contoh 1.6 Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ adalah suatu metrik lengkap. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut: misal (x_n) dengan $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ dan $n = 1,2,\ldots$ adalah barisan Cauchy pada $(\mathbb{R}, d)$ dan (x_n) konvergen ke $1 \in \mathbb{R}$ maka terbukti bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik lengkap.

Berikut ini diberikan definisi mengenai pemetaan kontraktif dalam ruang metrik.

Definisi 1.7[5] *Diberikan (X, d) adalah ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ disebut kontraktif pada (X, d) jika terdapat bilangan real $0 < k < 1$ untuk setiap $x, y \in X$ yang memenuhi*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

Setelah mendapatkan konsep mengenai ruang metrik, berikut akan diberikan definisi ruang *b*-metrik.

Definisi 1.8[1] *Diberikan X adalah suatu himpunan tak kosong dan diberikan $s \geq 1$ bilangan riil. Suatu fungsi $d_b: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut b-metrik, untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku*

(BM1) $d_b(x, y) \geq 0$,

(BM2) $d_b(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$,

(BM3) $d_b(x, y) = d_b(y, x)$

(BM4) $d_b(x, z) \leq s[d_b(x, y) + d_b(y, z)]$

Pasangan (X, d_b) disebut ruang b-metrik..

II. METODOLOGI PENELITIAN

Tahap pertama dari penelitian ini adalah mengkaji mengenai konvergensi barisan pada ruang *b*-metrik, kemudian akan ditunjukkan bahwa ruang *b*-metrik $l_{\frac{1}{2}}$ adalah bukan merupakan suatu ruang metrik dengan syarat suatu nilai s yang telah didapatkan. Langkah berikutnya adalah melakukan pengkajian mengenai ruang *b*-metrik $l_{\frac{1}{2}}$.

Setelah didapatkan mengenai konvergensi barisan pada ruang *b*-metrik berikut kelengkapannya, selanjutnya dikaji mengenai teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik $l_{\frac{1}{2}}$.

III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Konvergensi Barisan pada Ruang b-Metrik

Pada bagian ini akan diselidiki mengenai bagaimanakah konvergensi barisan pada ruang *b*-metrik.

Definisi 3.1[1] *Diberikan (X, d_b) ruang b-metrik. Barisan $\{x_n\}$ pada X dikatakan konvergen jika dan hanya jika terdapat $x \in X$ dan $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ didapatkan $d_b(x_n, x) < \varepsilon$. Dalam hal ini dapat ditulis $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.*

Berikut ini diberikan beberapa teorema yang berkaitan dengan konvergensi barisan pada ruang *b*-metrik.

Teorema 3.2 Diberikan (X, d_b) ruang *b*-metrik. Jika barisan (x_n), (y_n) di dalam X yang masing-masing konvergen ke x dan y maka barisan $\big(d_b(x_n, y_n)\big)$ konvergen ke $sd_b(x, y)$, untuk suatu $s \geq 1$.

Teorema 3.3 *Jika (x_n) barisan di (X, d_b) konvergen maka (x_n) memiliki limit tunggal.*

Selanjutnya, akan didefinisikan mengenai konsep barisan Cauchy pada ruang *b*-metrik yang masih berkaitan dengan kekonvergenan dalam ruang *b*-metrik.

Definisi 3.4[1] *Diberikan (X, d_b) merupakan ruang b-metrik. Barisan (x_n) pada X disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ didapatkan $d_b(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definisi 3.5[1] *Ruang b-metrik (X, d_b) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchynya konvergen.*

Dari Definisi 3.4 diperoleh teorema mengenai barisan Cauchy berikut ini.

Teorema 3.6 Diberikan (X, d_b) ruang *b*-metrik. Jika (x_n) Barisan konvergen di (X, d_b), maka (x_n) merupakan barisan Cauchy.

B. Ruang b-Metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$

Setelah mengetahui konsep-konsep mengenai ruang *b*-metrik dan konvergensinya, pada bagian ini akan diselidiki mengenai ruang ℓ_p $(0 < p < 1)$ khususnya $p = \frac{1}{2}$.

Definisi 3.7[1] *Himpunan $\ell_{\frac{1}{2}}$*

$$\ell_{\frac{1}{2}} = \left\{ x = (x_n); x_n \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

Dari Definisi 3.7 diperoleh teorema sebagi berikut.

Teorema 3.8 Diberikan himpunan $\ell_{\frac{1}{2}}$. Jika $d_b: \ell_{\frac{1}{2}} \times \ell_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ dengan $d_b(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ maka d_b merupakan *b*-metrik dengan $s = 2^2 = 4$. Lebih lanjut, $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$ merupakan ruang *b*-metrik.

Selanjutnya akan diberikan mengenai konvergensi barisan Cauchy pada ruang *b*-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$ dan sifat lengkap dari ruang *b*-metrik $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$, seperti tertuang dalam teorema dibawah ini.

Teorema 3.9 Diberikan $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$ ruang *b*-metrik. Jika (x_n) barisan konvergen di $\left(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b\right)$, maka (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Bukti.

Ambil (x_n) sebarang barisan di ruang *b*-metrik $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ *dan* $s = 4$, sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku $d_b(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{8}$ dan $d_b(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{8}$

$d_b(x_n, x)$ artinya

$$d_b(x_n, x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{8}$$

$d_b(x_m, x)$ artinya

$$d_b(x_m, x) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_m) &\leq 4[d_b(x_n, x) + d_b(x_m, x)] \\ &\leq 4\left[\left(\sum_{n,m=1}^{\infty} [|x_n - x| + |x_m - x|]^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &\leq 4\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m - x|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &< 4\left[\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8}\right] \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

jadi

$d_b(x_n, x_m) < \varepsilon$

Sehingga terbukti bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Teorema 3.10 Ruang $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ merupakan ruang b-metrik yang lengkap.

Bukti.

Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) di $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat N sehingga untuk $m, n \geq N$, berlaku

$$d_b(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{mj} - x_{nj}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 < \varepsilon \quad (1)$$

Ini memenuhi untuk setiap $j = 1,2, \ldots$ sehingga didapatkan

$$|x_{mj} - x_{nj}| < \varepsilon \quad (2)$$

Sekarang ambil j tetap. Dari (2) terlihat bahwa (x_{nj}) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, karena $\mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik lengkap, sehingga untuk setiap barisan Cauchynya konvergen, katakan konvergen ke $x_j \in \mathbb{R}$ sehingga $x_{nj} \to x_j$ saat $n \to \infty$. Dengan menggunakan limit ini, didefinisikan $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ dan akan ditunjukkan bahwa $x \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan $x_n \to x$.

Dari (1) didapatkan untuk setiap $m, n \geq N$ dan $k \geq 1$, diperoleh

$$\sum_{j=1}^{k} |x_{mj} - x_{nj}|^{\frac{1}{2}} < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

jika $m \to \infty$ dan $k \to \infty$, untuk $n \geq N$. didapatkan

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{nj}|^{\frac{1}{2}} < \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Ini menunjukkan bahwa $x - x_n = (x_j - x_{nj}) \in \ell_{\frac{1}{2}}$.

Karena $x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$, maka berdasarkan Ketaksamaan Minkowski

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{nj} + (x_j - x_{nj})|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{nj}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - x_{nj}|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

karena $x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan $x - x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$, maka $x = x_n + x - x_n \in \ell_{\frac{1}{2}}$.

Pada persamaan (3) merepresentasikan $[d_b(x, x_n)]^p$, sehingga persamaan tersebut menunjukkan bahwa $x_n \to x$, dan karena (x_n) merupakan sebarang barisan Cauchy di $\ell_{\frac{1}{2}}$, maka hal ini menunjukkan kelengkapan dari $\ell_{\frac{1}{2}}$.

C. Teorema Titik Tetap pada Ruang b-Metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$

Pada bagian ini, akan diberikan beberapa teorema titik tetap dari ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$. Secara umum, teorema titik tetap pada ruang b-metrik telah diuraikan pada [7].

Teorema pertama mengenai prinsip kontraktif Banach pada ruang b-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.11(Teorema Titik Tetap Banach) *Diberikan $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta $s = 2^2 = 4$ dan $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ suatu pemetaan kontraktif dengan batasan $k \in [0,1/4)$ dan $ks < 1$. Jika barisan $(x_n) \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dengan $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2, \ldots$. sehingga*

$$d_b(Tx, Ty) \leq k d_b(x, y)$$

maka terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sedemikian hingga $x_n \to x^*$ dan x^* adalah titik tetap tunggal T.

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan (x_n) suatu barisan pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan

$x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0, n = 1,2, \ldots$

Karena T adalah suatu pemetaan kontraktif dengan konstanta $k \in [0,1/4)$ maka didapatkan

$$\begin{aligned} d_b(T^2x_0, T^2x_1) &\leq k d_b(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq k^2 d_b(x_0, x_1) \\ &\leq k^2 \left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

jadi $d_b(T^2x_0, T^2x_1) \leq k^n \left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Diberikan $m, n > 0$ dan $m > n$,

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_m) &< 4\left(\sum |x_n - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4^2\left(\sum |x_{n+1} - x_{n+2}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\quad + 4^3\left(\sum |x_{n+2} - x_{n+3}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \cdots \\ &< 4k^n\left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4^2k^{n+1}\left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\quad + 4^3k^{n+2}\left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$= 4k^n\left(\sum |x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2 [1 + 4k + (4k)^2 + (4k)^3 + \cdots] \quad (4)$$

Kemudian ambil $n, m \to \infty$ pada (4), didapatkan

$$\lim_{m,n\to\infty} d_b(x_n, x_m) = \lim_{m,n\to\infty} \left(\sum |x_m - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$

Sehingga, (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$. Berdasarkan kelengkapan dari $\ell_{\frac{1}{2}}$ maka (x_n) konvergen ke $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa x^* adalah titik tetap tunggal dari T. karena

$$Tx^* = \lim_{n\to\infty} T\,x_n = \lim_{n\to\infty} T\,x_{n+1} = x^*$$

x^* adalah titik tetap dari T. Perlu ditunjukkan bahwa titik tetapnya tunggal.

Anggap x' adalah titik tetap yang lain dari T, maka $Tx' = x'$.

$$d_b(x^*, x') = d_b(Tx^*, Tx') \le k\left(\sum|x^* - x'|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (5)$$

Persamaan (5) menunjukkan bahwa $k \ge 1$ namun dalam hal ini kontradiksi dengan $k \in [0,1/4)$. Sehingga titik tetapnya adalah tunggal.

Berikutnya akan diberikan teorema mengenai teorema titik tetap tipe Kannan pada ruang *b*-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.12(Teorema Titik Tetap Kannan) *Diberikan $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta $s = 2^2 = 4$ dan $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ suatu pemetaan untuk setiap $\mu \in [0, 1/2)$. Jika barisan $(x_n) \in X$ dengan $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2,\dots$. sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in \ell_{\frac{1}{2}}$ berlaku*

$$d_b(Tx, Ty) \le \mu[d_b(x, Tx) + d_b(y, Ty)] \quad (6)$$

maka terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sedemikian hingga $x_n \to x^*$ dan x^* adalah titik tetap tunggal T.

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan (x_n) suatu barisan pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan

$x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0, n = 1,2,\dots$

Dengan menggunakan ketaksamaan (6) didapatkan

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_{n+1}) &= d_b(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\le \mu[d_b(x_{n-1}, x_n) + d_b(x_n, x_{n+1})] \\ &= \mu\left[\left(\sum|x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_n - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &\le \frac{\mu}{\mu - 1}\left(\sum|x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

jadi $d_b(x_n, x_{n+1}) \le \frac{\mu}{\mu-1} d_b(x_{n-1}, x_n)$

dan didapatkan

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \le \left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)^n \left(\sum|x_0 - x_1|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Karena $\mu \in [0, 1/2)$ maka $\frac{\mu}{\mu-1} \in [0,1)$. Sehingga, T merupakan suatu pemetaan kontraktif.

Dari Teorema 3.11 telah ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dan merupakan barisan konvergen. Anggap bahwa (x_n) konvergen ke $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} d_b(x^*, Tx^*) &\le 4[d_b(x^*, x_n) + d_b(x_n, Tx^*)] \\ &= 4\left[\left(\sum|x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &\le 4\left(\sum|x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\mu[\left(\sum|x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2] \end{aligned}$$

Dan didapatkan

$$d_b(x^*, Tx^*) \le \frac{4}{1-4\mu}\left(\sum|x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{4\mu}{1-4\mu}\left(\sum|x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (7)$$

Dari (7), didapatkan

$$d_b(x^*, Tx^*) \le \frac{4}{1-4\mu}\left(\sum|x^* - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{4\mu}{1-4\mu}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^n\left(\sum|x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (8)$$

Diberikan $n \to \infty$ pada (8) sehingga

$$\lim_{n\to\infty} d_b(x^*, Tx^*) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum|x^* - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 0$$

Oleh karena itu, $x^* = Tx^*$ dan menunjukkan bahwa x^* adalah titik tetap tunggal dari T.

Berikutnya akan diberikan teorema mengenai teorema titik tetap tipe Chatterjea pada ruang *b*-metrik $\ell_{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.13(Teorema Titik Tetap Chatterjea) *Diberikan $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ ruang b-metrik yang lengkap dengan konstanta $s = 2^2 = 4$ dan $T: \ell_{\frac{1}{2}} \to \ell_{\frac{1}{2}}$ suatu pemetaan untuk setiap $\lambda \in [0, 1/8)$ dan $s\lambda < \frac{1}{8}$. Jika barisan $(x_n) \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dengan $x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0$, $n = 1,2,\dots$. sedemikian hingga untuk setiap $x, y \in \ell_{\frac{1}{2}}$ berlaku*

$$d_b(Tx, Ty) \le \lambda[d_b(x, Ty) + d_b(y, Tx)] \quad (9)$$

maka terdapat $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$ sedemikian hingga $x_n \to x^*$ dan x^* adalah titik tetap tunggal T.

Bukti:

Ambil sebarang $x_0 \in \ell_{\frac{1}{2}}$ dan (x_n) suatu barisan pada $\ell_{\frac{1}{2}}$ dengan

$x_n = T\,x_{n-1} = T^n x_0, n = 1,2,\dots$

Dengan menggunakan ketaksamaan (9) didapatkan

$$\begin{aligned} d_b(x_n, x_{n+1}) &= d_b(Tx_{n-1}, Tx_n) = \left(\sum|Tx_{n-1} - Tx_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\le \lambda\left[\left(\sum|x_{n-1} - Tx_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_n - Tx_{n-1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &= \lambda\left[\left(\sum|x_{n-1} - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_n - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \\ &\le 4\lambda\left[\left(\sum|x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_n - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Dan didapatkan

$$d_b(x_n, x_{n+1}) \le \frac{4\lambda}{1 - 4\lambda}\left(\sum|x_{n-1} - x_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Karena $\lambda \in [0, 1/8)$ maka $\frac{4\lambda}{1-4\lambda} \in [0,1)$. Sehingga, T merupakan suatu pemetaan kontraktif.

Dari Teorema 3.11 dan Teorema 3.12 telah ditunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy pada $\ell_{\frac{1}{2}}$

dan merupakan barisan konvergen ke $x^* \in \ell_{\frac{1}{2}}$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa x^* adalah titik tetap dari T.

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq 4\left[\left(\sum|x^* - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_{n+1} - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

$$= 4\left(\sum|x^* - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\left(\sum|Tx_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq 4\left(\sum|x^* - x_{n+1}|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4\lambda\left[\left(\sum|x^* - Tx_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum|x_n - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

Sehingga didapatkan

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq 4d_b(x^*, x_{n+1}) + 4\lambda d_b(x^*, x_{n+1}) + 4\lambda d_b(x_n, Tx^*)] \quad (10)$$

Diberikan $n \to \infty$ pada (10) sehingga

$$d_b(x^*, Tx^*) \leq 4\lambda\left(\sum|x^* - Tx^*|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (11)$$

Ketaksamaan (11) salah, kecuali $d_b(x^*, Tx^*) = 0$, sehingga didapatkan $x^* = Tx^*$.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika (x_n), (y_n) barisan di dalam ruang *b*-metrik (X, d_b) yang masing-masing konvergen ke x dan y, maka $(d_b(x_n, y_n))$ konvergen ke $sd_b(x, y)$, untuk suatu $s \geq 1$.
2. Jika (x_n) barisan konvergen di ruang *b*-metrik (X, d_b) maka (x_n) memiliki limit tunggal
3. Ruang $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ merupakan ruang *b*-metrik yang lengkap terhadap *b*-metrik $d_b(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^{\frac{1}{2}}\right)^2$.
4. Diperoleh 3 teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik lengkap $(\ell_{\frac{1}{2}}, d_b)$ yaitu:
   a. Teorema Titik Tetap Banach
   b. Teorema Titik Tetap Kannan
   c. Teorema Titik Tetap Chatterjea

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dubey, A.K., Shukla, R., Dubey, R.P., 2014. “Some Fixed Point Results in *b*-Metric Spaces”. **Asian Journal of Mathematics and Applications** 2014. 0147.

[2] Alghamdi, M.A, Hussain, N., Salimi, P., 2013. “Fixed Point and Coupled Fixed Point Theorems on *b*-Metric-like Space”. **Journal of Inequalities and Application** 1. 402.

[3] *Yunus, M. 2005.* ***Modul Ajar Pengantar Analisis Fungsional****. Surabaya: Jurusan Matematika ITS.*

[4] Bartle, R.G. Sherbet, D.R. 2010. **Introduction to Real Analysis (Fourth Edition)**. John Wiley and Sons, Inc., United States of America.

[5] Kreyszig, E. 1978. **Introductory Fungsional Analysis with Applications.** New York: John Wiley & Sons. Inc.

[6] Amini Harandi, A. 2012. “Metric-like Spaces, Partial Metric Space and Fixed Points” **Fixed Point Theory Application** 1. 204.

[7] Kir, M., Kiziltunc, H. 2013. “On Some Well Known Fixed Point Theorems in *b*-Metric Spaces”. **Turkish Journal of Analysis and Number Theory** 1. 13-16.

[8] Czerwik, S. 1993. “Contaction Mappings in *b*-metric spaces”. **Acta Math**. Inform. Univ. Ostrav. 1, 5-11.

[9] Bakhtin, IA. 1989. “The Contraction Mapping Principle in Quasimetric spaces”. **Functional Analysis, vol 30**. 26-37.