

# Analisis Reduksi Model pada Sistem Linier Waktu Diskrit

Yunita Indriana Sari dan Didik Khusnul Arif

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia

*e-mail*: didik@matematika.its.ac.id

**Abstrak**—Reduksi Model adalah penyederhanaan sistem yang berorde besar agar sistem tersebut memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Pada Tugas Akhir ini, dibahas mengenai reduksi model dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang dengan menganalisis sistem awal, mengkaji pembentukan sistem setimbang, dan konstruksi model tereduksi. Proses reduksi model diawali dengan membentuk sistem setimbang dari sistem awal yang bersifat stabil, terkendali, dan teramati dengan matriks transformasi  $T$ . Setelah didapatkan sistem setimbang, selanjutnya dilakukan pemotongan nilai singular Hankel yang kecil. Setelah itu dilakukan simulasi reduksi model menggunakan MATLAB. Hasil simulasi menunjukkan bahwa model tereduksi yang dihasilkan memiliki sifat yang sama dengan sistem awal, yaitu sifat stabil, terkendali, teramati. Selain itu, pemotongan nilai singular Hankel dapat dilakukan sesuai kebutuhan dalam pengaplikasian reduksi model pada permasalahan di kehidupan nyata. Selanjutnya, dilakukan perbandingan model awal dan model tereduksi dengan menggunakan respon frekuensi.

**Kata Kunci**—Metode Pemotongan Setimbang, Reduksi Model, Singular Hankel, Sistem Diskrit.

## I. PENDAHULUAN

Sistem yang terdapat di alam semesta seringkali memiliki orde yang besar. Sehingga dihasilkan model matematika yang memiliki banyak variabel keadaan. Semakin banyak variabel yang digunakan, model matematika yang digunakan semakin mendekati nilai fenomena ataupun sistem nyata yang sebenarnya. Tentunya hal ini mempengaruhi waktu komputasi karena semakin besar ukuran sistem, waktu komputasi yang dibutuhkan semakin lama pula. Dan juga permasalahan yang ada pada sistem semakin besar dan kompleks. Tentunya penyelesaian sistem yang memiliki orde besar lebih rumit dibanding sistem yang memiliki orde lebih kecil. Oleh karena itu, dibutuhkan penyederhanaan sistem yang berorde besar agar sistem tersebut memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Penyederhanaan sistem inilah yang dinamakan reduksi model[1].

Terdapat banyak metode reduksi model, diantaranya adalah metode Pemotongan Setimbang, aproksimasi Norma Hankel dan Aproksimasi Perturbasi Singular. Diantara metode reduksi model tersebut, metode Pemotongan Setimbang merupakan metode reduksi model yang paling sederhana. Selain itu, metode Pemotongan Setimbang menjamin sifat-sifat dari

sistem awal selalu dipertahankan. Sistem hasil reduksi dengan metode Pemotongan Setimbang akan mempunyai sifat yang sama dengan sifat sistem semula yaitu stabil, terkendali dan teramati[2].

Berdasarkan latar belakang di atas, pada penelitian ini akan dilakukan analisis reduksi model pada sistem diskrit dengan menggunakan metode pemotongan setimbang. Setelah didapatkan model hasil reduksi, kemudian akan dilakukan analisis terhadap sifat-sifat model hasil reduksi. Setelah itu akan dilakukan simulasi untuk model awal dan model hasil reduksi dengan menggunakan aplikasi MATLAB.

## II. METODE PENELITIAN

### A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan cara mencari referensi mengenai teori-teori yang menunjang penelitian.

### B. Tahap Analisis Sifat Model Awal

Pada tahap ini dilakukan analisis mengenai sifat-sifat model awal, meliputi analisis sifat dan perilaku sistem, yaitu analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan pada sistem tersebut.

### C. Tahap Reduksi Model

Pada tahap ini dilakukan reduksi model sistem awal dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang agar menghasilkan model setimbang dengan variabel keadaan yang jumlahnya lebih sedikit namun dengan karakteristik yang sama.

### D. Tahap Analisis Sifat Model Tereeduksi

Pada tahap ini dilakukan analisis sifat model yang telah direduksi, yaitu analisis sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

### E. Tahap Simulasi dan Analisis

Pada tahap ini dilakukan simulasi dan analisis model awal dan model reduksi dengan menggunakan *software* MATLAB.

### F. Tahap Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dan saran berdasarkan pada hasil simulasi dan analisis pada tahap sebelumnya.

## III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

### A. Kajian Sistem Awal

Misalkan diberikan suatu sistem linear waktu diskrit sebagai berikut:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1)$$

$$z_k = Cx_k + Du_k \tag{2}$$

dengan

- $x_k \in \mathbb{R}^n$  : variabel keadaan pada waktu  $k$
- $u_k \in \mathbb{R}^m$  : vektor masukan deterministik pada waktu  $k$
- $z_k \in \mathbb{R}^p$  : vektor pengukuran pada waktu  $k$
- $A, B, C, D$  : matriks-matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian.

Dari Persamaan (1) dan (2) dapat dibentuk sebuah fungsi transfer[3].

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \tag{3}$$

Melalui fungsi transfer dapat diketahui hubungan antara masukan dan keluaran.

Selanjutnya, untuk menyelidiki sifat kestabilan Persamaan (1) dan (2) digunakan teorema berikut.

**Teorema 3.1[4]**

Sistem linear diskrit adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika  $|\lambda_i(A)| < 1$  untuk  $i = 1, \dots, n$  dengan  $\lambda_i(A)$  adalah nilai eigen matriks  $A$ . Sedangkan jika  $|\lambda_i(A)| \leq 1$ , untuk  $i = 1, \dots, n$  maka sistem diskrit adalah stabil.

Sedangkan untuk mengetahui sifat keterkendalian Persamaan (1) dan (2) digunakan teorema berikut.

**Teorema 3.2[4]**

Sistem diskrit terkendali jika dan hanya jika rank  $(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n$ , dengan  $(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$  disebut sebagai matriks keterkendalian.

Didefinisikan gramian keterkendalian,  $W$ , pada sistem  $(A, B, C, D)$  adalah sebagai berikut[5].

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k \tag{4}$$

Berikut merupakan teorema yang menjelaskan hubungan antara sifat keterkendalian sistem dengan gramian keterkendalian.

**Teorema 3.3[2]**

Pernyataan berikut ekuivalen.

- (i) Sistem  $(A, B, C, D)$  terkendali,
- (ii) Gramian keterkendalian,  $W$ , adalah definit positif,
- (iii) Matriks keterkendalian,  $(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$ , mempunyai rank baris penuh.

Untuk mengetahui sifat keteramatan digunakan teorema berikut.

**Teorema 3.4[4]**

Sistem diskrit teramat jika dan hanya jika rank  $(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T) = n$ , dengan  $(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T)$  disebut sebagai matriks keteramatan.

Didefinisikan gramian keteramatan,  $M$ , pada sistem  $(A, B, C, D)$  adalah sebagai berikut[5].

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k \tag{5}$$

Berikut merupakan teorema yang menjelaskan hubungan antara sifat keteramatan sistem dengan gramian keteramatan.

**Teorema 3.5[2]**

- (i) Sistem  $(A, B, C, D)$  teramat,
- (ii) Gramian keteramatan,  $M$ , adalah definit positif,

Matriks keteramatan,  $(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T)$ , mempunyai rank kolom penuh.

**B. Kajian Sistem Setimbang**

Sistem setimbang merupakan sistem baru sebagai bentuk pendekatan dari sistem awal yang mempunyai gramian keterkendalian sistem setimbang,  $\tilde{W}$ , dan gramian keteramatan sistem setimbang,  $\tilde{M}$ , yang sama dan merupakan matriks diagonal ( $\tilde{W} = \tilde{M}$ ). Konsep sistem setimbang berdasarkan gramian keterkendalian,  $\tilde{W}$ , dan gramian keteramatan,  $\tilde{M}$ , diberikan pada definisi berikut.

**Definisi 3.1[2]**

Sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$  disebut sistem setimbang dari sistem  $(A, B, C, D)$  jika sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$  mempunyai gramian keterkendalian,  $\tilde{W}$ , dan gramian keteramatan,  $\tilde{M}$ , yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov

$$\tilde{A} \tilde{W} \tilde{A}^T + \tilde{B} \tilde{B}^T - \tilde{W} = 0 \tag{6}$$

$$\tilde{A}^T \tilde{M} \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} - \tilde{M} = 0 \tag{7}$$

sedemikian sehingga memenuhi

$$\tilde{W} = \tilde{M} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \tag{8}$$

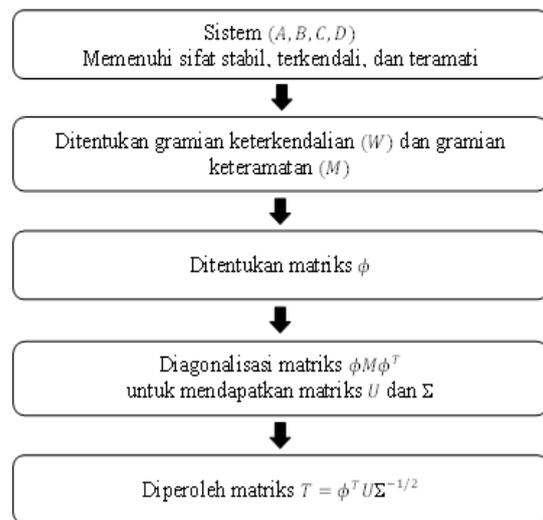
$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

dengan  $\sigma_i$  menyatakan nilai singular Hankel dari sistem  $(A, B, C, D)$  yang dapat didefinisikan sebagai

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)} \tag{9}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ . Dengan  $\lambda_i$  adalah nilai-nilai eigen dari  $WM$ .

Untuk mendapatkan sistem setimbang, diperlukan matriks transformasi  $T$ . Matriks transformasi  $T$  adalah matriks yang mentransformasikan sistem awal menjadi sistem setimbang. Algoritma untuk mendapatkan matriks transformasi  $T$  adalah sebagai berikut:



**Gambar. 1.** Konstruksi Matriks  $T$

Misal diberikan suatu matriks transformasi  $T$  yang memenuhi[6].

$$x_k = T \tilde{x}_k \tag{10}$$

dengan,

$x_k$  : variabel keadaan dari sistem  $(A, B, C, D)$

$\tilde{x}_k$  : variabel keadaan dari sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$

$T$  : matriks transformasi yang non singular dan berukuran  $n \times n$

Selanjutnya, Persamaan (10) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tilde{x}_k = T^{-1}x_k \tag{11}$$

Untuk  $k = k + 1$ , diperoleh

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1}x_{k+1} \tag{12}$$

Jika sistem awal disubstitusikan pada Persamaan diatas maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B, \tilde{C} = CT, \text{ dan } \tilde{D} = D$$

Apabila  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$  disubstitusikan pada Persamaan awal maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k \tag{13}$$

$$\tilde{y}_k = \tilde{C}\tilde{x}_k + \tilde{D}\tilde{u}_k \tag{14}$$

**C. Kajian Model Tereduksi**

Setelah didapatkan sistem setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ) yang mempunyai gramian kesetimbangan  $\Sigma$ . Berdasarkan urutan nilai singular Hankel, maka gramian kesetimbangan  $\Sigma$  dapat dipartisi menjadi

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

dengan,

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n), \text{ dan}$$

$$\sigma_r > \sigma_{r+1}$$

Partisi yang terjadi pada  $\Sigma$  menyebabkan terjadinya partisi pada sistem setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ), yaitu

$$G = \left( \begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \tilde{D} \end{array} \right) \tag{16}$$

dengan,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \text{ dan } \tilde{C} = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2) \tag{17}$$

Selanjutnya, pada sistem setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ) dilakukan pemotongan terhadap variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan sulit diamati sehingga terbentuk sistem tereduksi yang mempunyai variabel keadaan lebih sedikit daripada variabel keadaan pada sistem semula. Pemotongan terhadap variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan sulit diamati ini dapat dijelaskan melalui teorema berikut.

**Teorema 3.6[2]**

Diberikan sistem ( $A, B, C, D$ ) yang stabil, terkendali, teramati dan setimbang dengan gramian

$$W = M = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \tag{18}$$

Jika  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$  maka sistem tereduksi dengan order  $r$  juga akan stabil, terkendali dan teramati serta memenuhi

$$\|G_z - G_{z_r}\|_{\infty} \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n) \tag{19}$$

dengan  $G_z$  dan  $G_{z_r}$  masing-masing adalah fungsi transfer sistem ( $A, B, C, D$ ) dan sistem tereduksinya.

Menurut Teorema 3.6, maka pemotongan variabel keadaan pada sistem setimbang dapat dilakukan dengan menentukan urutan nilai singular Hankel dimana terjadi loncatan yang besar atau dipilih urutan singular Hankel ke- $r$  dimana  $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ . Akhirnya diperoleh sistem tereduksi yang berukuran  $r$  yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\tilde{x}_{rk+1} = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_{rk} + \tilde{B}_1\tilde{u}_k \tag{20}$$

$$\tilde{y}_{rk} = \tilde{C}_1\tilde{x}_{rk} + \tilde{D}\tilde{u}_k \tag{21}$$

Untuk selanjutnya sistem tereduksi pada Persamaan (20) dan (21) disebut sebagai sistem ( $\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, \tilde{D}$ ).

**D. Simulasi**

Pada subbab ini akan dilakukan simulasi reduksi model. menggunakan metode pemotongan setimbang. Sebagai langkah awal, diberikan suatu sistem linear waktu diskrit dengan  $n = 8$ .

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -0,81 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [1 \quad 5 \quad 3 \quad 7 \quad -3 \quad 2 \quad 4 \quad 6]x_k + [1]u_k$$

Sistem tersebut memiliki sifat stabil, terkendali, dan teramati.

Didapat sistem ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ) sebagai berikut.

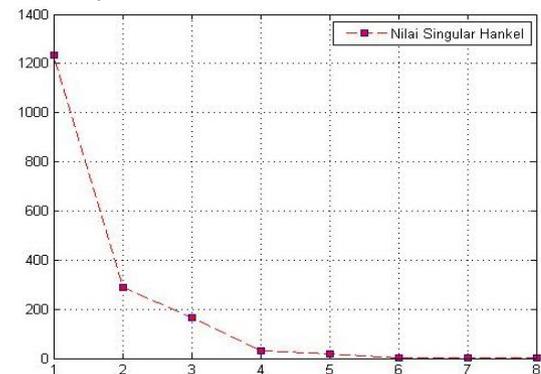
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,963 & 0,1108 & -0,0024 & -0,0087 & -0,0148 & -0,0011 & -0,0001 & 0 \\ -0,1108 & 0,5633 & -0,4411 & 0,063 & 0,1315 & 0,0017 & 0,0006 & 0,0003 \\ 0,0024 & -0,4411 & -0,8034 & -0,0835 & -0,142 & -0,0095 & -0,0006 & -0,0003 \\ -0,0087 & -0,063 & 0,0835 & -0,8972 & 0,3007 & -0,0489 & 0,0008 & 0,0006 \\ 0,0148 & 0,1315 & -0,142 & -0,3007 & -0,0347 & 0,3154 & 0,0004 & -0,0007 \\ 0,0011 & 0,0017 & -0,0095 & 0,0489 & 0,3154 & -0,01 & -0,1268 & -0,0702 \\ 0,0001 & 0,0006 & -0,0006 & -0,0008 & 0,0004 & -0,1268 & 0,7454 & -0,2847 \\ 0 & -0,0003 & 0,0003 & 0,0006 & 0,0007 & 0,0702 & 0,2847 & -0,3364 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -9,2733 \\ -12,2348 \\ -1,1801 \\ -1,3131 \\ 2,3704 \\ 0,1318 \\ 0,0109 \\ -0,0056 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [9,273 \quad -12,235 \quad -1,18 \quad 1,313 \quad 2,37 \quad 0,132 \quad 0,011 \quad 0,006]$$

$$\tilde{D} = [1]$$

Selanjutnya, didapatkan nilai Singular Hankel. Berikut merupakan nilai singular Hankel dari sistem ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ).



**Gambar. 2.** Grafik Nilai Singular Hankel

Pemotongan variabel keadaan dilakukan ketika terjadi loncatan nilai singular Hankel,  $\sigma_i$ , yang besar. Berikut dilakukan beberapa pemotongan nilai Singular Hankel.

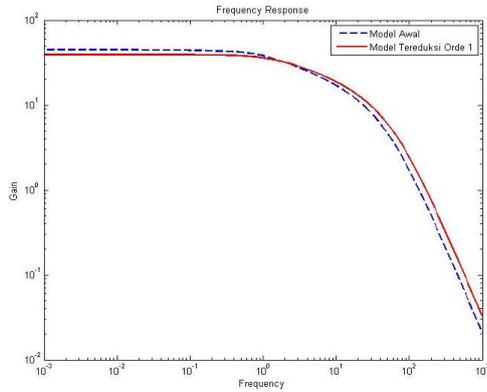
**Kasus 1**

Pada bagian ini, dilakukan pemotongan variabel keadaan menjadi model tereduksi orde 1. Berikut merupakan model tereduksi yang dihasilkan.

$$\tilde{x}_{rk+1} = [0,963]\tilde{x}_{rk} + [-9,273]\tilde{u}_k$$

$$\tilde{y}_{rk} = [9,273]\tilde{x}_{rk} + [1]\tilde{u}_k$$

Berikut merupakan grafik respon frekuensi model awal dan model tereduksi orde 1.



**Gambar. 3.** Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal dan Model Tereduksi Orde 1

Berdasarkan Gambar 3, respon frekuensi untuk sistem awal dan model tereduksi memiliki alur yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa model tereduksi memiliki karakteristik dan perilaku yang sama dengan model awal.

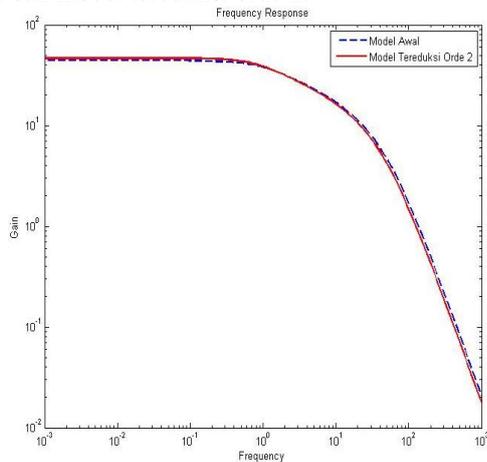
**Kasus 2**

Pada bagian ini, dilakukan pemotongan variabel keadaan menjadi model tereduksi orde 2. Berikut merupakan model tereduksi yang dihasilkan.

$$\tilde{x}_{rk+1} = \begin{bmatrix} 0,963 & 0,1108 \\ -0,1108 & 0,5633 \end{bmatrix} \tilde{x}_{rk} + \begin{bmatrix} -9,273 \\ -12,23 \end{bmatrix} \tilde{u}_k$$

$$\tilde{y}_{rk} = [9,273 \quad -12,23] \tilde{x}_{rk} + [1] \tilde{u}_k$$

Berikut merupakan grafik respon frekuensi model awal dan model tereduksi orde 2.



**Gambar. 4.** Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal dan Model Tereduksi Orde 2

Berdasarkan Gambar 4, respon frekuensi untuk sistem awal dan model tereduksi memiliki alur yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa model tereduksi memiliki karakteristik dan perilaku yang sama dengan model awal.

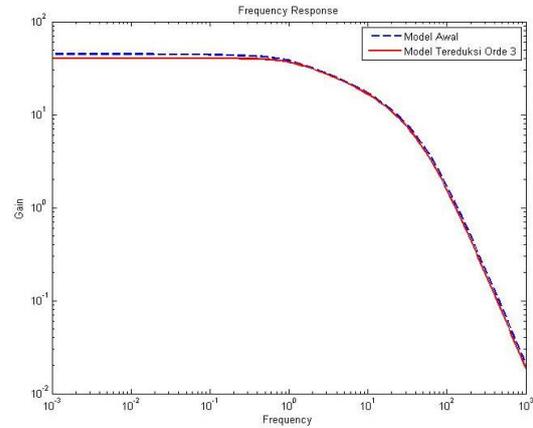
**Kasus 3**

Pada bagian ini, dilakukan pemotongan variabel keadaan menjadi model tereduksi orde 3. Berikut merupakan model tereduksi yang dihasilkan.

$$\tilde{x}_{rk+1} = \begin{bmatrix} 0,963 & 0,1108 & -0,00236 \\ -0,1108 & 0,5633 & -0,4411 \\ 0,00236 & -0,4411 & -0,8034 \end{bmatrix} \tilde{x}_{rk} + \begin{bmatrix} -9,273 \\ -12,23 \\ -1,18 \end{bmatrix} \tilde{u}_k$$

$$\tilde{y}_{rk} = [9,273 \quad -12,23 \quad -1,18] \tilde{x}_{rk} + [1] \tilde{u}_k$$

Berikut merupakan grafik respon frekuensi model awal dan model tereduksi orde 3.



**Gambar. 5.** Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal dan Model Tereduksi Orde 3

Berdasarkan Gambar 5, respon frekuensi untuk sistem awal dan model tereduksi memiliki alur yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa model tereduksi memiliki karakteristik dan perilaku yang sama dengan model awal.

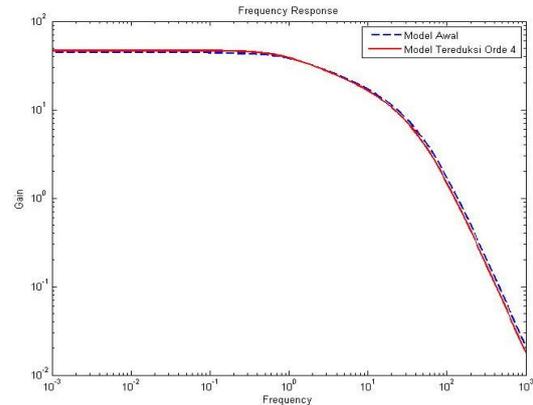
**Kasus 4**

Pada bagian ini, dilakukan pemotongan variabel keadaan menjadi model tereduksi orde 4. Berikut merupakan model tereduksi yang dihasilkan.

$$\tilde{x}_{rk+1} = \begin{bmatrix} 0,963 & 0,1108 & -0,00236 & -0,008654 \\ -0,1108 & 0,5633 & -0,4411 & 0,06302 \\ 0,00236 & -0,4411 & -0,8034 & -0,08347 \\ -0,008654 & -0,06302 & 0,08347 & -0,8972 \end{bmatrix} \tilde{x}_{rk} + \begin{bmatrix} -9,273 \\ -12,23 \\ -1,18 \\ -1,313 \end{bmatrix} \tilde{u}_k$$

$$\tilde{y}_{rk} = [9,273 \quad -12,23 \quad -1,18 \quad 1,313] \tilde{x}_{rk} + [1] \tilde{u}_k$$

Berikut merupakan grafik respon frekuensi model awal dan model tereduksi orde 4.



**Gambar. 6.** Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal dan Model Tereduksi Orde 4

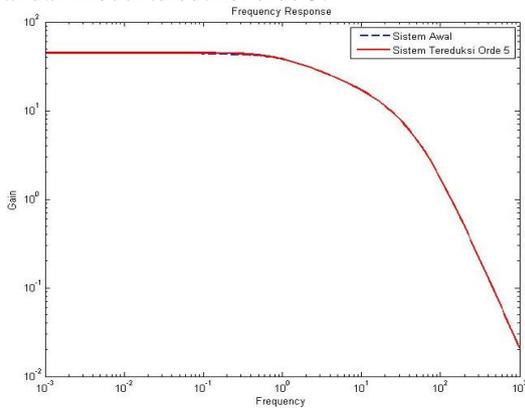
Berdasarkan Gambar 6, respon frekuensi untuk sistem awal dan model tereduksi memiliki alur yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa model tereduksi memiliki karakteristik dan perilaku yang sama dengan model awal.

**Kasus 5**

Pada bagian ini, dilakukan pemotongan variabel keadaan menjadi model tereduksi orde 5. Berikut merupakan model tereduksi yang dihasilkan.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{r,k+1} &= \begin{bmatrix} 0,963 & 0,1108 & -0,00236 & -0,008654 & -0,01485 \\ -0,1108 & 0,5633 & -0,4411 & 0,06302 & 0,1315 \\ 0,00236 & -0,4411 & -0,8034 & -0,08347 & -0,142 \\ -0,008654 & -0,06302 & 0,08347 & -0,8972 & 0,3007 \\ 0,01485 & 0,1315 & -0,142 & -0,3007 & -0,03469 \end{bmatrix} \tilde{x}_{r,k} \\ &+ \begin{bmatrix} -9,273 \\ -12,23 \\ -1,18 \\ -1,313 \\ 2,37 \end{bmatrix} \tilde{u}_k \\ \tilde{y}_{r,k} &= [9,273 \quad -12,23 \quad -1,18 \quad 1,313 \quad 2,37] \tilde{x}_{r,k} + [1] \tilde{u}_k \end{aligned}$$

Berikut merupakan grafik respon frekuensi model awal dan model tereduksi orde 5.



**Gambar. 7.** Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal dan Model Tereduksi Orde 5

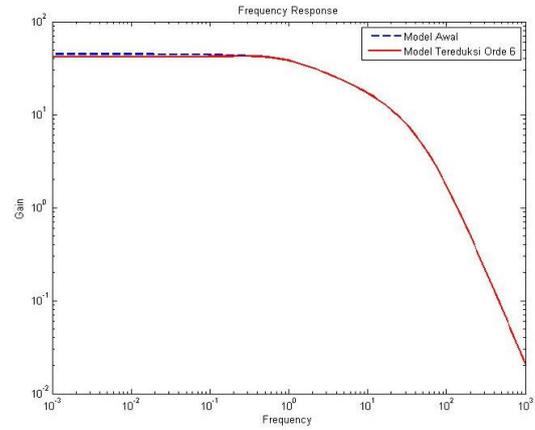
Berdasarkan Gambar 7, respon frekuensi untuk sistem awal dan model tereduksi memiliki alur yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa model tereduksi memiliki karakteristik dan perilaku yang sama dengan model awal.

**Kasus 6**

Pada bagian ini, dilakukan pemotongan variabel keadaan menjadi model tereduksi orde 6. Berikut merupakan model tereduksi yang dihasilkan.

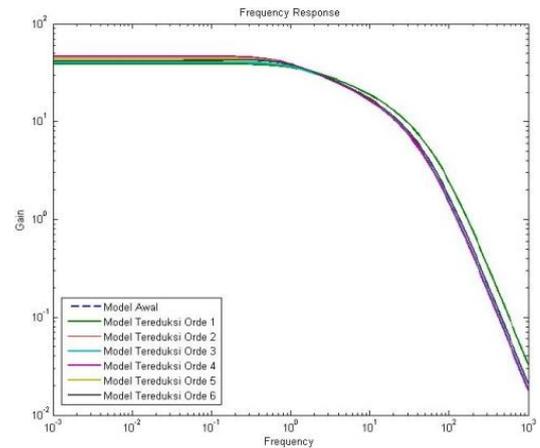
$$\begin{aligned} \tilde{x}_{r,k+1} &= \begin{bmatrix} 0,963 & 0,1108 & -0,0024 & -0,0087 & -0,0149 & -0,0011 \\ -0,1108 & 0,5633 & -0,4411 & 0,063 & 0,1315 & 0,0017 \\ 0,0024 & -0,4411 & -0,8034 & -0,0835 & -0,142 & -0,0095 \\ -0,0087 & -0,063 & 0,0835 & -0,8972 & 0,3007 & -0,0489 \\ 0,0149 & 0,1315 & -0,142 & -0,3007 & -0,0347 & 0,3154 \\ 0,0011 & 0,0017 & -0,0095 & 0,0489 & 0,3154 & -0,0099 \end{bmatrix} \tilde{x}_{r,k} \\ &+ \begin{bmatrix} -9,273 \\ -12,23 \\ -1,18 \\ -1,313 \\ 2,37 \\ 0,1318 \end{bmatrix} \tilde{u}_k \\ \tilde{y}_{r,k} &= [9,273 \quad -12,23 \quad -1,18 \quad 1,313 \quad 2,37 \quad 0,1318] \tilde{x}_{r,k} + [1] \tilde{u}_k \end{aligned}$$

Berikut merupakan grafik respon frekuensi model awal dan model tereduksi orde 6.



**Gambar. 8.** Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal dan Model Tereduksi Orde 6

Berdasarkan Gambar 8, respon frekuensi untuk sistem awal dan model tereduksi memiliki alur yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa model tereduksi memiliki karakteristik dan perilaku yang sama dengan model awal.



**Gambar. 9.** Grafik Perbandingan Respon Frekuensi Model Awal dan Model Tereduksi

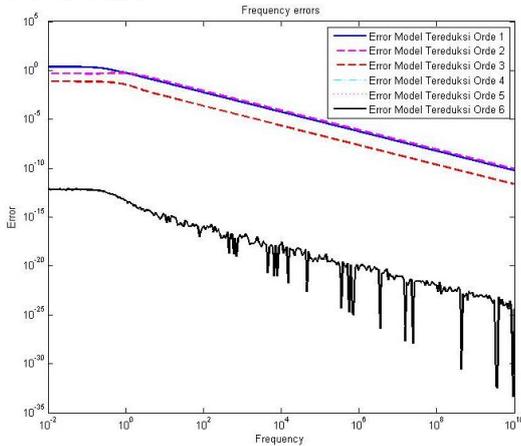
Berdasarkan Gambar 9, terlihat bahwa model awal dan model tereduksi memiliki perilaku yang sama. Hal ini menunjukkan bahwa model tereduksi memiliki perilaku dan karakteristik yang sama dengan sistem awal. Pada Gambar 8 juga terlihat bahwa model tereduksi yang paling mendekati dengan sistem awal adalah model tereduksi orde 6 karena memiliki variabel keadaan yang hampir sama jumlahnya dengan sistem awal.

Selanjutnya dilakukan penghitungan *error* model tereduksi terhadap model awal. Didapatkan hasil sebagai berikut.

Tabel 1.  
Nilai *Error* Model Tereduksi

Model Tereduksi	Nilai <i>Error</i>
Orde 1	0,330300731
Orde 2	0,106822536
Orde 3	0,012303625
Orde 4	$8,47 \times 10^{-14}$
Orde 5	$8,47 \times 10^{-14}$
Orde 6	$8,47 \times 10^{-14}$

Berikut merupakan grafik perbandingan *error* model tereduksi.



**Gambar. 10.** Grafik Perbandingan *Error* Model Tereduksi

Berdasarkan Gambar 9, terlihat bahwa *error* paling besar dimiliki oleh model tereduksi orde 1. Hal ini dikarenakan pada model tereduksi tersebut bekerja hanya menggunakan 1 variabel keadaan saja sehingga hasil yang didapatkan tidak semaksimal apabila model bekerja dengan menggunakan variabel keadaan lebih dari 1. Sedangkan *error* paling kecil dimiliki oleh model tereduksi orde 4, 5, dan 6. Hal ini dikarenakan model tereduksi tersebut memiliki variabel keadaan yang lebih banyak dibanding model tereduksi yang lain sehingga dapat bekerja lebih maksimal dibandingkan dengan model tereduksi yang lain.

#### IV. KESIMPULAN

1. Dari hasil analitik, model tereduksi memiliki sifat yang sama dengan model awal, yaitu sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.
2. Dari hasil simulasi, pemotongan variabel keadaan untuk mendapatkan model tereduksi dapat dilakukan sesuai kebutuhan dalam pengaplikasian reduksi model pada permasalahan dalam kehidupan nyata.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gregoriadis, K. M. (1995). Optimal  $H_{\infty}$  Model Reduction via Linear Matrix inequalities: Continuous and Discrete-Time Cases. *System and Control Letter* 26, 321-333.
- [2] Arif, D. K. (2014). *Konstruksi dan Implementasi Algoritma Filter Kalman pada Model Tereduksi*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- [3] Staffans, O. 2009. *Transfer Function*. Abo Akademi University Press, Finlandia.
- [4] Ogata, Katsuhiko. (1995). *Discrete-Time Control Systems*. New Jersey. Prentice Hall.
- [5] Arif, D.K. dkk. (2014). Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction. *International Journal Control and Automation (IJCA)*, Vol 7. No 9, 257-270.
- [6] Zhou, K., Doyle, J. C., & Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. New Jersey: Prentice-Hall.