Jurnal Sains & Matematika (JSM) ISSN 0854-0675
Volume14, Nomor 4, Oktober 2006 Kajian Pustaka: 141-145

Penyelesaian Masalah Cauchy Degenerate dengan Mereduksi ke Bentuk Masalah Cauchy Nondegenerate

Susilo Hariyanto[1]
[1]Jurusan Matematika Universitas Diponegoro

ABSTRAK---Dalam artikel ini diselidiki cara mencari penyelesaian masalah Cauchy abstrak degenerate melalui masalah Cauchy abstrak nondegenerate. Permasalahan ini dibicarakan dalam ruang Hilbert H yang dapat dinyatakan sebagai hasil tambah langsung dari Ker *M* dan (Ran M^*)^c. Selanjutnya metode ini digunakan untuk menyelesaikan limit nonrelativistik dari persamaan Dirac.

Kata kunci: masalah Cauchy abstrak degenerate, masalah Cauchy abstrak nondegenerate,Persamaan Dirac.

PENDAHULUAN

Dalam teori kuantum sering dijumpai masalah-masalah Cauchy abstrak *degenerate*. Adapun yang dimaksud dengan masalah Cauchy abstrak adalah sebagai berikut: Diberikan ruang Hilbert H, K atas lapangan C, operator M : D(M)$\subset$H$\rightarrow$K dan A: D(A)$\subset$H$\rightarrow$ K masing-masing operator linear. Persamaan diferensial,

$$\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t), \qquad z(0) = z_0 \tag{1}$$

dengan operator M tidak harus mempunyai *invers* disebut masalah Cauchy abstrak. Masalah Cauchy abstrak (1) disebut masalah Cauchy abstrak *degenerate* jika M tidak mempunyai *invers*. Masalah Cauchy abstrak (1) disebut masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* jika M mempunyai *invers*.

Oleh karena masalah Cauchy abstrak *degenerate* mempunyai banyak terapan, maka berikut ini akan diselidiki cara mencari penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* dengan terlebih dahulu mencari penyelesaian masalah Cauchy abstrak *nondegenerate*. Oleh sebab itu juga akan diselidiki asumsi-asumsi yang diperlukan agar masalah Cauchy abstrak *degenerate* dapat dibawa ke masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* yang lebih mudah untuk dicari penyelesaiannya.

KONSEP DASAR

Masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* secara lengkap sudah dibahas oleh Pazi (1983). Penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* berkaitan dengan infinitesimal generator suatu semigrup kontinu kuat. Teori-teori tentang semigrup kontinu kuat dibahas oleh Kappel dan Schapaccer (2000). Aplikasi masalah Cauchy *nondegenerate* pada limit nonrelativistik dari persamaan dirac juga telah dibahas oleh Thaller (1996). Adapun sebagai penunjang penelitian ini diperlukan teori-teori tentang operator linear pada ruang Hilbert, yang diantaranya telah dibahas oleh Weidmann (1980). Berikut akan diberikan beberapa definisi dan teorema dasar yang diperlukan untuk pembahasan selanjutnya.

Definisi (Weidmann, 1980)
Operator $T : \mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2$ *dikatakan tertutup jika dipenuhi: Jika barisan* $\{f_n\}\subset D(T)$ *konvergen di dalam* H_1 *dan barisan* $\{Tf_n\}$ *konvergen di dalam* H_2 *, maka* $\lim f_n \in D(T)$ *dan* $T(\lim f_n)=\lim Tf_n$.

Definisi (Kappel & Schappacer, 2000)
Diberikan $S(\cdot):[0,\infty)\rightarrow \mathsf{H}$ *keluarga operator terbatas pada* X . $S(\cdot)$ *disebut semigrup jika*

(i) $S(0) = I,$

(ii) $S(t+s) = S(t)\, S(s), \quad t,s \geq 0$

.

Selanjutnya jika dipenuhi :

(iii) $\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x,$ *untuk setiap* $x \in \mathsf{X},$

maka $S(\cdot)$ *disebut semigrup kontinu kuat.*

Definisi (Kappel & Schappacer, 2000)
Diberikan $S(\cdot):[0,\infty)\rightarrow \mathrm{H}$ *semigrup kontinu kuat pada X. Operator linear A dikatakan infinetisimal generator dari* $S(\cdot)$*, jika*

$$Ax = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left(S(h)x - x\right), \quad \textit{untuk}$$

$$x \in \mathrm{D}(A) = \left\{x \in \mathrm{X} \mid \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left(S(h)x - x\right) \ \textit{ada}\right\}.$$

Teorema (Pazi, 1983)
Diberikan A operator linear terdefinisi dense dengan $\rho(A)\neq\phi$*. Masalah nilai awal,* $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)$*, t>0 dan u(0)=x mempunyai penyelesaian tunggal yang turunannya kontinu pada* $[0,\infty)$ *untuk setiap nilai awal yang diberikan jika dan hanya jika A merupakan infinetisimal generator dari suatu semigrup kontinu kuat.*

Selanjutnya penyelesaian masalah Cauchy abstrak (1) yang dimaksud dalam pembahasan ini didefinisikan sebagai berikut:

Definisi
Penyelesaian strict dari masalah Cauchy abstrak (1) adalah suatu fungsi kontinu $z:[0,\infty)\rightarrow H$ *sehingga* $z(t) \in D(A)\cap D(M)$ *untuk semua* $t\geq 0$*,* $Mz(t)$ *mempunyai turunan yang kontinu dan memenuhi persamaan (1).*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Setiap penyelesaian *strict* masalah Cauchy abstrak *degenerate* pasti memenuhi $z(t) \in D_A$ untuk semua $t\geq 0$, dengan

$$D_A = \{\, z(t) \in D(A) \mid Az(t)\in \overline{(Ran\, M)}\,\}$$

Dalam menyelesaikan masalah Cauchy abstrak *degenerate* diberikan asumsi-asumsi sebagai berikut.

Asumsi 1
Operator A, M tertutup dan terdefinisi dense.

Lemma 2
Dengan Asumsi 1 operator $A|_{\mathrm{D}_A}$ *tertutup.*

Bukti : Misalkan $\{z_n(t)\}\subset D_A\subset D(A)$ sedemikian hingga $\lim z_n(t) = u(t)$ dan $\lim Az_n(t) = v(t)$. Karena A tertutup maka $u(t)\in D(A)$ dan $Au(t) = v(t)$. Akan tetapi perlu diingat bahwa untuk setiap $z_n(t)\in D_A$, maka $Az_n(t)\in \overline{(Ran\, M)}$. Oleh karena itu $v(t)\in \overline{(Ran\, M)}$ sehingga $u(t)\in D_A$. ■

Karena M operator tertutup, maka *Ker M* merupakan ruang bagian tertutup dari H. Misalkan *P* proyeksi *ortogonal* pada *Ker M*, akibatnya $P^T = 1 - P$ juga merupakan proyeksi *ortogonal* pada $(Ker\, M)^{\perp}$. Karena *M* tertutup dan terdefinisi *dense* dalam H, maka M^* tertutup dan terdefinisi *dense* dalam K. Untuk selanjutnya misalkan pula *Q* proyeksi *ortogonal* pada $Ker\, M^*$, akibatnya $Q^T = 1 - Q$ juga merupakan proyeksi *ortogonal* pada $(Ker\, M^*)^{\perp}$. Dengan demikian dapat dituliskan :

$$P\mathrm{H} = Ker\, M,\ P^T\mathrm{H} = \overline{(Ran\, M^*)},\ Q\mathrm{K} = Ker\, M^* \text{ dan } Q^T\mathrm{K} = \overline{(Ran\, M)}.$$

Operator *M injektif* jika dan hanya jika $Ker\ M=\{0\}$. Oleh karena itu agar dimungkinkan mereduksi operator *M* yang belum tentu mempunyai *invers* ke operator yang mempunyai *invers* terlebih dahulu didefinisikan operator pembatasan dari *M* pada $(Ker\, M)^{\perp}\cap D(M)$ sebagai berikut:

$$M_r = M|_{\mathrm{D}(M_r)}, \text{ dengan}$$

$D(M_r) = (\ker M)^{\perp}\cap D(M)$.

Operator $M|_{\mathrm{D}(M_r)} = M_r$ mempunyai *invers* seperti tertuang dalam lemma berikut.

Lemma 3
Operator M_r *mempunyai invers.*

Misalkan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ merupakan bayangan *invers* dari $x(t)\in (Ker\, M)^{\perp}$ terhadap proyeksi P^T yaitu $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} = \{x(t) + y(t) \mid y(t)\in Ker\ M\}$, $x(t)\in (Ker\, M)^{\perp}$. Apabila diperhatikan himpunan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ belum tentu merupakan singelton.

Selanjutnya akan didefinisikan operator A_0 yang merupakan operator pembatas dari operator A pada $(Ker\, M)^{\perp}$ sebagai berikut:

$A_0\{x(t)\}$ =
$A\left\{\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}\cap \mathsf{D}_A\right\}\subset \overline{(Ran\ M)}$, untuk setiap $x(t)\in$ D(A_0) (2)
dengan,
D(A_0)=
$\left\{ x(t)\in(Ker\ M)^{\perp} \mid \left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}\cap \mathsf{D}_A \neq \phi\right\}$

Operator A_0 bernilai tunggal jika $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}\cap \mathsf{D}_A$ merupakan singelton. Untuk itu diperlukan asumsi sebagai berikut:

Asumsi 4
$PD_A\subset D_A$ dan operator $(QAP)|_{PDA}$ mempunyai invers yang terbatas.

Lemma 5
Dengan Asumsi 1 dan 4, vektor $z(t)\in H$ merupakan anggota ruang bagian D_A jika dan hanya jika $z(t)\in$ D(A) dan $Pz(t) = -(QAP)^{-1}QAP^Tz(t)$.

Akibat 6
Setiap $x(t)\in P^T$ D$_A$ $\subset (\ker M)^{\perp}$ menyatakan dengan tunggal $z(t)\in$ D$_A$ sehingga x(t) = P^T z(t) dan z(t) = (1-(QAP)$^{-1}$QA) x(t).

Menurut Akibat 6 dapat disimpulkan bahwa himpunan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}\cap \mathsf{D}_A$ merupakan singelton.

Selanjutnya berdasarkan Akibat 6 dapat didefinisikan operator Z_A yaitu sebagai berikut:

$$Z_A = P^T - (QAP)^{-1}QAP^T$$

Operator Z_A terdefinisi pada D (Z_A) $\supset P^T$ D$_A$. Pembatasan $Z_A|_{P^T\mathsf{D}_A}$ adalah 1 - $(QAP)^{-1}QA$ pada P^T D$_A$ yang merupakan *invers* dari proyeksi $P^T|_{\mathsf{D}_A}$ dalam arti: $Z_AP^T = 1$ pada D$_A$ dan $P^TZ_A = 1$, pada P^T D$_A$

Jadi operator A_0 (lihat 2) dapat dinyatakan menjadi:

$A_0 = A\, Z_A$, pada D(A_0)= P^T D$_A$

dan untuk setiap $z(t)\in$ D$_A$ diperoleh $A_0x(t)$= $Az(t)$ dengan $x(t) = P^Tz(t)$.

Asumsi 7
Operator A mempunyai invers yang terbatas.

Operator A tertutup dan mempunyai *invers* terbatas ekuivalen dengan operator A *injektif* dengan *Ran A* = K. Hal ini berakibat $A|_{\mathsf{D}_A}$ mempunyai *invers* terbatas yaitu :

$A|_{\mathsf{D}_A}$: D$_A$ $\rightarrow Q^T$K

$(A|_{\mathsf{D}_A})^{-1}$: Q^TK $\rightarrow$ D$_A$

Dengan demikian operator A_0^{-1} = $(A\ Z_A)^{-1}$ = $P^TA^{-1}|_{Q^T\mathsf{K}}$ terbatas dan terdefinisi pada Q^TK .

Proposisi 8

(i) *Jika z(t) merupakan penyelesaian dari masalah Cauchy abstrak (1), maka $y(t) = e^{-\lambda_0 t}z(t)$ merupakan penyelesaian masalah Cauchy abstrak : $\frac{d}{dt}My(t) = (A-\lambda_0 M)y(t)$* (3)

(ii) *Jika y(t) merupakan penyelesaian dari masalah Cauchy abstrak (3), maka $z(t) = e^{\lambda_0 t}y(t)$ merupakan penyelesaian masalah Cauchy abstrak (1).*

Bukti : Hanya dibuktikan untuk (i), sedangkan bukti (ii) analog dengan (i).

(i) Jika $z(t)$ merupakan penyelesaian masalah Cauchy abstrak (1) dan $y(t)= e^{-\lambda_0 t}z(t)$, maka dengan persamaan (3) diperoleh :

$$\frac{d}{dt}My(t) = \frac{d}{dt}Me^{-\lambda_0 t}z(t) = M\frac{d}{dt}e^{-\lambda_0 t}z(t)$$
$$= M\{-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}z(t) + e^{-\lambda_0 t}\frac{d}{dt}z(t)\}$$
$$= -\lambda_0 Me^{-\lambda_0 t}z(t) + e^{-\lambda_0 t}\frac{d}{dt}Mz(t)$$
$$= -\lambda_0 My(t) + e^{-\lambda_0 t}Az(t)$$
$$= -\lambda_0 My(t) + Ay(t) = (A-\lambda_0 M)y(t). \blacksquare$$

Akibat 9
Jika terdapat skalar λ_0 sedemikian hingga operator $(A-\lambda_0 M)$ mempunyai invers terbatas, maka Asumsi 7 tidak diperlukan.

Lemma 10
Dengan Asumsi 1, 4 dan 7 operator A_0 tertutup pada D*(A_0)*= P^T D$_A$.

Perlu diingat kembali bahwa untuk setiap $z(t) \in$ D$_A$ diperoleh $Az(t) = A_0 x(t)$ dengan $x(t) = P^T z(t)$. Lebih lanjut untuk $z(t) \in$ D(M), diperoleh $Mz(t) = M\left(Pz(t) + P^T z(t)\right) = MP^T z(t) = M_r x(t)$, dengan $x(t) = P^T z(t)$.

Dengan demikian dengan asumsi-asumsi di atas masalah Cauchy abstrak *degenerate* dapat direduksi menjadi masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} M_r x(t) = A_0 x(t), \qquad x(0) = P^T z_0.$$

dengan M_r mempunyai *invers*. Untuk proses selanjutnya tergantung asumsi dari operator M_r .

Asumsi 11
Diberikan D$_A \subset$ D*(M) dan salah satu pernyataaan di bawah ini dipenuhi :*
Kasus (a) $(M_r)^{-1}$ terbatas dan terdefinisi pada $Q^T K$.
Kasus (b) M_r terbatas dan terdefinisi pada $P^T H$.

Untuk kasus (a) didefinisikan operator : $A_1 = A_0(M_r)^{-1}$,
Dengan $D(A_1)=\{y \in Q^T K \mid (M_r)^{-1} y \in D(A_0)\}$
$= M_r P^T D_A = MD_A$.
Operator A_1 tertutup, karena merupakan komposisi dari operator tertutup A_0 dan operator terbatas $(M_r)^{-1}$. Jadi operator A_1 terdefinisi *dense* di dalam ruang Hilbert K$_0$=$\overline{(M\mathrm{D}_A)}$.

Untuk kasus (b) didefinisikan operator : $A_2=(M_r)^{-1}A_0$,
dengan D(A_2)={$x(t) \in P^T$ D$_A$| $A_0 x(t) \in$ *Ran M*}=A_0^{-1}Ran *M*.
Operator A_2 tertutup karena merupakan komposisi dari operator terbatas $(M_r)^{-1}$ dan operator tertutup A_0. Jadi operator A_2 terdefinisi *dense* di dalam ruang Hilbert H$_0$=$\overline{(P^T\mathrm{D}_A)}$.

Asumsi 12
A_1 (A_2) membangun semigrup kontinu kuat di K$_0$ *(*H$_0$*).*

Teorema 13
Dengan Asumsi 1, 3, 7 ,11 dan 12 didapat :
Kasus (a) Untuk setiap nilai awal $z_0(t) \in D_A$, masalah Cauchy abstrak degenerate mempunyai penyelesaian strict tunggal
$z(t) = Z_A (M_r)^{-1} e^{A_1 t} M z_0$.
Kasus (b) Untuk setiap nilai awal $z_0(t) \in A^{-1}$Ran M, penyelesaian strict tunggal
$z(t) = Z_A e^{A_2 t} P^T z_0(t)$.

Bukti :
Kasus (a).
Misalkan $z_0(t) \in$ D$_A$, maka $M z_0(t) \in$ D(A_1). Dengan Asumsi 12 masalah Cauchy abstrak *nondegenerate*,

$\frac{d}{dt} y(t) = A_1 y(t), \quad y(0) = Mz_0(t)$ mempunyai penyelesaian tunggal $y(t) = e^{A_1 t} y(0)$ yang mempunyai turunan kontinu dan $y(t) \in$ D(A_1) untuk semua $t \geq 0$. Karena $(M_r)^{-1}$ terbatas, $x(t)=(M_r)^{-1}y(t)$ juga mempunyai turunan yang kontinu, dengan $x(t) \in P^T$ D$_A$. Didefinisikan $z(t)=Z_A x(t)$, maka $Mz(t) = M_r x(t) = y(t)$ mempunyai turunan yang kontinu dan

$$Az(t) = A_0 x(t) = A_1 y(t) = \frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} Mz(t).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $Az(t)$ kontinu dan karena A^{-1} terbatas maka $z(t)$ juga kontinu. Dengan demikian $z(t) = Z_A (M_r)^{-1} e^{A_1 t} M z_0(t)$ merupakan penyelesaian *strict* masalah Cauchy abstrak *degenerate*.

Kasus (b).
Misalkan $z_0(t) \in$ D$_A$ dengan $Az_0(t) \in \mathrm{Ran}\, M$ maka $P^T z_0(t) \in$ D(A_2). Dengan Asumsi 12 masalah Cauchy abstrak *degenerate*

$\frac{d}{dt} x(t) = A_2 x(t), \quad x(0) = P^T z_0(t)$

mempunyai penyelesaian tunggal $x(t) = e^{A_2 t} x(0)$ yang mempunyai turunan yang kontinu dan $x(t) \in$ D(A_2) untuk semua $t \geq 0$. Dengan demikian

$z(t) = Z_A x(t) = Z_A P^T z(t) \in D_A$. Karena M_r terbatas maka $Mz(t) = M_r x(t)$ mempunyai turunan yang kontinu, sehingga

$$\frac{d}{dt} Mz(t) = \frac{d}{dt} M_r x(t) = M_r A_2 x(t) = A_0 x(t)$$

kontinu. Ingat bahwa $A_0 x(t) = Az(t)$, hal ini berakibat $z(t)$ kontinu dengan memperhatikan keterbatasan operator A^{-1}. Jadi $z(t) = Z_A e^{A_2 t} P^T z_0(t)$ penyelesaian *strict* dan tunggal dari masalah Cauchy abstrak *degenerate*. ■

KESIMPULAN

Untuk mencari penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mereduksi masalah Cauchy *degenerate* ke masalah Cauchy *nondegenerate* yang lebih mudah dicari penyelesaiannya. Selanjutnya dengan operator tertentu yang mengawankan setiap penyelesaian *nondegenerate* ke *degenerate*, dapat dicari penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate*.

DAFTAR PUSTAKA

1. Kappel, F. & Schappacher, W., 2000, *Strongly Continuous Semigroups, An Introduction*.
2. Pazy, A., 1983, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
3. Thaller, B. & Thaller, S., 1996, *Factorization of Degenerate Cauchy Problems : The Linear Case*, J. Operator Theory, 121-146.
4. Weidman, J., 1980, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York .
5. Susilo, 2005. *Reduksi Masalah Cauchy Abstrak Degenerate ke Masalah Cauchy Abstrak NonDegenerate,* Jurnal Matematika, Volume 8, Nomor 1, hal. 33-36