Jurnal Sains & Matematika (JSM) ISSN 0854-0675
Volume 15, Nomor 2, April 2007 Artikel Penelitian: 61-67

Pemodelan Regresi untuk Rancangan Percobaan Faktor Tunggal

Dwi Ispriyanti[1]
[1]Staf Pengajar jurusan Matematika Fakultas MIPA UNDIP Semarang

ABSTRAK---Metode Staistik yang sering digunakan dalam percobaan adalah analisis ragam. Dalam tulisan ini akan dibahas analisis ragam dengan pengaruh tetap diselesaikan dengan pendekatan metode regresi,hal itu dapat dilakukan kalau modelnya diindetifikasi secara benar dan kalau langkah-langkah pencegahan telah diambil agar diperoleh persamaan normal yang bebas. Suatu ciri analisis ragam adalah bahwa model analisis ini terparameterisasi secara berlebih(*Overparameterized*), sehingga perlu membuat kendala terhadap parameter-parameternya. Pendekatan model regresi terhadap masalah analisis ragam mengharuskan peubah bebas X dalam bentuk katagori, yaitu nol dan satu

Kata kunci : analisis ragam, kendala

PENDAHULUAN

Suatu metode yang banyak digunakan untuk menganalisis data dari suatu percobaan yang terancang adalah teknik analisis ragam (analysis of variance technique). Seringkali teknik ini dipandang sama sekali berbeda dari regresi secara umum, belum banyak peneliti yang menyadari bahwa setiap masalah analisis ragam dengan pengaruh tetap dapat ditangani melalui teknik regresi secara umum kalau modelnya diidentifikasi secara benar dan langkah-langkah pencegahan telah diambil agar diperoleh persamaan normal yang bebas. Prosedure regresi berganda untuk memperoleh parameter nya ,yaitu b = (X'X)$^{-1}$(X'Y)$^{-1}$, maka disyaratkan bahwa matriks (X'X) bersifat tidak singular, ini berarti bahwa persamaan normalnya harus terdiri atas persamaan-persamaan yang bebas satu sama lain yang banyaknya sama dengan banyaknya parameter yang harus duduga. Akan tetapi , kalau datanya dari suatu percobaan yang terancang, perlu diperiksa bahwa semua persamaan itu bebas, kalau ternyata tidak demikian , mengambil langkah-langkah yang diperlukan untuk memperoleh nilai dugaan. Suatu ciri analisis ragam adalah model ini terparameterisasikan secara berlebih , artinya model ini mengandung lebih banyak parameter dari pada yang dibutuhkan untuk merepresentasikan pengaruh-pengaruh (effect) yang diinginkan. Parameterisasi berlebihan ini biasanya dkompesasi dengan membuat kendala terhadap pameter-peremeternya. Sering kali tidak disadari bahwa semua situasi analisis ragam mempunyai model, dan bahwa model itu dan hanya model itulah yang menjadi dasar bagi pembuatan tabel analisis ragam.

Pendekatan regresi untuk suatu rancangan percobaan, maka peubah bebas (X) disini diberi nilai satu (1) dan nol (0), yaitu bersifat katagori, yang selanjutnya model matematikanya dianggap bagian dari analisis regresi. Dalam tulisan ini dibatasi pada analisis ragam untuk percobaan faktor tunggal dengan model tetap.

Contoh penerapan metode ini adalah menyangkut suatu percobaan tentang pengaruh kafein yang kabarnya merupakan perangsang atau stimulant. Besarnya rangsangan berbeda menurut dosis yang dicerna. Untuk mendapatkan kebenaran itu maka dilakukan percobaan terhadap pekerjaan fisik, yaitu pemberian taraf dosis yang berbeda pada 30 mahasiswa laki-laki yang sehat dan berumur sama..

MODEL LINIER PERCOBAAN FAKTOR TUNGGAL

Percobaan factor tunggal merupakan rancangan yang paling sederhana diantara rancangan percobaan yang baku. Jika kita ingin mempelajari t buah kelompok dan setiap kelompok menggunakan n_i satuan percobaan, model liniernya adalah sebagai berikut :

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \varepsilon_{ij} \quad ; i = 1,2,\ldots,t \; ; j= 1,2,\ldots,n_i \; ; \quad n = \sum_i n_i \qquad (1)$$

Dimana :

y_{ij} = Pengamatan ke j dalam kelompok ke i

μ = Nilai tengah populasi, sering disebut dengan rataan umum

β_i = Parameter yang menyatakan rataan kelompok ke i

ε_{ij} = Galat pada pengamatan ke(i,j)

Model yang diambil dalam percobaan ini adalah model tetap, artinya pengaruh β_i bersifat tetap dan galat percobaan ε_{ij} bebas, menyebar secara normal dengan nilai tengah sama dengan nol dan ragam σ^2. Keadaan ini menggambarkan bahwa dalam model ini, peneliti hanya dapat mengambil kesimpulan yang berhubungan dengan perlakuan yang dicobakan.Dalam simbul matematika dapat dituliskan sbb :

E(β_i) = β_i , E (ε_{ij}) = 0 ; E ($\varepsilon_{ij}{}^2$) = σ^2; ε_{ij} tidak berkorelasi dan $\sum \hat{\beta}_i = 0$

$\beta_i = \mu_i - \mu$ = nilai tengah perlakuan ke$_i$ – nilai tengah populasi

Hipotesisis untuk menguji bahwa tidak ada pengaruh perlakuan terhadap respon adalah sebagai berikut :

Ho : $\beta_1 = \beta 2 = \ldots = \beta_t = 0$

Hi= minimal ada satu $\beta i \neq 0 (i = 1,2,..,t)$

Analisis ragam untuk model tetap dapat diperlihatkan pada tabel 1.

Keterangan : $y_{i.} = \sum_{j=1} y_{ij}$ $\quad y_{..} = \sum_{i.j} y_{ij}$

FK= factor koreksi = $\frac{Y^2..}{n}$; JKP = Jumlah kuadrat perlakuan = $(\frac{y_{1.}{}^2}{n_1} + .. + \frac{y_{t.}{}^2}{n_t}) - FK$

JKT = jumlah kuadrat Total = $\sum_{i,j} y^2{}_{ij} - FK$;

JKG = jumlah kuadrat Galat =JKT-JKP

PENDEKATAN REGRESI TERHADAP PERCOBAAN FAKTOR TUNGGAL

Dari model linier (1) diatas, dibentuk dalam model regresi dalam lambang matriks, dapat ditulis :

Y=X $\beta + \varepsilon$; E(Y)= $\mu x_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_t x_t$

Dengan :

$$y' = (y_{11}, y_{12,} ..., y_{in_1}, y_{21}, ..., y_{2n_2}, ..., y_{t1}, ..., y_{tn_1})$$

Tabel 1. Analisis Ragam Model Tetap

Sumber Keragaman	DB	Juml.Kuadrat	Kuadrat Tangah	E(KT)
(Kelompok) Antar Kelompok	t-1	JKP	KTP	$\sigma^2 + (r/(t-1))\sum_i \beta_2{}^2$
Galat (dalam kelompok)	n-t	JKG	KTG	σ^2
Total	n-1	JKT		

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 1 & 0 & 0 & ... & 1 \\ : & : & : & ... & : \\ 1 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} ; \qquad \beta' = (\mu, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_t) \ ; \quad \varepsilon' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_t)$$

Jika kita perhatikan matriks X diatas, maka terlihat bahwa lajur pertama sama dengan jumlah lajur ke 2 sampai lajur ke t, jadi sesungguhnya hanya ada t persamaan dengan (t+1) yang tidak diketahui, sehingga lajur-lajur matriks ini tidak bebas satu sama lain.Karena X'X singular, sehingga persamaan normal tidak memberikan jawaban yang tunggal untuk parameter yang ingin ditaksir.Agar persamaan normal mempunyai jawab yang tunggal, maka syarat tambahan/kendala perlu dimasukkan. Kendala yang memberikan jawaban seperti itu adalah :

$$n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + ... + n_t\beta_t = 0 \qquad (2)$$

dengan demikian persamaan normal : (X'X) b= X'Y dapat ditulis sebagai :

$$\begin{bmatrix} n & n_1 & n_2 & ... & n_t \\ n_1 & n_1 & 0 & ... & 0 \\ n_2 & 0 & n_2 & ... & 0 \\ : & . & . & ... & : \\ : & . & . & ... & : \\ n_t & 0 & 0 & ... & n_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ : \\ : \\ b_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\bar{y}_{..} \\ n_1\bar{y}_{1.} \\ n_2\bar{y}_{2.} \\ : \\ : \\ n_1\bar{y}_{t.} \end{bmatrix}$$

dijabarkan dalam persamaan :

$$nb_0 + n_1b_1 + ... + n_tb_t = n\bar{y}_{..}$$

$$nb_0 + n_1b_1 \qquad\qquad = n_1\bar{y}_1$$

$$nb_0 \qquad + n_2b_2 \qquad = n_2\bar{y}_{2.}$$

....

$$nb_0 \qquad\qquad + n_tb_t = n\bar{y}_{t.}$$

baris pertama akibat kendala, maka berlaku untuk penaksirannya, dapat disederhanakan :

$$nb_0 = n\,\bar{y}_{..} ; atau b_0 = \bar{y}_{..}$$

dengan memasukkan nilai b_0 , pada persamaan (3) , didapat :

$b_1 = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..}$; $b_2 = \bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..}$,... ; $b_t = \bar{y}_{t.} - \bar{y}_{..}$

Sehingga persamaan (1) diatas dapat ditulis :

$$\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{..} + b_i = \bar{y}_{..} + \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} = \bar{y}_{i.}$$

untuk j= 1,2,...,n_i , maka JKR dan JKS dalam persamaan regresi :

JKR =

$$\sum_i\sum_j(\hat{y}_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i\sum_j(\hat{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i n_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$

JKS = $\sum_i\sum_j(y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 = \sum_i\sum_j(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$

Dalam istilah Rancangan Percobaan ,JKR adalah JK antar kelompok dan JKS adalah JK dalam Kelompok , sehingga tabel analisis ragamnya setelah dilakukan pendekatan regresi adalah sbb:

Tabel 2. Tabel Analisis Ragam Setelah dilakukan Pendekatan Regresi

Sumber Keragaman	DB	Juml.Kuadrat	Kuadrat Tangah
Antar Kelompok	t-1	$\sum_i \sum_j n_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$\sum_i \sum_j n_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$/t-1
Dalam Kelompok	n-t	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$ /(n-t)
Total	n-1	$\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{..})$	

Dalam pengujian hipotesis:

H_0 : $\beta_1 = \beta 2 = \ldots = \beta_t = 0$

H_1= minimal ada satu $\beta i \neq 0 (i = 1,2,..,t)$

Bila H0 diterima, maka baik JK antar kelompok maupun JK dalam kelompok memberikan taksiran σ^2 yang tak bias. Karena itu dapat dibentuk uji F sebagai berikut :

$$F = \frac{JKR / t - 1}{JKS / n - t}$$

Bila $F_{(t-1,n-t;\,\alpha)}$ < F untuk suatu α tertentu, maka tolak H0 , sebaliknya H1 diterima.

PENGGUNAAN PEUBAH BONEKA

Cara lain untuk menangani permasalahan diatas adalah dengan menggunakan peubah boneka yaitu peubah yang dijadikan dalam bentuk biner, nilainya 0 atau 1. Dalam penelitian kita sering berhadapan dengan peubah yang sifatnya klasifikasi, misalnya kita ingin membandingkan prestasi belajar murid wanita dan pria, pengaruh agama terhadap jumlah anak dalam rangka pelaksanaan KB, ataupun pengaruh jenis makanan terhadap berat ayam piaraan.Karena semua peubah dalam regresi bersifat kuantitatif, maka peubah kualitatif harus dijadikan kuantitatif agar regresi dapat digunakan. Prinsip dasar pemakaian peubah boneka bila mempunyai t kelompok, maka peubah bonekanya adalah (t-1), misalnya ada 4 kelompok, A ,B ,C ,D. maka diperlukan 3 peubah boneka, dan dimisalkan didefinisikan sebagai berikut :

X_2	X_3	X_4	
0	0	0	→ A
1	0	0	→ B
0	1	0	→ C
0	0	1	→ D

Artinya bila pengamatan masuk kelompok A, maka X_2=X_3=X_4 =0, bila masuk B maka X_2=1, X_3=0 dan X_4 =0, bila masuk C maka X_2=0, X_3=1, X_4=0 dan bila pengamatan masuk D, X_2=0, X_3=0 dan X_4=1;

Sehingga bila ada t kelompok, maka peubah bonekanya sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccccc} X2 & X3 & X4 & \ldots & Xt \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian , maka diperoleh model :

$$
\begin{array}{ccc}
Y & X_0\ X_{2..}\ X_t & a \\
\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n1} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n2} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ \vdots \\ y_{t1} \\ y_{tnt} \end{bmatrix}
=
&
\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & .. & 0 \\ : & : & : & : \\ 1 & 0 & \ldots & : \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ : & : & : & : \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ : & : & : & : \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ : & : & & \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_t \end{bmatrix}
\end{array}
; n = n1 + n2 + \ldots + nt
$$

Pada persamaan diatas tidak muncul a_1 dan X_1, karena pengaruh kelompok A telah masuk kedalam a_0, $a_2,\ldots,a_t$.

Dari matrik X diatas, dapat dihitung matrik (X'X) dan inversnya sebagai berikut :

$$
X'X = \begin{bmatrix} n & n_2 & n_3 & \ldots & n_t \\ n_2 & n_2 & 0 & \ldots & 0 \\ n_3 & 0 & n_3 & \ldots & 0 \\ : & : & : & : & : \\ n_t & 0 & 0 & \ldots & n_t \end{bmatrix}
, \quad (X'X)^{-1} = \frac{1}{n_t} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & \frac{n1+n2}{n_2} & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 1 & \frac{n1+n3}{n_3} & \ldots & 1 \\ : & : & : & : & : \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & \frac{n1+nt}{nt} \end{bmatrix}
$$

$$
\text{Dan } (X'Y) = \begin{bmatrix} \sum_i \sum_j y_{ij} \\ \sum_j y_{2j} \\ \sum_j y_{3j} \\ \vdots \\ \sum_j y_{tj} \end{bmatrix}, \text{ sehingga } a = (X'X)^{-1}(X'Y) = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1.} \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{y}_3 - \bar{y}_1 \\ \\ \bar{y}_t - \bar{y}_1 \end{bmatrix}
$$

Bila pengaruh kelompok dinyatakan dengan $=b_1, b_2, b_3, \ldots, b_t$, maka

$b_1 = a_0 - \bar{y}_{..} = \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..}$

$b_2 = a_2 + b_1 = (\bar{y}_{2.} - \bar{y}) - (\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..}) = (\bar{y}_{2.} - \bar{y}_{..})$

………………………………………………..

$b_t = a_t + b_1 = (\bar{y}_{t.} - \bar{y}) - (\bar{y}_{1.} - \bar{y}_{..}) = (\bar{y}_{t.} - \bar{y}_{..})$

Dari persamaan-persamaan diatas didapatkan Jumlah kuadrat antar kelompok dan Jumlah kuadrat dalam kelompok seperti table 2 diatas.

CONTOH TERAPAN :
Kafein yang dicernakan melaui mulut kabarnya merupakan perangsang atau stimulan. Besarnya rangsangan serta keberagamannya berbeda menurut dosis yang dicerna. Untuk mendapatkan informasi mengenai pengaruh kafein pada suatu pekerjaan fisik, maka dilakukan percobaan sebagai berikut : Taraf-taraf perlakukan yang dicobakan adalah 0,100, dan 200 mg kafein. Tiga puluh mahasiswa laki-laki yang sehat dan berumur sama diambil dan dilatih mengetukkan jari. Setelah latihan selesai, untuk setiap perlakuan diambil sepuluh orang secara acak. Dua jam setelah perlakuan diberikan, setiap orang disuruh melakukan ketukan jari. Banyaknya ketukan jari permenit dicatat dan hasilnya diberikan pada Tabel dibawah ini :

Tabel 3: Banyaknya ketukan jari per menit oleh 30 orang mahasiswa

	Kelompok		
	0	100	200
	242	248	246
	245	246	248
	244	245	250
	248	247	252
	247	248	248
	248	250	250
	242	247	246
	244	246	24 8
	246	243	245
	242	244	250
$\sum$	2448	2464	2483
$\bar{y}_i$	244.8	246.4	248.3

dan $\bar{y}$ = 246.5

Jadi b_0 = 246.5 , b_1 = 244.8 – 246.5 =-1.7 , b_2 = 246.4 – 246.5 = -0.1 dan b_3 = 248.3 – 246.5 = 1.8 ; n=30 , n_1= n_2=n_3=10

Tabel 4 : Analisis Ragam

Sumber	DB	JK	RK	F
Antarkelompok	2	61.40	30.70	6.18
Dalam perlakuan	27	134.10	4.97	
Total	29	195.50		

Dengan mengambil F (2,27,0.95) = 3.35 , maka F hitung > F tabel , sehingga dapat disimpulkan bahwa H0 ditolak , yang berarti ada pengaruh yang significant dari ketiga dosis kafein tersebut.

Dengan Menggunakan peubah boneka
Karena hanya ada 3 kelompok , maka dibuat 2 peubah boneka :

X2	X3	
0	0	→ bila pengamatan masuk kelompok dosis 0
1	0	→ bila pengamatan masuk kelompok dosis 100
0	1	→ bila pengamatan masuk kelompok dosis 200

Dengan menggunakan spss 11, diperoleh Tabel koefisien sebagai berikut berikut :

Coefficients (a)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	T	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	244.800	.705		347.359	.000
	X2	1.600	.997	.295	1.605	.120
	X3	3.500	.997	.646	3.512	.002

a Dependent Variable: Y
nilai dari a0 = 244.8 , a2 = 1.600 dan a3 = 3.500. Tabel analisis ragamnya sebagai berikut :

Tabel 5: Analisis Ragam

Model		Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	61.400	2	30.700	6.181	.006(a)
	Residual	134.100	27	4.967		
	Total	195.500	29			

Hasil yang diperoleh dengan menggunakan peubah boneka sama dengan tabel 4 diatas , sehingga kesimpulannya adalah sama , yaitu ada pengaruh yang significant dari ketiga dosis kafein tersebut.

KESIMPULAN :

1. Dalam analisis ragam semua peubah bebas atau factor bersifat katagori, sedangkan dalam analisis regresi bersifat kuantitatif
2. Data pada analisis ragam biasanya berasal dari percobaan yang dirancang, seperti percobaan dilaboratorium, sebaliknya data dari analisis regresi umumnya berasal dari survey di lapangan.
3. Matrik X'X pada analisis ragam bersifat singular, sehingga perlu syarat tambahan, sedangkan pada analisis regresi jarang sekali hal itu terjadi.
4. Dari contoh terapan diatas dapat , maka dosis kafein mempunyai pengaruh yang nyata terhadap pekerjaan fisik

DAFTAR PUSTAKA.

1. Drapper, NR and Harry Smith,S ,1992," Analisis Regresi Terapan ", edisi kedua, Gramedia Pustaka Utama , Jakarta
2. R.K Sembiring, 1995, " Analisis Regresi " ,Edisi ke 2. Penerbit ITB Bandung.
3. Kutner,Nachtsheim,Neter,2004, " Applied Linier Regression Models",Mc Graw-Hill, New York.