

APLIKASI METODE ELEMEN HINGGA UNTUK PERHITUNGAN PERAMBATAN PANAS PADA KONDISI TUNAK

Supriyono

Sekolah Tinggi Teknologi Nuklir – BATAN
Jl. Babarsari Kotak Pos 6101/YKBB Yogyakarta.
E-mail: masprie_sttn@yahoo.com

Abstrak

Jika suatu benda terdapat gradient suhu, maka akan terjadi perpindahan energi dari bagian bersuhu tinggi ke bagian bersuhu rendah (proses perambatan panas). Proses perhitungan perubahan panas tidak hanya dapat dilakukan melalui pengamatan langsung, tetapi dapat juga melalui perhitungan numeris. Bentuk model matematika perambatan panas adalah bentuk persamaan diferensial parsial. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial bentuk parabola, para peneliti maupun praktisi saat ini banyak yang masih menggunakan metode beda hingga (Finite Difference Method). Ada kelemahan penggunaan metode beda hingga, yaitu diskritisasi domain yang akan dihitung perambatan panasnya hanya berbentuk segi empat. Sehingga untuk domain yang tidak berbentuk segi empat akan banyak menimbulkan galat. Salah satu metode penyelesaian yang saat ini sedang dikembangkan adalah penggunaan metode elemen hingga (Finite Element Method). Adapun kelebihan metode elemen hingga adalah diskritisasi elemennya dapat berbentuk segi tiga, segi empat, segi lima, dsb. Sehingga untuk domain yang tidak berbentuk segi empat, bentuk elemennya dapat menyesuaikan bentuk domainnya. Akibatnya tingkat galatnya menjadi rendah. Perhitungan dengan metode elemen hingga, komputasinya banyak yang berbentuk matriks dan banyak menggunakan iterasi, sehingga diperlukan teknik pemrograman yang efektif dan efisien. Dalam Penelitian ini dibatasi untuk domain yang berkondisi tunak dan bentuk elemennya adalah elemen segitiga. Hasil Penelitian menunjukkan bahwa dengan menggunakan metode elemen hingga perhitungan perubahan panas galatnya lebih sedikit dibandingkan dengan menggunakan metode beda hingga. Perangkat lunak yang dibangun juga dapat untuk menghitung perambatan panas untuk banyak elemen sebarang.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Parsial, Perambatan Panas, Kondisi Tunak, Metode elemen hingga, komputasi numeris.

1. PENDAHULUAN

Banyak persoalan dalam bidang rekayasa dan teknik kimia khususnya tentang perpindahan panas (*heat transfer*) bentuk model matematikanya banyak yang berbentuk persamaan diferensial parsial. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial ada beberapa metode yang dapat digunakan. Salah satu metode tersebut dan saat ini sedang menjadi bahan penelitian adalah metode elemen hingga (*finite element methods*) [1], [2].

Kelebihan metode elemen hingga adalah banyaknya variasi bentuk diskritisasi elemennya, yaitu bentuk segi empat, segi tiga dan segi yang lain. Sedangkan jika dengan metode beda hingga bentuk diskritisasi elemennya hanya berbentuk segi empat saja. Sehingga jika bentuk domainnya tidak teratur, maka penyelesaian dengan metode elemen hingga dapat memperkecil tingkat galat (*error*). Karena dapat mendiskritisasi domainnya menjadi bentuk segi tiga atau gabungan segi tiga dan segi empat.

Tujuan penelitian ini adalah mengaplikasikan metode elemen hingga untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial untuk aliran kalor dalam keadaan tunak berdimensi dua [3]. Adapun obyek penelitiannya adalah suatu simulasi domain bidang dimensi dua yang pada

batas tertentu atau titik-titik tertentu diketahui suhunya. Dengan mendiskritisasi domain tersebut dengan bentuk elemen segitiga, maka dengan mengaplikasikan metode elemen hingga akan dapat diketahui suhu pada titik-titik lain diluar daerah yang diketahui. Dalam perhitungannya, metode elemen hingga membutuhkan perhitungan yang agak rumit dan ukuran matriks yang besar, maka dalam perhitungan ini digunakan komputer. Dalam perhitungannya aplikasi ini digunakan program komputer dengan Bahasa Pascal [4].

Hasil penelitian menunjukkan bahwa program komputer aplikasi metode elemen hingga untuk perhitungan konduksi panas dengan konduksi tunak dua dimensi dapat berjalan dengan baik dan aplikasi ini dapat digunakan untuk bentuk domain sembarang. Semakin banyak jumlah elemen dalam suatu domain yang sama semakin akurat hasilnya. Program Pascal versi 6.0 masih cukup mampu untuk mendukung penelitian ini.

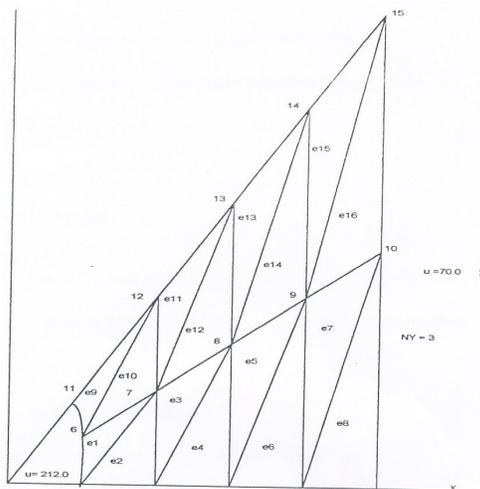
2. DASAR TEORI

Aliran kalor dua dimensi (*two dimensional heat flow*) untuk keadaan tunak berlaku persamaan Laplace [2] sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

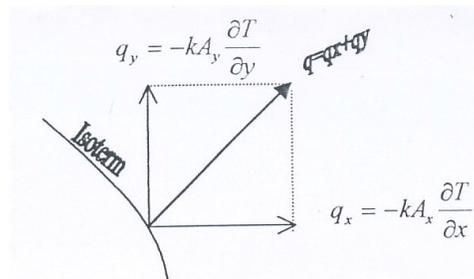
dimana T adalah Suhu, x jarak ke arah x dan y adalah adalah jarak ke arah y .

Dalam penelitian ini bentuk domain dimisalkan seperti gambar 1 berikut:



Gambar 1. Bentuk Domain Perambatan Panas dengan Elemen Segi Tiga

Aliran kalor total pada setiap titik dalam domain tersebut di atas adalah resultan dari q_x dan q_y di titik seperti gambar 2 berikut ini:



Gambar 2. Bentuk Aliran Kalor dalam Dua Dimensi

Dari persamaan (1) dan dengan konsep bentuk aliran kalor dalam dua dimensi seperti gambar 2 di atas, maka metode elemen hingga dapat diaplikasikan untuk menyelesaikannya.

Konsep dasar yang melandasi metode elemen hingga adalah prinsip diskritisasi, yaitu membagi suatu benda atau domain menjadi benda-benda atau sub domain yang lebih kecil. Setiap sub domain atau elemen dilakukan perhitungan dan hasil perhitungan tiap elemen tersebut dirakit menjadi penyelesaian global.

Dalam penelitian ini, domain dimisalkan berbentuk seperti gambar 1 di atas dengan memilih bentuk elemen segi tiga. Pemilihan bentuk elemen

ini menyesuaikan bentuk domain. Domain seperti gambar 1 di atas didiskritisasi menjadi beberapa elemen dan setiap elemennya terdapat 3 buah titik node. Pada tiap-tiap titik node itulah distribusi suhu akan berlangsung, tetapi dengan catatan suhu pada syarat batas harus sudah diketahui.

Proses diskritisasi ini mula-mula adalah menentukan titik koordinat atau komponen-komponen (x,y) secara otomatis dengan rumus [2] dan [3]:

$$x(i, j) = 1 + (i - 1) \left[\frac{\left(\frac{(2)}{\cos\left((j-1) \left(\frac{\pi}{4N_y} - 4 \right) \right)} - 1 \right)}{(N_x - 1)} \right] \cos\left((j-1) \left(\frac{\pi}{4N_y - 4} \right) \right) \quad (2)$$

$$y(i, j) = 1 + (i - 1) \left[\frac{\left(\frac{(2)}{\cos\left((j-1) \left(\frac{\pi}{4N_y} - 4 \right) \right)} - 1 \right)}{(N_x - 1)} \right] \sin\left((j-1) \left(\frac{\pi}{4N_y - 4} \right) \right) \quad (3)$$

dimana N_x adalah banyaknya titik pada sumbu x (absis) dan N_y adalah banyaknya titik pada batas kanan sumbu y (ordinat) dari domain gambar 1 di atas. Selanjutnya adalah menentukan nomor elemen dan anggota-anggotanya. Elemen segitiga mempunyai anggota-anggota berupa titik node.

Langkah berikutnya adalah proses perhitungan suhu pada masing-masing titik-titik node dengan syarat batas titik-titik node tertentu diketahui suhunya. Dengan rumus:

$$F_c(T) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4)$$

Persamaan (4) di atas diselesaikan dengan menggunakan metode numerik.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Sesuai dengan kebutuhan dalam penelitian ini langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

3.1 Menurunkan persamaan model

Persamaan (1) sebagai persamaan Laplace dan dengan bagan aliran kalor dalam dua dimensi digunakan sebagai titik awal penurunan rumus. Untuk proses diskritisasi dalam penentuan titik-titik koordinat digunakan rumus (2) dan (3). Dengan menggunakan rumus (4) dapat dihitung penyebaran suhu pada domain yang telah ditentukan.

3.2 Menentukan analisis kebutuhan

Untuk menunjang aplikasi ini, perlu dibuat sistem komputer yang baik, yaitu suatu sistem yang benar, efisien dan mudah pengoperasiannya serta menarik. Agar tercapai tujuan membangun sistem yang baik, maka perlu disusun analisis kebutuhan yang meliputi:

- **Kebutuhan input**

Input yang diperlukan yang sesuai dengan persamaan (2) dan (3) adalah banyaknya titik node pada sumbu x dengan nama variabel N_x dan banyaknya titik node pada sumbu y pada batas kanan domain dengan nama variabel N_y . Untuk mengetahui penyebaran suhu pada titik-titik node yang belum diketahui, maka pada titik-titik node tertentu sebagai syarat batas juga diinputkan.

- **Kebutuhan proses**

Dari pers (2) dan (3) disusun algoritma otomatisasi diskritisasi elemen yang produknya berupa otomatisasi titik-titik koordinat dan nomor elemen beserta anggota-anggota titik-titik node. Dengan memasukkan suhu pada titik-titik node yang telah ditentukan sebagai syarat batas, maka dengan mengaplikasikan persamaan (4) dapat dihasilkan suhu pada titik-titik node yang lain yang belum diketahui.

- **Kebutuhan output**

Sesuai dengan prinsip membangun sistem, maka peranan output juga penting. Minimal output dapat memperlihatkan hasil akhir. Dalam penelitian ini, outputnya berupa otomatisasi titik-titik koordinat, nomor elemen beserta anggota-anggotanya dan penyebaran suhu pada titik-titik node yang belum diketahui suhunya.

- **Kebutuhan perangkat lunak dan perangkat keras**

Dalam membangun sistem ada 2 hal tentang perangkat keras yang perlu diperhatikan, yang pertama adalah dengan spesifikasi apa sistem itu dibangun dan dengan spesifikasi apa sistem itu dapat dijalankan. Sistem ini dibangun dengan perangkat keras komputer pentium 100 Mhz dengan RAM 32 MB dan dapat dijalankan dengan komputer pentium setara ke atas. Adapun perangkat lunak yang digunakan untuk membangun sistem adalah Turbo Pascal for Windows dengan sistem operasi Windows 98.

3.3 Pembuatan perancangan sistem

Dalam penelitian ini karena yang menjadi tujuan adalah mencari penyebaran suhu pada titik node yang belum diketahui, maka dalam perancangannya dibuat algoritma sebagai berikut [5]:

- Masukkan nilai N_x dan N_y
- Jalankan subroutine GenXY {untuk menghasilkan komponen (x,y).

- Masukkan data pada subroutine GenBC {untuk memasukkan syarat batas}.
- Jalankan subroutine Gennod {Untuk menghasilkan array node}.
- Jalankan subroutine Imat. {untuk menghasilkan distribusi suhu}.

3.4 Membangun program komputer

Program komputer yang digunakan untuk membangun sistem ini adalah perangkat lunak Turbo Pascal for Windows dengan alasan bahwa Turbo Pascal for Windows merupakan bahasa komputasi teknis yang sangat populer dan sangat mudah digunakan serta mudah pula untuk dipahami struktur bahasanya [5]. Dalam penelitian ini karena listing programnya panjang, maka tidak dapat ditampilkan dalam makalah ini.

3.5 Pengujian program

Setelah sistem selesai dibangun, maka harus diuji apakah sistem dapat berjalan dengan baik dan mudah dioperasikan. Pengujian dilakukan secara detail disampaikan pada bab hasil dan pembahasan berikut ini.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini sebagai pijakannya adalah domain dimensi dua dengan bentuk seperti gambar 1 di atas. Jika dimisalkan $N_x = 5$ dan $N_y = 3$, maka domain tersebut akan mempunyai jumlah elemen sebanyak 16 dan mempunyai titik node sebanyak 15. Dengan menjalankan subroutine GenXY dan dengan asumsi panjang domain pada sumbu x adalah 2 dan panjang maksimal pada garis sebelah paling kanan juga 2, maka dihasilkan titik-titik koordinat secara otomatis seperti tabel 1 berikut ini.

Tabel 1. Koordinat (x,y) pada titik-titik Node

Node	Koordinat x	Koordinat y
1	1.0000	0.0000
2	1.2500	0.0000
3	1.5000	0.0000
4	1.7500	0.0000
5	2.0000	0.0000
6	0.9239	0.3827
7	1.1929	0.4941
8	1.4619	0.6056
9	1.7310	0.7170
10	2.0000	0.8284
11	0.7071	0.7071
12	1.0303	1.0303
13	1.3536	1.3536
14	1.6768	1.6768
15	2.0000	2.0000

Dilanjutkan dengan menjalankan subroutine Gennod dengan data-data dari tabel 1 di atas, maka akan dihasilkan nomor elemen yang masing-masing elemen mempunyai anggota 3 buah titik node seperti yang ditampilkan pada tabel 2 berikut:

Tabel 2. Nomor Elemen dan Titik Node

<i>Nomor Elemen</i>	<i>Titik Node</i>		
1	6	1	7
2	2	7	1
3	7	2	8
4	3	8	2
5	8	3	9
6	4	9	3
7	9	4	10
8	5	10	4
9	11	6	12
10	7	12	6
11	12	7	13
12	8	13	7
13	13	8	14
14	9	14	8
15	4	9	15
16	10	15	9

Selanjutnya suhu pada titik-titik node yang ditentukan sebagai syarat batas diinputkan dengan menggunakan subroutine GenBC, maka bentuk masukannya seperti yang ditampilkan pada tabel 3 berikut:

Tabel 3. Masukan Besar Suhu pada Syarat Batas

<i>Node</i>	<i>Besar Suhu</i>
1	212
6	212
11	212
5	70
10	70
15	70

Langkah terakhir adalah menjalankan subroutine Imad, maka dihasilkan penyebaran suhu seperti yang ditampilkan pada tabel 4 berikut:

Tabel 4. Penyebaran Suhu pada Titik Node

<i>Node</i>	<i>Penyebaran Suhu</i>	
	<i>Input</i>	<i>Hasil</i>
1	212	-
2	-	168.120
3	-	131.582
4	-	99.492
5	70	-
6	212	-
7	-	163.731
8	-	125.929
9	-	95.258
10	70	-
11	212	-
12	-	149.463
13	-	108.966
14	-	83.606
15	70	-

Sistem ini tidak hanya dapat digunakan untuk banyaknya $N_x = 5$ dan $N_y = 3$ saja, tetapi dapat dikembangkan dengan N_x dan N_y sembarang. Berikut ini adalah hasil eksekusi program jika $N_x = 5$ dan $N_y = 5$ yang hasilnya ditampilkan pada tabel 5 berikut:

Tabel 5. Penyebaran Suhu dengan $N_x=5$ dan $N_y=5$

<i>Node</i>	<i>Koordinat</i>		<i>Penyebaran Suhu</i>	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>Input</i>	<i>Hasil</i>
1	1.0000	0.0000	212	-
2	1.2500	0.0000	-	168.710
3	1.500	0.0000	-	132.422
4	1.7500	0.0000	-	100.189
5	2.0000	0.0000	70	-
6	0.9808	0.1951	212	-
7	1.2356	0.2458	-	167.659
8	1.4904	0.2965	-	131.008
9	1.7452	0.3471	-	99.068
10	2.0000	0.3827	70	-
11	0.9239	0.3827	212	-
12	1.1929	0.4941	-	164.321
13	1.4619	0.6056	-	126.623
14	1.7310	0.7170	-	95.715
15	2.0000	0.8284	70	-
16	1.8315	0.5556	212	-
17	1.1236	0.7508	-	157.948
18	1.4157	0.9460	-	118.570
19	1.7079	1.1412	-	89.837
20	2.0000	1.3364	70	-
21	0.7071	0.7071	212	-
22	1.0303	1.0303	-	147.118
23	1.3536	1.3536	-	105.535
24	1.6768	1.6768	-	80.778
25	2.0000	2.0000	70	-

Dengan melihat hasil pada tabel 4 atau tabel 5, nampak bahwa suhu mengalir dari tempat yang lebih panas (212), yaitu sisi sebelah paling kiri menyebar makin mengecil menuju arah yang kecil, yaitu sisi paling kanan domain (70). Dengan demikian sistem aplikasi ini hasilnya sesuai dengan arah penyebaran suhu seperti yang digambarkan pada gambar 2 di atas.

5. KESIMPULAN

Hasil penelitian menunjukkan bahwa:

- Telah dapat dibangun suatu sistem aplikasi komputer untuk menyelesaikan persoalan perambatan panas dua dimensi untuk kondisi tunak dengan menggunakan metode elemen hingga.
- Semakin banyak jumlah elemen semakin akurat hasil penyebaran suhu.
- Suhu menyebar dari tempat yang suhunya lebih tinggi menuju ke tempat yang suhunya lebih rendah.

- d. Bahasa pemrograman Pascal for Windows masih layak digunakan untuk proses perhitungan, tetapi jika ingin mendapatkan tampilan grafik yang lebih baik, maka disarankan untuk menggunakan perangkat lunak Matlab [6].

DAFTAR PUSTAKA

- [1] White,R.E., "An Introduction to The Finite Element Method with Applications to Non-Linear Problems.
- [2] Desai,C.S., "Dasar-Dasar Metode Elemen Hingga", Penerbit Airlangga, Jakarta 1988.
- [3] Holman,J.P., "Perpindahan Kalor", Penerbit Airlangga, Jakarta, 1993.
- [4] Santoso,I., "Struktur Data Menggunakan Turbo Pascal 6.0", Andi Offset, Yogyakarta 1995.
- [5] Pranata,A., "Algoritma dan Pemrograman", J & J Learning, Yogyakarta, 2000.
- [6] The Matlab Curriculum Series, "The Student of Matlab", Prentice Hall, Inc, New Jersey, 1992.