PEMBELAJARAN KONSEP PENYELESAIAN INTEGRAL TENTU

Mohammad Lutfi
Dosen STT-MIGAS Balikpapan
lutfi_plhld@yahoo.co.id

Abstrak: Penelitian ini merupakan studi kasus, suatu fenomena yang terjadi pada pembelajaran integral tentu dengan pusat perhatian terhadap penyelesaian soal-soal integral tentu, yaitu: $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ yang hasilnya -2 dan luas daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi$, dan sumbu x yang hasilnya 0. Penelitian ini dilakukan untuk menyelidiki benar atau salah dari penyelesaian kedua soal tersebut; jika salah, maka akan ditentukan penyelesaian yang benar. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah analisis kritis, yaitu dengan menganalisis penyelesaian dari kedua soal tersebut. Hasil penelitian mengungkapkan bahwa penyelesaian kedua soal tersebut adalah salah, penyelesaian soal pertama yang benar adalah penyelesaian yang menggunakan definisi integral tak wajar jenis kedua yang hasilnya tidak ada (integral soal pertama divergen) dan penyelesaian soal kedua dengan menggunakan $\int_0^\pi |\cos x|\, dx$ yang hasilnya 2 satuan luas.

Kata Kunci: Pembelajaran, Integral Tentu, dan Integral Tak Wajar.

A. Pendahuluan

a. Latar Belakang

Dewasa ini kehidupan manusia semakin kompleks, seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang semakin maju dan canggih. Sejalan dengan perkembangan tersebut, Jaeng (2009) mengatakan bahwa guru dan tenagakependidikan harus membekali diri untuk menghadapi perkembangan tersebut. Namun, problema yang timbul sebagai akibat perkembangan tersebut semakin kompleks pula, tak terhindarkan dari kesibukan-kesibukanmanusia diberbagai bidang dan berpengaruh terhadap pelaksanaan tugas tenaga pengajar. Akibat dari kesibukan-kesibukan tersebut, beberapapengajar tidak sempat mempersiapkan diri untuk melaksanakan pembelajaran, sehingga proses pembelajaran tidak berlangsung dengan baik sesuai yang diharapkan. Bahkan diduga membuat suatu kesalahan dalam memberikan bahan (materi) pengajaran.

Penelitian ini merupakan studi kasus, suatu fenomena yang terjadi pada pembelajaran integral tentu dengan pusat perhatian terhadap penyelesaian soal-soal integral tentu, yaitu sebagai berikut:

1. Hitunglah $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Penyelesaian:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^2 (x-1)^{-2}\, dx$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left.\frac{-1}{x-1}\right]_0^2$$

$$= \frac{-1}{2-1} + \frac{1}{0-1}$$

$$= -2$$

2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh grafik $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi$, dan sumbu x.

   Penyelesaian

   $$\text{Luas daerah} = \int_0^\pi \cos x\, dx$$

$$= \sin x \Big]_0^{\pi}$$
$$= \sin \pi - \sin 0$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

Jika digambar grafik f, $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, maka akan terlihat bahwa grafik f seluruhnya berada di atas sumbu x, yang berarti hasil dari integral tentu tersebut tidak mungkin bernilai negatif. Sedangkan penyelesaian soal (2) menghasilkan luas = 0. Berdasarkan uraian di atas, penyelesaian kedua soal tersebut diduga tidak benar.

b. Masalah

Bertitik tolak pada latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka masalah penelitian ini adalah apakah penyelesaian kedua soal tersebut benar atau salah ?.

c. Tujuan dan Manfaat

Tujuan penelitian ini adalah untuk menyelidiki benar atau salah dari penyelesaian kedua soal tersebut; jika salah, maka akan ditentukan penyelesaian yang benar. Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai bahan masukan bagi tenagakependidikan terkait dengan proses pembelajaran integral tentu.

B. Tinjauan Pustaka

a. Integral Tentu

Menurut Varberg dkk. (2006). Integral tentu didefinisikan sebagai berikut:Anggaplah *f*suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup [a, b]. Jika $\lim\limits_{|P| \to 0} \sum f(\overline{x}_i)\Delta x_i$ ada, kita katakan f adalah terintegrasikan pada [a, b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)\, dx$, disebut integral tentu (atau integral Riemann) f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|P| \to 0} \sum f(\overline{x}_i)\Delta x_i$$

Untuk menghitung suatu integral tentu secara praktis, tidak menggunakan definisi tersebut, melainkan menggunakan teorema-teorema, terutama teorema dasar kalkulus. Menurut Martono (1984): Misalkan*f* adalah suatu fungsi yang kontinu pada selang tertutup [a, b]. Jika F adalah suatu anti turunan f pada selang [a, b], yaitu $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$ maka

$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$ teorema tersebut sering dituliskan seperti berikut: jika fungsi f kontinu pada selang tutup [a, b], dan $F'(x) = f(x)$ pada [a, b], maka

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

b. Integral Tak Wajar

Menurut Kurniawati &Wuryanto (2012), suatu integral dengan batas tak hingga dapat disebut sebagai integral tak wajar.

Menurut Ayres & Mendelson alih bahasa Harahap (2004) Integral tentu $\int_a^b f(x)\, dx$ disebut integral tak wajar jika

1. Integral $f(x)$ memiliki satu atau lebih titik ketakkontinuan pada selang $a \le x \le b$, atau
2. Sedikitnya satu limit pengintegralannya tak terhingga

Ada 2 jenis integral tak wajar, yaitu:

1. Integral tak wajar jenis pertama. Integral perlu didefinisikan pada domain yang tak terbatas (batas adalah tak hingga).
2. Integral tak wajar jenis kedua. Integral mungkin tidak ada karena adanya asimtot tegak lurus pada fungsi tersebut.

(http://id.m.wikipedia.org/wiki/integral_takwajar diakses 7 Februari 2016).

MenurutVarberg dkk. (2006).Definisi dari Integral tak wajar jenis keduayaitu:Jika f kontinu padaselang setengah buka [a, b) dan andaikan $\lim\limits_{x \to b^-} |f(x)| = \infty$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx.$$

Asalkan limit ini ada dan terhingga, dimana kita mengatakan bahwa integral tersebut konvergen. Jika tidak, kita katakan bahwa integral tersebut divergen.

Definisi integral tak wajar jenis kedua yang lain adalah sebagai berikut:Jika *f*kontinu pada selang [a, b], kecuali di $x = c$, dimana $a<c<b$, dan andaikan $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = \infty$, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Jika kedua integral diruas kanan konvergen, maka kita katakan bahwa $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergen. Jika tidak, kita katakan divergen.

c. Penggunaan Integral Tentu

Salah satu kegunaan integral tentu adalah mencari luas suatu daerah. Untuk menghitung luas suatu daerah, Widiarti (1990) menjelaskan bahwa ”luas daerah yang dibatasi oleh grafik
$y = f(x)$, garis $x = a$, $x = b$ dan sumbu x ialah $\int_a^b |f(x)|\,dx$”. Luas $\int_a^b |f(x)|\,dx$ tersebut mencakup luas daerah di bawah sumbu x.

C. Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah analisis kritis. Pada prisnsipnya ada dua tahap yang ditempuh, yaitu:

a. Tahap pertama, mengumpulkan dan mempelajari definisi serta teorema yang berkaitan dengan penelitian ini
b. Tahap kedua, menyelidiki benar atau salah dari penyelesaian kedua soal yang telah dibahas pada latar belakang penelitian, jika penyelesaian kedua soal tersebut salah, maka akan dilakukan pencarian penyelesaian yang benar dari kedua soal tersebut.

D. Hasil dan Pembahasan

a. Penyelesaian Soal (1)

Hasil penyelidikan dari penyelesaian soal (1) mengungkapkan suatu kesalahan, karena diselesaikan dengan menggunakan integral baku (integral biasa). Penyelesaian yang benar adalah dengan menggunakan definisi integral tak wajar jenis kedua. Penyelesaian yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s\to 1^+}\int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t (x-1)^{-2}\,d(x-1) + \lim_{s\to 1^+}\int_s^2 (x-1)^{-2}\,d(x-1)$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\left.\frac{-1}{x-1}\right]_0^t + \lim_{s\to 1^+}\left.\frac{-1}{x-1}\right]_s^2$$

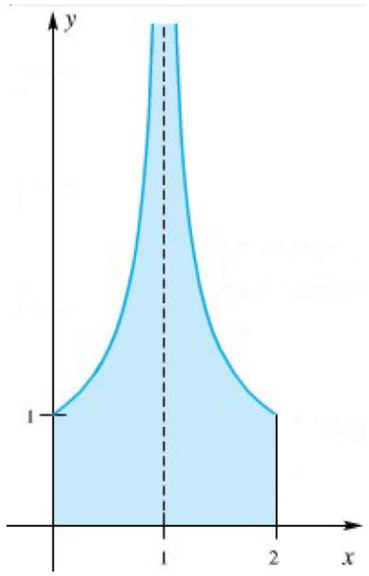
$$= \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{0-1}\right) + \lim_{s\to 1^+}\left(\frac{-1}{2-1} + \frac{1}{s-1}\right)$$

$$= -\infty - 1 - 1 + \infty \text{ (tidak ada)}$$

Dengan demikian, $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen, karena $-\infty - 1 - 1 + \infty$ tidak boleh dijumlahkan.Untuk memudahkan pemahaman, sebagai ilustrasi dapat dijelaskan sebagai berikut: Ukuran dari partikel terkecil saat ini belum ada yang mengetahui, karena dari waktu kewaktu selalu ditemukan sesuatu yang lebih kecil. Sedangkan ukuran alam semesta juga sampai saat ini belum ada yang mengetahui, karenaalam semesta masih berkembang dengan sangat cepat
Hingga saat ini. Jika pernyataan tentang ukuran partikel diandaikan dengan $-\infty$, karena sangat kecil, sedangkan ukuran alam

semesta diandaikan ∞, karena sangat besar, maka tentu hasil penjumlahannya bukanlah0, karena kedua pernyataan tersebut merupakan konsep yang menyatakan bahwa suatu hal yang belum diketahui, tidak terbatas, tidak terukur, dan tidak terhitung, bukan angka atau bilangan. Oleh karena itu, suatu konsep tidak bisa dijumlahkan dengan suatu angka atau bilangan.

Perhatikan Gambar 1 dibawah. Daerah yang diarsir yang menunjukkan luas yang harus dicari tidak sampai ke garis $x = 1$, sehingga luas tersebut tidak dapat ditentukan dengan bilangan (luas tidak ada).

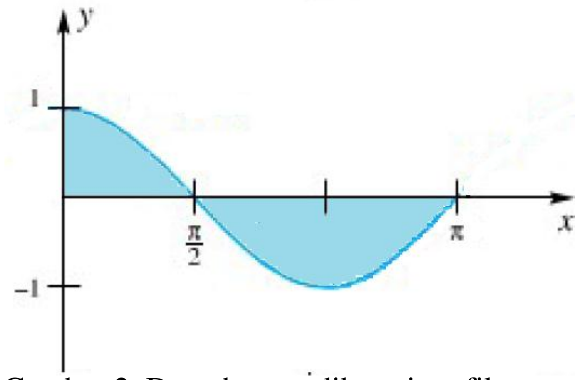


Gambar 1. Sebagian daerah yang dibatasi grafik $y = 1/(x-1)^2$, garis $x = 0$, $x = 2$, dan sumbu x

b. Penyelesaian soal (2)

Penyelidikan dari penyelesaian soal (1) tanpa dikaitkan dengan luas adalah benar. Tetapi tidak semua integral tentu menunjukkan luas. Berhubung soal (2) terkait dengaxn luas, maka penyelesaian tersebut tidak benar. Untuk menghitung luas yang dimaksud sebagai berikut: $y = \cos x$ kontinu pada interval [0, π], sehingga $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$ harus ada, maka

luas $= \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx$.



Gambar 2. Daerah yang dibatasi grafik $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi$, dan sumbu x

Luas daerah yang dicari adalah daerah arsiran pada Gambar 2.

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, \ \cos x \geq 0 \\ -\cos x, \cos x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos x, \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x, \ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases},$$

sehingga luas $= \int_0^{\pi} |\cos x|\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x)\, dx$$

$$= \sin x \Big]_0^{\pi/2} - \sin x \Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

$= 2$ satuan luas.

Kekeliruan dari penyelesaian kedua soal tersebut di atas kemungkinan disebabkan oleh tiga hal, yaitu:

1. Kesibukan sehari-hari yang menyebabkan kurangnya persiapan dalam proses pembelajaran.
2. Anggapan pengajar Matematika bahwa semua bentuk integral tentu dapat diselesaikan, sehingga mereka dapat membuat berbagai macam bentuk soal sekehendak hati.
3. Membuat soal-soal integral tentu dengan memasukkan batas-batas integral sekehendak hati, tanpa memperhatikan apakah soal-soal tersebut dapat diselesaikan atau tidak.

E. Penutup

a. Kesimpulan

Hasil dari penelitian ini mengungkapkan bahwa:

1. Penyelesaian soal (1) yang menghasilkan -2 adalah salah. Penyelesaian yang benar adalah penyelesaian yang menggunakan definisi integral tak wajar jenis kedua yang hasilnya tidak ada (integral divergen).
2. Integral tentu tidak semuanya menunjukkan luas, sehingga penyelesaian soal (2) yang menghasilkan 0 adalah salah. Penyelesaian yang benar adalah dengan menggunakan $\int_0^{\pi} |\cos x| \; dx$ yang hasilnya 2 satuan luas.

b. Saran

1. Seyogyanya para pengajar matematika mempersiapkan materi dengan baik dan teliti sebelum mengajar, sehingga tidak terjadi kesalahan konsep dalam pembelajaran.
2. Seyogyanya tidak membuat soal-soal integral tentu tanpa mengetahui terlebih dahulu penyelesaian yang benar kepada peserta didik.
3. Seyogyanya memperhatikan batas-batas integral sebelum membuat soal-soal integral tentu.

Daftar Pustaka

------, ----. Integral Tak Wajar. Diakses Tanggal 7 Februari 2016. http://id.m.wikipedia.org/wiki/integral_takwajar.

Ayres, F. & Mendelson, E. Alih Bahasa Harahap, Z. 2004. Kalkulus. Erlangga. PT Gelora Aksara Pratama.

Jaeng, M. 2009. Pembelajaran Matematika Sekolah dengan Model Pembelajaran Cara Perseorangan dan Kelompok Kecil (Model PPKK), Orasi Ilmiah Pengukuhan Guru Besar. Universitas Tadulako. Palu.

Kurniawati, A & Wuryanto. 2012. Penyelesaian Kasus Beberapa Integral Tak Wajar dengan Integran Memuat Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma. UNNES Journal of Mathematics. 1 (1), 2252-6943. Universitas Negeri Semarang.

Nawawi, N, G. 1990. Teori Integral dan Fungsi Transenden. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung.

Varberg, D.,Purcell, I. E., & Rigdon, S, E. 2006.*Calculus*,*9th Edition*. Prentice Hall.

Widiarti, S. 1990. Teknik Pengintegralan Integral Tak Wajar dan Penggunaan Integral. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung.