

Proses Berpikir Mahasiswa Dalam Mengonstruksi Konsep Komposisi Fungsi

Sudirman, Subanji, Akbar Sutawidjaja, Makbul Muksar

Pendidikan Matematika–Universitas Negeri Malang
Jl. Semarang 5 Malang. E-mail: sudirman.fmipa@um.ac.id

Abstract: The aim of this study was to describe the thought processes of students in constructing the concept of function composition. The subjects were students of the 2nd half of the course Basic Mathematics II. There are 9 students who were asked to complete the one-time function composition written and simultaneously saying out loud what they think. Furthermore, six students have been selected as subjects. Selection of subject considers their communication skills. From this research, it is found three types of the description of thought processes of students, namely: construction complete thinking structure type, construction complete pseudo-thinking structure type, and incomplete structure type thinking.

Key Words: thinking, constructing the concept, function, composition function

Abstrak: Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi konsep komposisi fungsi. Subjek penelitian ini adalah mahasiswa semester 2 matakuliah Matematika Dasar II. Sembilan mahasiswa diminta menyelesaikan masalah komposisi fungsi secara tertulis dan sekaligus mengucapkan dengan keras apa yang dipikirkan. Selanjutnya 6 mahasiswa dipilih sebagai subjek. Pemilihan subjek mempertimbangkan kemampuan berkomunikasi mereka. Dari penelitian ini ditemukan 3 tipe deskripsi proses berpikir mahasiswa, yaitu tipe struktur berpikir konstruksi lengkap, tipe struktur berpikir konstruksi lengkap semu, dan tipe struktur berpikir tidak lengkap.

Kata kunci: proses berpikir, mengonstruksi konsep, fungsi, komposisi fungsi

Konsep fungsi dan komposisi fungsi adalah konsep yang sangat penting dalam Matematika (Saraiva & Teixeira, 2009; Bayazit *dkk*, 2010; Dede & Soybas, 2011). Konsep fungsi adalah salah satu konsep yang menyatukan ide-ide dalam Matematika (Mousoulides & Gagatsis, 2004; Jones, 2006; Kaldrimidou *dkk*, 2008). Meskipun konsep ini penting, masih banyak peserta didik yang kesulitan dengan konsep ini (Biza *dkk*, 2007; Kaldrimidou *dkk*, 2008; Bayazit *dkk*, 2010; Sudirman, 2011). Hasil-hasil penelitian pendahuluan yang dilakukan oleh peneliti juga menunjukkan hasil yang sama. Kondisi ini mendorong peneliti untuk melakukan penelitian tentang proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi konsep komposisi fungsi.

Berpikir merupakan komponen penting dalam belajar Matematika (Tall, 2009d; Mason *dkk*, 2010). Memperhatikan sifat Matematika yang merupakan suatu pengetahuan eksak yang terorganisir secara

sistematis serta bersifat logis dan deduktif, maka kemampuan berpikir matematis seperti yang diungkapkan Mason *dkk* (2010) dan Tall (2009d) sangat diperlukan oleh orang yang belajar Matematika. Oleh karena itu mengamati proses berpikir seseorang ketika menyelesaikan masalah Matematika menjadi sangat penting.

Hasil penelitian pendahuluan oleh peneliti dalam kurun waktu empat semester yang dilakukan pada tahun 2011 dan 2012 yang berhubungan dengan fungsi dan komposisi fungsi menunjukkan bahwa lebih dari 91% (253/276) mahasiswa menyelesaikan masalah komposisi fungsi dengan hasil yang tidak sempurna (ada yang salah). Kesalahan tersebut terjadi ketika mahasiswa menyelesaikan masalah komposisi fungsi yang berhubungan dengan bukan contoh konsep. Kondisi ini merupakan masalah yang serius mengingnat konsep fungsi dan komposisi fungsi adalah konsep yang sangat penting. Oleh karena itu dalam pe-

nelitian ini akan dikaji proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi konsep komposisi fungsi. Proses berpikir dalam penelitian ini dikaji dengan menggunakan teori abstraksi reflektif dari Piaget (dalam Dubinsky, 2002) dan teori tiga dunia Matematika dari Tall (2004a, 2008e).

Menurut Gray & Tall (2001i), ada 2 cara bagaimana seseorang mengonstruksi suatu konsep, yaitu melalui persepsi dan melalui tindakan. Mengonstruksi konsep melalui persepsi berarti mengonstruksi konsep melalui gambar (*picture*), bayangan mental (*mental image*), dan koneksi internal dalam pikiran (de Lima & Tall, 2008a). Sedangkan mengonstruksi konsep melalui tindakan berarti mengonstruksi konsep melalui menghitung dan manipulasi simbolik (de Lima & Tall, 2008a).

Piaget (dalam Dubinsky, 2002) menyatakan bahwa perkembangan struktur-struktur kognitif disebabkan oleh abstraksi reflektif. Dalam rangka menjelaskan teori ini dan mengaitkannya dengan konsep-kon-

sep tertentu dalam Matematika, Dubinsky (2002) menggunakan konsep *skema*, yaitu koleksi koheren dari proses dan objek. Ada 5 konstruksi dalam abstraksi reflektif, yaitu (1) interiorisasi, (2) koordinasi, (3) reversal, (4) enkapsulasi, dan (5) generalisasi. Definisi konstruksi dan kata kerja indikator konstruksi diberikan dalam Tabel 1.

Teori tiga dunia Matematika menurut Tall (2004a, 2008e) mencakup (1) dunia perwujudan konseptual, (2) dunia simbolik proseptual, dan (3) dunia formal aksiomatik. Dalam dunia perwujudan konseptual seseorang mengonstruksi konsep dengan memulai dari berpikir tentang hal-hal yang dapat dirasakan dalam dunia fisik dan mental. Dalam dunia simbolik proseptual seseorang mengonstruksi konsep dengan memulai dari penggunaan simbol untuk melakukan penghitungan. Sedangkan dalam dunia formal aksiomatik seseorang mengonstruksi pengetahuan berdasarkan aksioma, definisi, teorema, dan penalaran deduktif. Kedudukan teori mengonstruksi konsep dan

Tabel 1. Definisi Konstruksi dan Kata Kerja Indikator Konstruksi dalam Penelitian

| Konstruksi | Definisi Konstruksi | Kata Kerja Indikator Konstruksi |
|---------------|---|---|
| Interiorisasi | Mengonstruksi proses-proses internal dalam rangka memahami fenomena yang dirasakan. Dalam kaitannya dengan penelitian ini, interiorisasi adalah aktivitas berpikir menggali informasi-informasi yang diperlukan | Membaca atau Mengamati |
| Koordinasi | Mengonstruksi proses baru dari dua atau lebih proses yang lain (mengomposisikan dua fungsi untuk memperoleh fungsi baru) atau mengoordinasikan hasil-hasil interiorisasi | Mengoordinasikan, menghitung, atau mengecek |
| Reversal | Konstruksi membalik proses. Setelah proses dimiliki secara internal, mahasiswa berpikir tentang proses sebaliknya untuk mengonstruksi proses baru. Dalam kaitannya dengan penelitian ini, reversal adalah aktivitas menghitung invers fungsi | Menghitung |
| Enkapsulasi | Mengonstruksi objek mental dari proses mental. Dari pengertian itu terlihat adanya perubahan dari proses yang bersifat dinamis menjadi objek yang bersifat statis | Menetapkan |
| Generalisasi | Menerapkan skema ke koleksi yang lebih luas dari fenomena. Fungsi mengaitkan variabel di daerah asal ke daerah hasil. Ketika mahasiswa dapat menjelaskan bahwa fungsi selain mengaitkan variabel juga dapat mengaitkan formula, maka pada saat yang bersamaan dikatakan bahwa skema fungsi telah digeneralisasi | Menggunakan aturan (untuk konteks lain) |

teori abstraksi reflektif dalam teori tiga dunia Matematika seperti pada Gambar 1 dan Gambar 2.

METODE

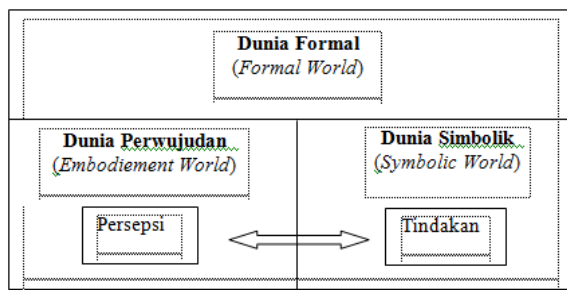
Penelitian ini adalah penelitian dasar karena bertujuan untuk membangun teori. Datanya adalah data kualitatif. Penelitian dilakukan di kelas Matematika Dasar II dengan 32 mahasiswa. Ada 9 mahasiswa yang dipandang dapat berkomunikasi dengan baik. Oleh karena itu kesembilan mahasiswa tersebut ditindaklanjuti untuk menyampaikan dengan keras apa yang sedang dipikirkan (*think aloud*) dan sekaligus menuliskan jawabannya ketika menyelesaikan masalah penelitian. Dari kesembilan mahasiswa tersebut ditemukan deskripsi proses berpikirnya sebagai berikut, 2 mahasiswa bertipe struktur berpikir konstruksi lengkap, 2 mahasiswa bertipe struktur berpikir konstruksi lengkap semu, dan 5 mahasiswa bertipe struktur berpikir konstruksi tidak lengkap. Selanjutnya, untuk masing-masing tipe struktur berpikir dipilih dua orang subjek penelitian. Pengambilan data menggunakan *handycam* yang dapat merekam suara dan sekaligus menangkap gambar bagaimana mahasiswa menyelesaikan masalah penelitian secara tertulis. Sumber data penelitian ini adalah proses berpikir mahasiswa yang

tercermin dari jawaban tertulis dan transkrip *think aloud*. Data tertulis diperoleh ketika subjek menyelesaikan masalah secara tertulis dan data transkrip *think aloud* diperoleh dari subjek ketika menyelesaikan masalah dengan mengeraskan suaranya. Data yang berupa jawaban tertulis dan berupa transkrip *think aloud* diperoleh dari subjek secara bersamaan. Jenis datanya adalah data primer, karena data diperoleh langsung dari subjek dan dikumpulkan sendiri oleh peneliti. Dalam penelitian ini, peneliti merencanakan, melaksanakan, dan melaporkan hasil penelitiannya.

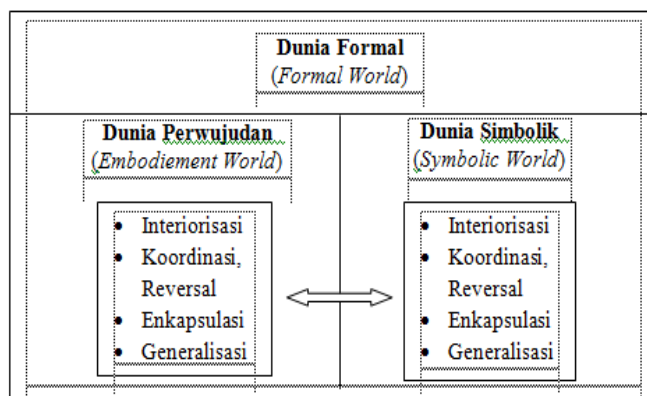
HASIL DAN PEMBAHASAN

Setelah menganalisis jawaban mahasiswa, baik secara tertulis maupun yang melalui *think aloud*, maka proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi konsep komposisi fungsi dapat dideskripsikan menjadi 3 tipe struktur berpikir, yaitu (1) struktur berpikir konstruksi lengkap, (2) struktur berpikir konstruksi lengkap semu, dan (3) struktur berpikir konstruksi tidak lengkap. Adapun deskripsi proses berpikir mahasiswa seperti yang disebutkan di atas dapat dilihat pada Tabel 2.

Deskripsi proses berpikir mahasiswa digolongkan ke dalam tipe struktur berpikir konstruksi lengkap



Gambar 1. Kedudukan Teori Mengonstruksi dalam Teori Tiga Dunia Matematika



Gambar 2. Kedudukan Konstruksi Abstraksi Reflektif dalam Teori Tiga Dunia Matematika

jika dalam menyelesaikan masalah, mahasiswa menggunakan kelima konstruksi dalam abstraksi reflektif, baik melalui persepsi maupun melalui tindakan. Deskripsi proses berpikir mahasiswa digolongkan ke dalam tipe struktur berpikir konstruksi lengkap semu jika dalam menyelesaikan masalah, mahasiswa menggunakan kelima konstruksi dalam abstraksi reflektif, tetapi tidak muncul melalui persepsi dan muncul secara implisit melalui tindakan. Deskripsi proses berpikir mahasiswa digolongkan ke dalam tipe struktur berpikir konstruksi tidak lengkap jika dalam menyelesaikan masalah, mahasiswa menggunakan empat konstruksi dalam abstraksi reflektif (tanpa konstruksi reversal), baik melalui persepsi maupun melalui tindakan. Contoh penyelesaian mahasiswa untuk masing-masing tipe struktur berpikir yang menggambarkan deskripsi proses berpikir mereka seperti yang sudah diuraikan di atas adalah sebagai berikut.

Deskripsi Proses Berpikir Tipe Struktur Berpikir Konstruksi Lengkap

Ketika menyelesaikan masalah nomor 2, mahasiswa menggambar masalah yang akan diselesaikan dengan menggambar 3 lingkaran, dilengkapi dengan

simbol-simbol sebagai nama dari fungsi. Dalam menyelesaikan masalah ini, mahasiswa menjelaskan bahwa invers suatu fungsi selalu ada (perhatikan G dan G^{-1} pada Gambar 3). Penjelasan yang diberikan adalah bahwa fungsi dengan inversnya hanyalah berkaitan dengan dari mana “bahan” dipindahkan. Ketika menyelesaikan masalah yang sama melalui tindakan, mahasiswa fokus pada formula masalah ($F = L \circ G$). Mahasiswa berusaha mengubah formula masalah tersebut menjadi $G^{-1} \circ F = L$. Dalam menyelesaikan masalah melalui tindakan, mahasiswa juga menetapkan bahwa invers fungsi selalu ada (perhatikan dan pada Gambar 3). Ketika menyelesaikan masalah ini, mahasiswa membaca masalah, mengamati masalah, mengamati posisi fungsi-fungsi yang diketahui, menetapkan invers fungsi ada, menggunakan aturan komposisi fungsi, dan menghitung komposisi fungsi.

Pernyataan yang dikemukakan mahasiswa pada saat *think aloud* ketika menyelesaikan masalah melalui persepsi adalah sebagai berikut.

Mahasiswa: Pada dasarnya diagram untuk masalah komposisi fungsi ini sama dengan nomor

Tabel 2 Deskripsi Proses Berpikir dan Konstruksi Abstraksi Reflektif yang Terjadi pada Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Komposisi Fungsi

| Tipe Struktur Berpikir | Nomor Soal | Konstruksi yang Terjadi |
|--------------------------|------------|--|
| Konstruksi lengkap | 1 | Interiorisasi, Koordinasi, Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| | 2 | Interiorisasi, Koordinasi, Reversal, Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| | 3 | Interiorisasi, Koordinasi, Reversal, Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| Konstruksi lengkap semu | 1 | Interiorisasi, Koordinasi, Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| | 2 | Interiorisasi, Koordinasi, Reversal (<i>Semu</i>), Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| | 3 | Interiorisasi, Koordinasi, Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| Konstruksi tidak lengkap | 1 | Interiorisasi, Koordinasi, Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| | 2 | Interiorisasi, Koordinasi, Enkapsulasi, dan Generalisasi |
| | 3 | Interiorisasi, Koordinasi, Enkapsulasi, dan Generalisasi |

sebelumnya, karena ini juga masalah komposisi fungsi. Penjelasan yang berhubungan dengan diagramnya juga hampir sama. Teta-pi untuk nomor ini ada sedikit yang berbeda, karena di sini ada G^{-1} (inversnya G). Perbedaan antara dan adalah berhubungan dengan “bahan dasar”. Jika pada proses , “bahan dasarnya” ada di lingkaran per-tama, maka pada proses , “bahan dasarnya” ada di lingkaran kedua (sambil menunjuk pekerjaannya di Gambar 3).

Sedangkan pernyataan yang dikemukakan mahasiswa pada saat *think aloud* ketika menyelesaikan masalah melalui tindakan adalah sebagai berikut:

Mahasiswa: Sepengetahuan saya, untuk menyelesaikan masalah komposisi fungsi seperti ini digunakan istilah invers. Maksudnya adalah saya terlebih dahulu akan melakukan “bundaran” dari kanan terhadap sehingga diperoleh dan ini sama dengan (sambil menunjuk langkah-langkah pengerjaannya pada Gambar 3). Untuk mendapatkan, maka saya menulis dalam bentuk selanjutnya saya nyatakan dalam bentuk. Maka hasil penghitungan yang terakhir ini adalah invers dari fungsi. Jadi Untuk mencari fungsi saya melakukan seperti yang sudah dilakukan pada masalah nomor sebelumnya (sambil menunjukkan langkah-langkah pekerjaannya pada Gambar 3). Dengan menghitung seperti ini, maka saya memperoleh fungsi.

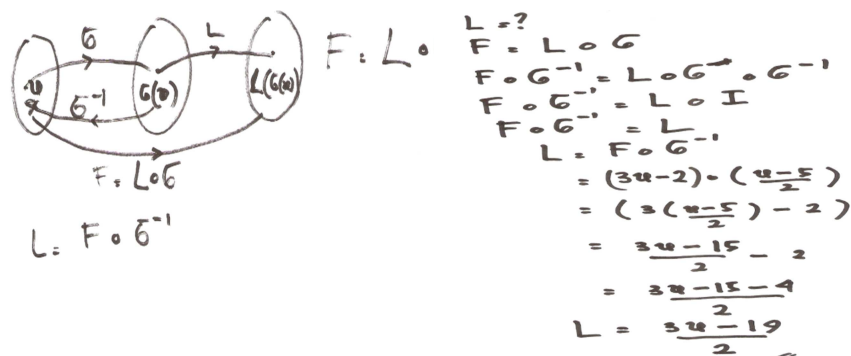
Deskripsi Proses Berpikir Tipe Struktur Berpikir Konstruksi Lengkap Semu

Ketika menyelesaikan masalah nomor 2, mahasiswa menggambar masalah yang akan diselesaikan dengan menggambar 3 lingkaran, dilengkapi dengan simbol-simbol sebagai nama dari fungsi. Dalam me-

nyelesaikan masalah ini melalui persepsi, mahasiswa tidak menuliskan simbol invers fungsi G . Dengan demikian, mahasiswa tidak melakukan konstruksi reversal melalui persepsi (perhatikan Gambar 4). Ketika menyelesaikan masalah melalui tindakan, mahasiswa berusaha mengubah formula $G(x)$ menjadi hanya variabel x . Cara yang dilakukan adalah menyatakan $G(x) = t$, dan menyatakan dalam . Variabel yang diperoleh melalui tindakan digantikan ke variabel di dan (perhatikan Gambar 4). Dengan melakukan langkah-langkah tersebut, maka diperoleh fungsi (fungsi yang dicari). Ketika menyelesaikan masalah ini, mahasiswa membaca masalah, mengamati masalah, mengamati posisi fungsi-fungsi yang diketahui, menetapkan formula fungsi sama dengan variabel tertentu (secara implisit sebenarnya mahasiswa melakukan konstruksi reversal), menggunakan aturan komposisi fungsi, dan menghitung komposisi fungsi.

Pernyataan yang dikemukakan mahasiswa pada saat *think aloud* ketika menyelesaikan masalah melalui persepsi adalah sebagai berikut.

Mahasiswa: Masalah ini berhubungan dengan masalah komposisi fungsi. Masalah komposisi fungsi dapat digambarkan dengan menggambar diagram seperti ini (sambil menunjuk pekerjaannya di Gambar 4). Variabel x yang ada pada lingkaran pertama, dipindahkan oleh G sehingga dihasilkan $G(x)$ yang ada pada lingkaran kedua dan selanjutnya $G(x)$ dipindahkan oleh F untuk menghasilkan $F(G(x))$. $F(G(x))$ ini adalah “hasil akhir” dari x setelah mengalami dua kali pemindahan dan posisinya berada di lingkaran ketiga. K sebagai gabungan dari F dan G ada di lingkaran ketiga. Jadi $F(G(x))$ adalah hasil akhir setelah mengalami dua kali pemindahan secara berurutan yang dilakukan oleh G dan F .



Gambar 3. Contoh Penyelesaian Mahasiswa untuk Proses Berpikir Tipe Struktur Berpikir Konstruksi Lengkap

Sedangkan pernyataan yang dikemukakan mahasiswa pada saat *think aloud* ketika menyelesaikan masalah melalui tindakan adalah sebagai berikut.

Mahasiswa: Untuk menyelesaikan masalah komposisi fungsi nomor ini dilakukan seperti berikut. Diketahui dua fungsi F dan G dan akan dicari fungsi L sehingga $F=L \circ G$. Untuk mencari fungsi L , perhatikan daerah asalnya adalah $G(x)$. Untuk itu saya perlu mencari inversnya G dengan tujuan agar nantinya $L(G(x))$ akan menjadi $L(x)$. Pertama saya tulis $G(x)=y$ sehingga $y=2x+5$

kemudian saya tulis x dalam y , yaitu $x = \frac{y-5}{2}$.

Yang terakhir ini sebenarnya adalah inversnya fungsi G . Setelah itu saya melakukan penggantian variabel x pada fungsi F dan G dengan x yang sudah saya hitung ini (sambil menunjuk pada hasil pekerjaannya pada Gambar 4). Maka dengan mengganti x pada fungsi G dalam $L(2x+5)$, maka $L(G(x))$ akan menjadi $L(x)$. Selanjutnya dengan mengganti x pada F , maka ruas kiri pada Gambar 4, berubah menjadi

$\frac{3x-19}{2}$. Oleh karena itu, maka fungsi yang

dicari adalah $L(x) = \frac{3x-19}{2}$.

Deskripsi Proses Berpikir Tipe Struktur Berpikir Konstruksi Tidak Lengkap

Ketika menyelesaikan masalah nomor 2, mahasiswa menggambar masalah yang akan diselesaikan dengan menggambar 3 lingkaran, dilengkapi dengan simbol-simbol sebagai nama dari fungsi. Dalam menyelesaikan masalah ini melalui persepsi, mahasiswa tidak menuliskan simbol invers fungsi G . Dengan demikian, mahasiswa tidak melakukan konstruksi rever-

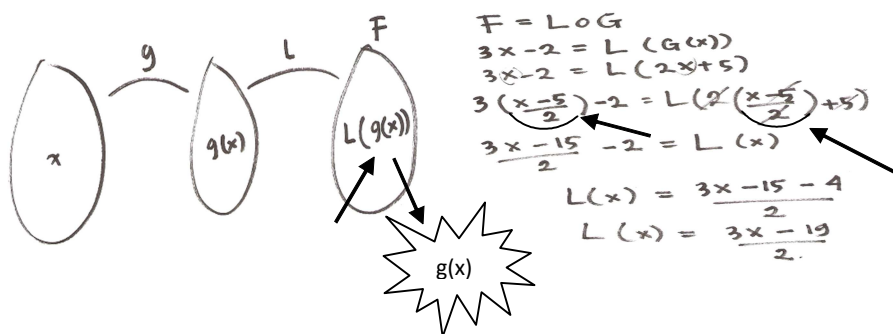
sal melalui persepsi (Gambar 5). Ketika menyelesaikan masalah melalui tindakan, mahasiswa yakin bahwa bentuk fungsi $L(x)$ adalah linear. Keyakinan tersebut didasarkan pada bentuk-bentuk fungsi yang diketahui, yaitu F dan G . Dengan keyakinan itu, maka mahasiswa memisalkan fungsi $L(x)=ax+b$. Setelah memisalkan bentuk fungsi L , selanjutnya mahasiswa mengganti variabel x di L dengan formula $G(x)$. Nilai-nilai a dan b ditentukan berdasarkan kesamaan dua fungsi. Dengan demikian, dalam menyelesaikan masalah komposisi fungsi ini melalui tindakan, mahasiswa juga tidak menggunakan konstruksi reversal (Gambar 5).

Pernyataan yang dikemukakan mahasiswa pada saat *think aloud* ketika menyelesaikan masalah melalui persepsi adalah sebagai berikut.

Mahasiswa: Ini adalah masalah komposisi fungsi. Masalah komposisi fungsi dapat digambarkan dengan menggambar diagram seperti ini (sambil menunjuk pekerjaannya di Gambar 5). Variabel x adalah "bahan-bahan" yang ada pada lingkaran pertama, dibawa atau diproses oleh G dan menghasilkan "bahan kedua" $G(x)$ yang letaknya ada di lingkaran kedua dan selanjutnya $G(x)$ dipindahkan oleh F untuk menghasilkan $F(G(x))$. $F(G(x))$ ini adalah "hasil akhir" dari "bahan-bahan" x setelah mengalami dua kali proses dan posisinya berada di lingkaran ketiga. K adalah gabungan dari dua proses F dan G yang di dalam Matematika diberi nama komposisi fungsi.

Sedangkan pernyataan yang dikemukakan mahasiswa pada saat *think aloud* ketika menyelesaikan masalah melalui tindakan adalah sebagai berikut.

Mahasiswa: Untuk menyelesaikan masalah komposisi seperti ini saya melakukan seperti berikut. Fungsi $G(x)$ saya substitusikan ke variabel x yang ada di fungsi yang dicari L , sehingga diperoleh



Gambar 4. Contoh Penyelesaian Mahasiswa untuk Proses Berpikir Tipe Struktur Berpikir Konstruksi Lengkap Semu

$3x-2 = L(2x+5)$. Karena bentuk dari fungsi $F(x)$ dan $G(x)$ nya linear, maka saya yakin bentuk fungsi L nya juga linear. Maka dari itu, saya memisalkan fungsi $L = ax+b$. Setelah dilakukan penghitungan, kemudian dilihat variabel-variabel yang bersesuaian (sambil menunjuk suku-suku dengan variabel x dan suku-suku konstan). Dengan cara

ini maka saya memperoleh $a = \frac{3}{2}$ dan $b = \frac{-19}{2}$.

Dari penghitungan ini saya dapatkan

$$L(x) = \frac{3}{2}x - \frac{19}{2} \text{ (perhatikan Gambar 5).}$$

Struktur berpikir mahasiswa dengan tipe struktur berpikir konstruksi lengkap, meliputi membaca masalah, mengamati masalah (*interiorisasi masalah melalui persepsi*); mengamati posisi fungsi yang diketahui (*interiorisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menetapkan bahwa suatu fungsi mempunyai invers (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menghitung invers fungsi (*reversal masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menetapkan invers fungsi (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menetapkan 2 fungsi dapat dikomposisikan (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menggunakan aturan komposisi fungsi (*generalisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menghitung komposisi 2 fungsi (*koordinasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menetapkan hasil komposisi fungsi (*enkapsulasi masalah*

melalui persepsi dan melalui tindakan); mengamati formula komposisi fungsi (*interiorisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); dan menetapkan fungsi yang dicari (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*).

Struktur berpikir mahasiswa dengan tipe struktur berpikir konstruksi lengkap semu meliputi: membaca masalah, mengamati masalah (*interiorisasi masalah melalui persepsi*); mengamati posisi fungsi yang diketahui (*interiorisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menetapkan bahwa ada fungsi yang dapat dikomposisikan dengan fungsi lain (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menggunakan aturan komposisi fungsi (*generalisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menghitung komposisi 2 fungsi (*koordinasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); mengamati formula komposisi fungsi (*interiorisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); mengamati formula fungsi (*interiorisasi masalah melalui tindakan*); menetapkan formula fungsi sama dengan variabel tertentu (*enkapsulasi masalah melalui tindakan/ reversal semu melalui tindakan*); menghitung nilai variabel dalam variabel lain (*koordinasi masalah melalui tindakan*); menetapkan nilai variabel dalam variabel lain (*enkapsulasi masalah melalui tindakan*); menghitung fungsi dalam variabel baru (*koordinasi masalah melalui tindakan*); dan menetapkan fungsi yang dicari (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*).

The image shows a student's handwritten solution. On the left, a diagram illustrates the composition of functions $F = L \circ G$ with sets A, B, C and arrows representing the functions. A starburst contains the word "perhatikan" (pay attention). The main part of the solution is an algebraic derivation:

$$\begin{aligned}
 & F = L \circ G \\
 & 3x - 2 = L(G(x)) \\
 & 3x - 2 = L(2x + 5) \dots (1) \\
 & \text{Misal } L = ax + b, \text{ untuk suatu } a, b \in \mathbb{R} \\
 & \text{Pers (1) menjadi:} \\
 & 3x - 2 = a(2x + 5) + b \\
 & 3x - 2 = 2ax + 5a + b \\
 & 2ax = 3x, \quad 5a + b = -2 \\
 & a = \frac{3}{2}, \quad 5 \cdot \frac{3}{2} + b = -2 \\
 & \frac{15}{2} + b = -2 \\
 & 15 + 2b = -4 \\
 & 2b = -19 \\
 & b = -\frac{19}{2} \\
 & \text{Jadi } L(x) = \frac{3}{2}x - \frac{19}{2}
 \end{aligned}$$

Gambar 5. Contoh Penyelesaian Mahasiswa untuk Proses Berpikir Tipe Struktur Berpikir Konstruksi Tidak Lengkap

Struktur berpikir mahasiswa dengan tipe struktur berpikir konstruksi tidak lengkap meliputi: membaca masalah, mengamati masalah (*interiorisasi masalah melalui persepsi*); mengamati posisi fungsi yang diketahui (*interiorisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menetapkan bahwa ada fungsi yang dapat dikomposisikan dengan fungsi lain (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menggunakan aturan komposisi fungsi (*generalisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menghitung komposisi 2 fungsi (*koordinasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); menetapkan bentuk formula fungsi berdasarkan bentuk-bentuk fungsi yang diketahui (*enkapsulasi masalah melalui tindakan*); mengamati formula masalah (*interiorisasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*); mengamati konstanta fungsi (*interiorisasi masalah melalui tindakan*); menghitung konstanta-konstanta yang belum diketahui (*koordinasi masalah melalui tindakan*); dan menetapkan fungsi yang dicari (*enkapsulasi masalah melalui persepsi dan melalui tindakan*).

Mahasiswa dalam kelompok proses berpikir dengan struktur berpikir konstruksi lengkap, pada saat menetapkan bahwa suatu fungsi mempunyai invers tidak mengamati domain dan range fungsi dan juga tidak mengamati sifat fungsi (apakah bersifat 1-1 dan onto?). Mahasiswa dalam kelompok proses berpikir dengan struktur berpikir konstruksi lengkap semu, pada saat menetapkan ada fungsi yang dapat dikomposisikan dengan fungsi lain, tidak mengamati domain dan range fungsi-fungsi tersebut dan bagaimana hubungan keduanya. Mahasiswa dalam kelompok proses berpikir dengan struktur berpikir konstruksi tidak lengkap, pada saat menetapkan ada fungsi yang bentuknya ditentukan berdasarkan bentuk-bentuk fungsi yang diketahui, tidak mengamati domain dan range fungsi-fungsi tersebut dan bagaimana hubungan keduanya.

Mahasiswa yang menjawab masalah penelitian (komposisi fungsi), hasilnya selalu dapat dikelompokkan ke dalam salah satu dari 3 kelompok. Kelompok pertama, dalam menyelesaikan masalah fokus kepada mengubah formula masalah. Kelompok kedua, dalam menyelesaikan masalah fokus kepada mengubah formula fungsi menjadi variabel tertentu. Sedangkan kelompok ketiga, dalam menyelesaikan masalah fokus kepada kesamaan fungsi. Mahasiswa yang dalam menyelesaikan masalah komposisi fungsi, proses berpikirnya fokus kepada mengubah formula masalah, struktur berpikirnya dikelompokkan ke dalam “struktur berpikir konstruksi lengkap”. Mahasiswa yang dalam proses

berpikirnya fokus kepada mengubah formula fungsi menjadi variabel tertentu, struktur berpikirnya dikelompokkan ke dalam “struktur berpikir konstruksi lengkap semu”, dan mahasiswa yang dalam proses berpikirnya fokus kepada kesamaan fungsi, struktur berpikirnya dikelompokkan ke dalam “struktur berpikir konstruksi tidak lengkap”.

Ketika menyelesaikan masalah penelitian, mahasiswa dalam kelompok proses berpikir dengan struktur berpikir konstruksi lengkap menggunakan 4 konstruksi (interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, generalisasi) untuk masalah nomor 1. Konstruksi-konstruksi tersebut dilakukan oleh mahasiswa baik melalui persepsi maupun melalui tindakan. Untuk masalah nomor 2 dan 3, mahasiswa tersebut menggunakan 5 konstruksi (interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, generalisasi, reversal). Konstruksi-konstruksi tersebut dilakukan oleh mahasiswa baik melalui persepsi maupun melalui tindakan. Oleh karena itu, proses berpikir mahasiswa tersebut dalam penelitian ini dikelompokkan ke dalam “*proses berpikir dengan tipe struktur berpikir konstruksi lengkap*”.

Mahasiswa dalam kelompok proses berpikir dengan konstruksi lengkap semu menggunakan 4 konstruksi (interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, generalisasi) ketika menyelesaikan masalah nomor 1 dan 3. Konstruksi-konstruksi tersebut dilakukan oleh mahasiswa baik melalui persepsi maupun melalui tindakan. Untuk masalah nomor 2, subjek mahasiswa kelompok ini menggunakan 5 konstruksi (interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, generalisasi, *reversal semu*). Mahasiswa dikatakan melakukan konstruksi reversal semu, karena yang dilakukan adalah “menetapkan formula fungsi sama dengan suatu variabel tertentu”, seperti menetapkan formula fungsi $G(x) = t$ dan menyatakan x dalam t atau menetapkan formula fungsi $V(x) = s$ dan menyatakan x dalam s . Menetapkan $G(x) = t$ atau $V(x) = s$ secara implisit sebenarnya adalah bentuk dari konstruksi reversal. Konstruksi ini dilakukan oleh subjek melalui tindakan. Oleh karena itu, proses berpikir mahasiswa tersebut dalam penelitian ini dikelompokkan ke dalam “*proses berpikir dengan tipe struktur berpikir konstruksi lengkap semu*”.

Mahasiswa dalam kelompok proses berpikir dengan konstruksi tidak lengkap menggunakan 4 konstruksi (interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, generalisasi) ketika menyelesaikan masalah nomor 1, 2, dan 3. Konstruksi-konstruksi tersebut dilakukan oleh mahasiswa baik melalui persepsi maupun melalui tindakan. Oleh karena itu, proses berpikir mahasiswa tersebut dalam penelitian ini dikelompokkan ke dalam “*proses*

berpikir dengan tipe struktur berpikir konstruksi tidak lengkap”.

Mahasiswa dalam kelompok struktur berpikir dengan konstruksi tidak lengkap tidak seperti temuan Dubinsky, karena kelompok ini ketika menyelesaikan masalah sama sekali tidak memerlukan pembalikan proses. Sedangkan subjek dalam kelompok struktur berpikir dengan konstruksi lengkap semu berada diantaranya, yaitu sebenarnya kelompok ini “secara implisit” melakukan pembalikan proses, tetapi jawaban (respon) yang diberikan memberi kesan tidak melakukan pembalikan proses. Sedangkan mahasiswa dalam kelompok struktur berpikir dengan konstruksi lengkap seperti temuan Dubinsky (2002).

Ditinjau dari aspek konstruksi dalam abstraksi reflektif yang digagas oleh Piaget (dalam Dubinsky, 2002), subjek dengan struktur berpikir dengan konstruksi lengkap menggunakan kelima konstruksi, yaitu interiorisasi, koordinasi, reversal, enkapsulasi, dan generalisasi, dan mahasiswa dengan struktur berpikir dengan konstruksi tidak lengkap menggunakan empat konstruksi, yaitu interiorisasi, koordinasi, enkapsulasi, dan generalisasi. Sedangkan mahasiswa dengan struktur berpikir dengan konstruksi lengkap semu berada diantaranya, yaitu “secara implisit” melakukan konstruksi reversal, tetapi jawaban (respon) yang diberikan memberi kesan tidak melakukan konstruksi tersebut.

Ditinjau dari cara bagaimana mahasiswa mengonstruksi konsep (komposisi fungsi), maka yang dilakukan oleh mahasiswa sejalan dengan teori tiga dunia Matematika yang digagas oleh Tall (2004a; 2004d; 2008e). Mahasiswa mengonstruksi konsep melalui persepsi dan melalui tindakan (Gray & Tall, 2001i). Karena mahasiswa yang diamati adalah mahasiswa semester 2, maka mereka dikatakan berada dalam masa transisi dari Matematika sekolah ke Matematika perguruan tinggi (Tall, 2008e), dan dunia Matematikanya masih didominasi oleh 2 dunia Matematika yang pertama, yaitu dunia perwujudan dan dunia simbolik. Mengonstruksi konsep melalui persepsi berada dalam dunia perwujudan dan mengonstruksi konsep melalui tindakan berada dalam dunia simbolik.

Membandingkan dengan 3 penelitian yang sudah dilakukan oleh Ayers *dkk* (1988), Paschos & Farmaki, (2006) dan Cappetta, (2007), maka penelitian-penelitian tersebut hanya dianalisis menggunakan teori Piaget tentang abstraksi reflektif, sedangkan penelitian ini, selain dianalisis menggunakan teori Piaget, juga dianalisis menggunakan teori Tall tentang tiga dunia Matematika. Selain itu, 3 penelitian sebelumnya bertujuan untuk

memunculkan konstruksi dalam abstraksi reflektif, sedangkan penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan konstruksi yang digunakan oleh mahasiswa ketika mengonstruksi konsep komposisi fungsi.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Penelitian ini mengkaji proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi konsep komposisi fungsi. Pertanyaan penelitian yang akan dijawab adalah “bagaimana proses berpikir mahasiswa dalam mengonstruksi konsep komposisi fungsi? Tujuannya adalah mendeskripsikan proses berpikir mahasiswa ketika menyelesaikan masalah. Berdasarkan penelitian ini ditemukan 3 deskripsi proses berpikir yang dinyatakan dalam bentuk struktur berpikir. Ketiga deskripsi proses berpikir mahasiswa yang dimaksud adalah sebagai berikut. 1. Proses berpikir mahasiswa dengan tipe struktur berpikir konstruksi lengkap. 2. Proses berpikir mahasiswa dengan tipe struktur berpikir konstruksi lengkap semu. 3. Proses berpikir mahasiswa dengan tipe struktur berpikir konstruksi tidak lengkap.

Saran

Saran yang akan dikemukakan di sini berhubungan dengan kontribusi hasil penelitian ini terhadap aktivitas belajar dan pembelajaran, khususnya bidang pembelajaran Matematika. Guru, peserta didik, dan bahan ajar adalah tiga komponen yang secara langsung terlibat dalam aktivitas belajar dan pembelajaran. Oleh karena itu, saran ini berhubungan dengan dengan ketiga komponen tersebut. Saran yang dimaksud adalah sebagai berikut. 1. Guru sebagai fasilitator dalam aktivitas belajar dan pembelajaran diharapkan dapat mendeteksi tipe struktur berpikir peserta didik dalam proses berpikirnya, sehingga pembelajaran dapat dikelola sesuai dengan tipe struktur berpikir peserta didik. 2. Bahan ajar diupayakan untuk disajikan sesuai dengan tipe struktur berpikir peserta didik. Bahan ajar diupayakan tidak hanya mengeksplorasi contoh-contoh yang berhubungan dengan konsep tetapi juga hendaknya mengeksplorasi contoh-contoh bukan konsep. 3. Hasil penelitian ini tidak dapat digeneralisasi. Oleh karena itu guru perlu mengeksplorasi lebih jauh untuk menemukan tipe struktur berpikir yang lain sehingga aktivitas belajar dan pembelajaran dapat dikelola lebih baik.

DAFTAR RUJUKAN

- Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. 1988. Computer Experiences in Learning Composition of Functions. *Jurnal for Research in Mathematics Education*, 19(3): 246-259.
- Bayazit, I., Aksoy, Y. & Ilhan, O.A. 2010. Geogebra As an Instructional Tool to Promote Students' Operational and Structural Conception of Function. *Innovative Technologies for Building Mathematical Models and Modelling*, 117-122.
- Biza, I., Diakoumopoulos, D. & Souyoul, A. 2007. *Teaching Analysis in Dynamic Geometry Environments*. Makalah disajikan pada Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Cyprus, 22-26 Pebruari 2007, (Online), (<http://www.didmatcofin05.unimore.it/cerme5.pdf>), diakses 1 Agustus 2012.
- Cappetta, R.W. 2007. *Reflective Abstraction And The Concept Of Limit: A Quasi-Experimental Study To Improve Student Performance In College Calculus By Promoting Reflective Abstraction Through Individual, Peer, Instructor And Curriculum Initiates*. Makalah disajikan pada Conference of American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC), Minneapolis, 3 Nopember 2007, (Online), (http://c.ymcdn.com/sites/www.amatyc.org/resource/resmgr/2007_Conference_Proceedings/cappetta07.pdf), diakses 2 Agustus 2012.
- Dede, Y. & Soybas, D. 2011. Preservice Mathematics Teachers' Experiences about Function and Equation Concepts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7(2), 89-102.
- De Lima, R.N. & Tall, D. 2008a. Procedural Embodiment and Magic in Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1): 3-18.
- Dubinsky, E. 2002. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Dalam D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (hlm. 95-101). New York: Kluwer Academic Publisher.
- Dubinsky, E. 2002. Genetic Decompositions of Three Schemas. Dalam D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (hlm. 109-116). New York: Kluwer Academic Publisher.
- Gray, E. & Tall, D. 2001i. *Relationships between Embodied Objects and Symbolic Procepts: An Explanatory Theory of Success and Failure in Mathematics*. Makalah disajikan pada the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, 12-17 Juli 2001. (Online), (<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001j-pme25-pinto-tall.pdf>), diakses 20 Maret 2012.
- Jones, M. 2006. *Demystifying Functions: The Historical and Pedagogical Difficulties of the Concept of the Function*. 7(2), (Online), (<https://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2006/vol7-n2/paper5/v7n2-5pd.pdf>), diakses 10 Juli 2012.
- Kaldrimidou, M., Moroglou, M. & Tzekaki, M. 2008. *Conception about the Notion of Function and the Role of the Mode of Representation*. Makalah disajikan pada the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Morelia, Mexico, 17-21 Juli 2008. (Online), (<http://www.pme32-na30.org.mx>), diakses 20 Maret 2012.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. 2010. *Thinking Mathematically. Second Edition*: England: Pearson Education Limited.
- Mousoulides, N. & Gagatsis, A. 2004. *Algebraic and Geometric Approach in Function Problem Solving*. Makalah disajikan pada the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 14-18 Juli 2004. (Online), (<http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489596.pdf>), diakses 21 Maret 2012.
- Paschos, T. & Farmaki, V. 2006. *The Reflective Abstraction in The Construction of The Concept of The Definite Integral: A Case Study*. Makalah disajikan pada the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague, Czech Republic, 16-21 Juli 2006. (Online), (<ftp://ftp.math.ethz.ch/EMIS/proceedings/PME30/4/337.pdf>), diakses 12 Januari 2012.
- Saraiva, M.J. & Teixeira, A.M. 2009. Secondary School Students' Understanding of Function via Exploratory and Investigative Task. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, 4-19.
- Sudirman. 2011. Penginvestigasian Objek Fungsi sebagai Hasil Pengkapsulan Proses: Suatu Studi Kasus untuk Nuri. Makalah disajikan pada Internati-onal Seminar and The Fourth National Conference on Mathematics Education, Department of Mahematics Education, Yogyakarta State University, 21-23 Juli 2011.
- Tall, D. 2004d. *Thinking Through Three Worlds of Mathematics*. Makalah disajikan pada the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 14-18 Juli 2004. (Online), (<http://>

- homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004d-3worlds-pme.pdf), diakses 4 Pebruari 2012.
- Tall, D. 2008e. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (2): 5–24.
- Tall, D. 2009d. *The Development of Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proof*, (Online), (<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009d-paper-for-john-mason.pdf>), diakses 5 Pebruari 2012.