MENENTUKAN INVERS DRAZIN DARI MATRIKS SINGULAR

Lisnilwati Khasanah[1] dan Bambang Irawanto[2]
[1.2]Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl.Prof.Soedarto, S.H Semarang 50275

Abstract. A singular matrix A with size nxn has a inverse be called Drazin inverse and denoted by A^D. This inverse can be obtained by specifying a generalized Modal matrix M and Jordan canonical form J of matrix A. Generalized Modal matrix M is a matrix where its columns consisting of generalized eigen vectors $\mathbf{x}_m$ from the matrix A, while the Jordan canonical form J is a matrix which entries on its main diagonal consisting of Jordan block matrix $J_k(\lambda)$. Next, two matrices were used to determine Drazin inverse of matrix A.

Keywords: Drazin inverse, Jordan block matrix, Jordan canonical form, Modal matrix M .

1. PENDAHULUAN

Sebuah matriks atas ring dengan ukuran nxn dikatakan mempunyai invers jika dan hanya jika matriks tersebut non singular. Dalam perkembangannya dibutuhkan sebuah invers matriks yang diperumum untuk mengetahui invers dari suatu matriks jika matriks tersebut singular.

Ada beberapa jenis invers matriks yang diperumum diantaranya yaitu invers kiri dan invers kanan (invers satu sisi), invers Drazin, invers grup, invers Bott-Duffin, dan invers Moore-Penrose.

Invers Drazin pertama kali dikenalkan oleh Michael P Drazin pada tahun 1958. Invers Drazin adalah invers dari matriks singular A dengan ukuran nxn dituliskan dengan A^{D}. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan invers Drazin diantaranya metode Leverrier Faddeev,metode semi iterative tipe BI-CG. Pada penulisan ini dibahas penentuan invers Drazin dengan menggunakan matriks bentuk kanonik Jordan.

.

2. BENTUK KANONIK JORDAN

Matriks bentuk kanonik Jordan adalah sebuah matriks yang berbentuk :

$$J=\begin{bmatrix} J_{k1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_p}(\lambda_p) \end{bmatrix}$$

Jika $J\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, maka $k_1+k_2+\ldots+k_p=n$. Submatriks $J_{k_i}(\lambda_i)$ adalah matriks blok Jordan berukuran $k_i x k_i$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_i\in\mathbb{C}$ dimana $i=1,2,\ldots,p$. Matriks blok Jordan adalah matriks yang berbentuk :

$$J_k(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Menurut Ricard Bronson dan Gabriel B. Costa, untuk menentukan matriks bentuk kanonik Jordan maka langkah awal yaitu menentukan vektor-vektor eigen yang diperumum.

Definisi 2.1 [5] *Suatu vektor tak nol* $\mathbf{x}_m$ *disebut sebuah vektor eigen yang diperumum dengan tipe m dan bersesuaian dengan nilai eigen* λ *dari matriks A jika :*

$$(A-\lambda\mathbf{I})^m\mathbf{x}_m=\mathbf{0}\ \ dan\ \ (A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_m\neq\mathbf{0}$$

Berdasarkan Definisi 2.1 diatas, dapat dikatakan bahwa $\mathbf{x}_m\in\ker(A-\lambda\mathbf{I})^m$. Dimensi dari $\ker(A-\lambda\mathrm{I})^{m-1}$ adalah $m-1$. Sedangkan dimensi dari $\ker(A-\lambda\mathrm{I})^m$ adalah m. Karena

m adalah bilangan integer positif, maka dimensi dari $\ker(A-\lambda \mathrm{I})^{m-1}$ kurang dari dimensi dari $\ker(A-\lambda \mathrm{I})^{m}$ atau nulitas $(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}$ kurang dari nulitas $(A-\lambda\mathbf{I})^{m}$. Sehingga, rank $(A-\lambda\mathbf{I})^{m}$ kurang dari rank $(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}$. Jika selisih antara rank $(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}$ dengan rank $(A-\lambda\mathbf{I})^{m}$ dinyatakan dengan ρ_m, maka :

$$\rho_m = \text{rank } (A-\lambda\mathbf{I})^{m-1} - \text{rank } (A-\lambda\mathbf{I})^{m} \quad ...(1)$$

dengan m adalah bilangan integer positif. Persamaan (1) menyatakan banyaknya vektor-vektor eigen yang diperumum dengan tipe m dan bersesuaian dengan nilai eigen λ untuk matriks A.

Untuk $m \geq 1$, maka :

$$\mathbf{x}_{m-1} = (A-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_m$$

$$\mathbf{x}_{m-2} = (A-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{x}_m = (A-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_{m-1}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_{1} = (A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_m = (A-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_{2} \quad (2)$$

Persamaan (2) jika dituliskan dalam bentuk umum menjadi :

$$\mathbf{x}_{j} = (A-\lambda\mathbf{I})^{m-j}\mathbf{x}_m = (A-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_{j+1} \quad (3)$$

dengan $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Definisi 2.2 [5] *Himpunan vektor-vektor* $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \ldots, \mathbf{x}_1\}$ *disebut rantai vektor eigen yang diperumum dan bersesuaian dengan nilai eigen* λ.

Contoh 2.3 Matriks singular A dengan ukuran 5x5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, dan $\lambda_4 = \lambda_5 = 2$.

Untuk $\lambda = 1$, maka :

$$\rho_1 = \text{rank}\left((A-\mathbf{I})^0 \right) - \text{rank}\left((A-\mathbf{I})^1 \right) = 5-4 = 1$$

$$\rho_2 = \text{rank}\left((A-\mathbf{I})^1 \right) - \text{rank}\left((A-\mathbf{I})^2 \right) = 4-4 = 0$$

Agar memenuhi $(A-\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ dan $(A-\lambda\mathbf{I})^0\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, maka :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Untuk $\lambda = 0$, maka :

$$\rho_1 = \text{rank}\left(A^0 \right) - \text{rank}\left(A^1 \right) = 5-4 = 1$$

$$\rho_2 = \text{rank}\left(A^1 \right) - \text{rank}\left(A^2 \right) = 4-3 = 1$$

$$\rho_3 = \text{rank}\left(A^2 \right) - \text{rank}\left(A^3 \right) = 3-3 = 0$$

Agar memenuhi $(A)^2\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ dan $A\mathbf{y}_2 \neq \mathbf{0}$, maka :

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \cancel{3}\,2 & -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \text{ sehingga}$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Untuk $\lambda = 2$, maka :

$$\rho_1 = \text{rank}\left((A-2\mathbf{I})^0 \right) - \text{rank}\left((A-2\mathbf{I})^1 \right) = 5-4 = 1$$

$$\rho_2 = \text{rank}\left((A-2\mathbf{I})^1 \right) - \text{rank}\left((A-2\mathbf{I})^2 \right) = 4-3 = 1$$

$$\rho_3 = \text{rank}\left((A-2\mathbf{I})^2 \right) - \text{rank}\left((A-2\mathbf{I})^3 \right) = 3-3 = 0$$

Agar memenuhi $(A-2\mathbf{I})^2\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$ dan $(A-2\mathbf{I})\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$, maka :

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \text{ sehingga}$$

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Hubungan antara rantai vektor-vektor eigen yang diperumum dengan subruang *invariant* akan diberikan pada dua teorema selanjutnya.

Teorema 2.4 [2] *Sebuah rantai merupakan himpunan vektor-vektor yang bebas linier.*

Bukti :

Misalkan $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \ldots, \mathbf{x}_1\}$ adalah sebuah rantai. Kombinasi linier sebagai berikut :

$$c_m\mathbf{x}_m + c_{m-1}\mathbf{x}_{m-1} + \ldots + c_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (4)$$

mempunyai solusi tunggal yaitu $c_m = c_{m-1} = \ldots = c_1 = 0$.

Jika persamaan (2.8) dikalikan dengan $(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}$, maka diperoleh :

$$c_m(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_m + c_{m-1}(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_{m-1} + \ldots$$
$$+ c_1(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (5)$$

dimana untuk $j = 1,2,\ldots,m-1$, diperoleh :

$c_j(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$

untuk $j = 1,2,\ldots,m-1$

Sehingga,

$$c_m(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_m + \mathbf{0} + \ldots + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$c_m(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

Karena $\mathbf{x}_m$ adalah vektor eigen yang diperumum dengan tipe *m,* maka $(A-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{x}_m \neq \mathbf{0}$, sehingga $c_m = 0$.

Langkah tersebut dilakukan sampai diperoleh $c_1 = 0$, sehingga rantai diatas bebas linier karena solusi yang diperoleh merupakan solusi tunggal yaitu $c_m = c_{m-1} = \ldots = c_1 = 0$. ∎

Terorema 2.6 [2] *Rentang dari suatu himpunan vektor-vektor sehingga membentuk rantai vektor eigen yang diperumum untuk matriks A dan bersesuaian dengan nilai eigen* λ *adalah subruang invariant dibawah A.*

Bukti :

Rentang dari himpunan vektor-vektor dalam suatu ruang vektor atas lapangan C adalah subruang.

Misalkan $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \ldots, \mathbf{x}_1\}$ adalah rantai vektor eigen yang diperumum, maka :

$$\mathbf{x}_j = (A-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_{j+1} \tag{6}$$

dimana $j = 1,2,\ldots,m-1$.

Persamaan (2.10) dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$A\mathbf{x}_{j+1} = \lambda\mathbf{x}_{j+1} + \mathbf{x}_j \tag{7}$$

Sebuah vektor eigen yang diperumum dengan tipe 1 adalah sebuah vektor eigen, maka :

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1 \tag{8}$$

Jika $\mathbf{v} \in$ Rentang $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \ldots, \mathbf{x}_1\}$, maka $A\mathbf{v} \in$ Rentang $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \ldots, \mathbf{x}_1\}$, sehingga Rentang $\{\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m-1}, \ldots, \mathbf{x}_1\}$ *invariant* dibawah *A.* ∎

Contoh 2.7 Misalkan

$\boldsymbol{P} =$ Rentang$\{\mathbf{x}_1\}$,

$\boldsymbol{Q} =$ Rentang$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$,dan

$\boldsymbol{R} =$ Rentang$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$,

maka $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{Q}$, dan $\boldsymbol{R}$ adalah subruang *invariant* dibawah $\boldsymbol{T}$ atau dibawah A (matriks transformasi linier $\boldsymbol{T}$), sehingga basis untuk $\boldsymbol{R}^5$ adalah $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{R} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$.

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}-2\\2\\-4\\-2\\-4\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}3/2\\-2\\3\\1\\1\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\-2\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}5\\0\\0\\0\\4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{y}_1) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix}-2\\2\\-4\\-2\\-4\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}3/2\\-2\\3\\1\\1\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\-2\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}5\\0\\0\\0\\4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{y}_2) = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix}-2\\2\\-4\\-2\\-4\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}3/2\\-2\\3\\1\\1\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\-2\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}5\\0\\0\\0\\4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{z}_1) = \begin{bmatrix}-4\\0\\0\\0\\-4\end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix}-2\\2\\-4\\-2\\-4\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}3/2\\-2\\3\\1\\1\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\-2\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}5\\0\\0\\0\\4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\mathbf{z}_2) = \begin{bmatrix}8\\0\\0\\0\\6\end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix}-2\\2\\-4\\-2\\-4\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}3/2\\-2\\3\\1\\1\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\\-2\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}5\\0\\0\\0\\4\end{bmatrix}$$

Jadi, matriks transformasi linier $\boldsymbol{T}$ yang bersesuaian dengan basis $\boldsymbol{B}$ adalah

$$G = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

Matriks G di atas merupakan matriks bentuk kanonik Jordan dimana matriks-matriks blok Jordannya adalah

$$J_1(\lambda_1) = J_1(1) = [1]$$

$$J_2(\lambda_2) = J_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3(\lambda_3) = J_3(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai basis kanonik dari vektor eigen yang diperumum untuk A. Misalkan $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ adalah basis kanonik dari vektor eigen yang diperumum untuk A dan M adalah matriks Modal yang diperumum dimana kolom-kolomnya merupakan vektor-vektor pada basis kanonik, maka :

$$M = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{x}_n]$$

Dari persamaan (8), diketahui bahwa :

$$A\mathbf{x}_{j+1} = \lambda\mathbf{x}_{j+1} + \mathbf{x}_j$$

dimana $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Sehingga,

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1$$
$$A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$$
$$\vdots$$
$$A\mathbf{x}_n = \lambda\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}$$

Misalkan A adalah matriks dari sebuah dan J adalah matriks diagonalnya, maka matriks A dapat didiagonalisasi jika matriks A dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$M^{-1}AM = J$$

dengan M adalah matriks Modal yang diperumum dimana kolom-kolomnya merupakan rantai-rantai vektor eigen yang diperumum, dan J adalah matriks bentuk kanonik Jordan.

Jika persamaan diatas dikalikan dengan M^{-1}, maka akan diperoleh :

$$AM = MJ$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $AM = MJ$ dimana J adalah matriks bentuk kanonik Jordan.

$$AM = [A\mathbf{x}_1 \quad A\mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{x}_n]$$

$$AM = [\lambda\mathbf{x}_1 \quad \lambda\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \lambda\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}]$$

$$AM = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$AM = MJ_n(\lambda)$$

Jika terdapat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, maka akan terdapat rantai-rantai vektor eigen yang diperumum dan bersesuaian dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sehingga $AM = MJ$. Jika kedua ruas persamaan $AM = MJ$ dikalikan dengan M^{-1}, maka diperoleh :

$$A = MJM^{-1}$$

atau dapat juga dinyatakan dalam :

$$J = M^{-1}AM \qquad (9)$$

Contoh 2.8 Dari Contoh 2.7 dimana matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh matriks M sebagai berikut :

$$M = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3/2 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (9), maka diperoleh :

$$J = M^{-1}AM$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Contoh 2.7 dan 2.8, maka dapat dikatakan bahwa matriks J adalah matriks dari transformasi linier $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^5$ yang bersesuaian dengan basis kanonik dari vektor eigen yang diperumum untuk matriks A.

3. MENENTUKAN INVERS DRAZIN DARI MATRIKS SINGULAR

Sebelum diberikan definisi mengenai invers Drazin, terlebih dahulu akan diberikan definisi index dari suatu matriks.

Definisi 3.1 [3] *Jika A adalah matriks berukuran nxn dengan entri bilangan kompleks, maka index dari A yang dituliskan dengan $Ind(A)$ adalah bilangan integer non negatif terkecil k sedemikian sehingga :*

$$\operatorname{rank}\left(A^k\right)=\operatorname{rank}\left(A^{k+1}\right)$$

Contoh 3.2 Index dari matriks A pada Contoh 3 adalah 2 karena $\operatorname{rank}\left(A^2\right)=\operatorname{rank}\left(A^3\right)$.

Definisi 3.3 [3] *Invers Drazin dari suatu matriks bujur sangkar A yang dituliskan dengan A^D merupakan sebuah invers yang memenuhi :*

(i) $AA^{\mathrm{D}} = A^{\mathrm{D}}A$

(ii) $A^{\mathrm{D}}AA^{\mathrm{D}} = A^{\mathrm{D}}$

(iii) $A^{k+1}A^{\mathrm{D}} = A^k$

dimana $k = Ind\,(A)$.

Contoh 3.4 Diberikan matriks sebagai berikut:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, dan A^D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai cara menentukan invers Drazin dari suatu matriks dengan menggunakan matriks bentuk kanonik Jordan. telah diketahui bahwa sebuah matriks A dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$A = MJM^{-1}$$

dengan M adalah matriks Modal yang diperumum dimana kolom-kolomnya merupakan rantai-rantai vektor eigen yang diperumum, dan J adalah matriks bentuk kanonik Jordan.

Teorema 3.4 [1] *Misalkan* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *dan mempunyai bentuk :*

$$A = MJM^{-1} = M\begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_p}(\lambda_p) \end{bmatrix}M^{-1}$$

maka,

$$A^{\mathrm{D}} = M\begin{bmatrix} \left[J_{k_1}(\lambda_1)\right]^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left[J_{k_2}(\lambda_2)\right]^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1} \end{bmatrix}M^{-1}$$

dimana $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$. Jika $\lambda_p = 0$, maka $\left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1} = [0]$.

Bukti :

Karena $A = MJM^{-1}$, maka $A^{-1} = MJ^{-1}M^{-1}$

dengan

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \left[J_{k_1}(\lambda_1)\right]^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left[J_{k_2}(\lambda_2)\right]^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$A^{\mathrm{D}} = M\begin{bmatrix} \left[J_{k_1}(\lambda_1)\right]^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left[J_{k_2}(\lambda_2)\right]^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1} \end{bmatrix}M^{-1}$$

Misalkan J_1 dan J_0 berturut-turut adalah matriks blok Jordan yang bersesuaian dengan $\lambda \neq 0$ dan $\lambda = 0$, maka :

$$A = M\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix}M^{-1}$$

dan

$$A^{\mathrm{D}} = M\begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & J_0^{-1} \end{bmatrix}M^{-1}$$

Misalkan invers Drazin dari A adalah B, maka :

$$B = M\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}M^{-1}$$

sehingga, $B_{12} = B_{21} = [0]$.

Karena B adalah invers Drazin dari A, maka :

$$AB = BA$$

$$M\begin{bmatrix} J_1B_{11} & J_1B_{12} \\ J_0B_{21} & J_0B_{22} \end{bmatrix}M^{-1} = M\begin{bmatrix} B_{11}J_1 & B_{12}J_0 \\ B_{21}J_1 & B_{22}J_0 \end{bmatrix}M^{-1}$$

Karena $J_1B_{12} = B_{12}J_0$, maka $J_1^k = J_1^{k+1}B_{11}$ sehingga $B_{11} = J_1^{-1}$.

Dari persamaan $J_0B_{22} = B_{22}J_0$, diperoleh $B_{22} = [0]$.

Jadi, jika $\lambda_p = 0$, maka $\left[J_{k_p}(\lambda_p)\right]^{-1} = [0]$. ■

Contoh 3.5 Berikut ini adalah invers dari matriks blok Jordan yang diperoleh pada Contoh 2.7.

$$[J_1(1)]^{-1} = [1], \quad [J_2(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dan

$$[J_3(2)]^{-1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} \\ 0 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$A^{D} = M\begin{bmatrix} [J_1(1)]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [J_2(0)]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & [J_3(2)]^{-1} \end{bmatrix}M^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & \tfrac{3}{2} & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & \tfrac{3}{2} & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{7}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \tfrac{1}{2} & 2 & -\tfrac{1}{4} & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. PENUTUP

Suatu matriks singular A berukuran nxn dengan entri-entri bilangan kompleks mempunyai invers yaitu invers Drazin dan dituliskan dengan A^D. Invers ini dapat dicari dengan menentukan matriks Modal M yang diperumum dan matriks bentuk kanonik Jordan J dari matriks A. Matriks Modal M yang diperumum merupakan matriks yang kolom-kolomnya terdiri dari vektor-vektor eigen yang diperumum $\mathbf{x}_m$ dari matriks A sedangkan matriks bentuk kanonik Jordan J merupakan matriks yang entri pada diagonal utamanya berupa matriks blok Jordan $J_k(\lambda)$. Selanjutnya, dua matriks tersebut digunakan untuk menentukan invers Drazin dari matriks A.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Ben-Israel, et. Al, (2003), *Generalized Inverses Theory and Applications*, Second Edition, Springer-Verlag, New York http://www.mediafire.com/ (24 Januari 2010)

[2] Bronson, Ricard dan Gabriel B. Costa, (2007), *Linear Algebra An Introduction*, Second Edition, Elsevier Inc, Amsterdam.

[3] Cambel, Stephen L, Meyer, Carl D., JR., and Rose, Nicholas J, (1976), *Aplication of Drazin Inverse to Linear System of Differential Equetion with Singular Constant Coefficient*, SIAM J. Appl. Math. Vol 31(2) : hal. 411-425. http://benisrael.net/CAMPBELL-MEYER-ROSE-76.pdf (31 Januari 2010)

[4] Finkbeiner, Daniel T., (1960), *Introduction to Matrices and Linear Transformation*, Second Edition, W.H. Freeman, San Fansisco.

[5] Kwuk, et.al, (2004), *Linear Algebra*, Second Edition, Springer-Verlag, New York.

[6] Leon, Steven J., (1998), *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta