ON SOLUTIONS OF THE DISCRETE-TIME ALGEBRAIC RICCATI EQUATION

Soleha
Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya

Abstract. On solving the optimal control for the linear discrete-time system based on quadratic performance indexes will be obtained the hermitian solutions of discrete-time algebraic Riccati equation. The existence of that solution can be identified by an invariant subspace which has certain properties. In this paper we investigate some properties of discrete-time algebraic Riccati equation related to an invariant subspace as steps to identify them.

Keywords: Algebraic Riccati equation discrete -time system, invariant subpace, optimal control quadratic

1. PENDAHULUAN

Dalam beberapa tahun terakhir sistem kontrol mendapat banyak perhatian dari peneliti yang bekerja di bidang rekayasa. Bentuk sistem kontrol dapat dinotasikan oleh matriks yang terkait dengan vektor keadaannya. Vektor keadaan adalah vektor yang nilainya mempresentasikan kondisi dari sistem. Dari sistem kontrol dapat dibentuk sistem kontrol optimal yaitu sistem yang mendesain optimisasi nilai dari suatu fungsi yang dipilih sebagai indeks performansi. Fungsi indeks performansi adalah fungsi yang nilainya dianggap sebagai biaya yang harus dikeluarkan, seperti jumlah energi yang diperlukan ketika sistem tersebut dijalankan.

Pada awal bagian paper ini, akan dibahas mengenai permasalahan kontrol optimal sistem linear waktu diskrit dengan indeks performansi kuadratik. Dalam pembahasan tersebut akan diperoleh solusi hermit dari persamaan Riccati aljabar waktu diskrit (PRAWD) sehingga dapat diperoleh vektor kontrol sebagai solusi sehingga indeks performansinya optimal.

Misalkan A adalah suatu transformasi linear dari (ruang vektor atas bilangan kompleks berdimensi). Suatu subruang dari dikatakan A-invarian jika imagenya termuat dalam subruang tersebut. Wimmer [4] mengetengahkan bahwa solusi hermit PRAWD dapat diidentifikasi eksistensinya dari subruang invarian yang memiliki sifat sifat tertentu. Pada paper ini akan diberikan sifat sifat solusi hermit PRAWD terkait dengan subruang invarian sebagai langkah untuk melakukan identifikasi tersebut. Sebelumnya dibentuk PRAWD baru yaitu PRAWD dengan matriks yang terkait berbentuk matriks Schur. Selanjutnya digunakan ekivalensi PRAWD terkait dengan PRAWD yang baru tersebut yang memudahkan diperolehnya sifat sifat solusi hermit PRAWD terkait.

2. KONTROL OPTIMAL KUADRATIK

2.1 Sistem Kontrol Waktu Diskrit

Pandang sistem kontrol waktu diskrit yang didefinisikan oleh

$$(\ + 1) = \ (\ ) + \ (\ ) \qquad (2.1)$$

dengan

= waktu yang merupakan bilangan bulat
( ) = vektor keadaan, ( )
( ) = vektor kontrol, ( )
= matriks anggota $\times$
= matriks anggota $\times$

Untuk selanjutnya dalam paper ini sistem yang dinyatakan dengan persamaan (2.1) dinotasikan sebagai sistem (,). Solusi sistem (,) dapat diselesaikan menggunakan metode rekursi yaitu:

(1) = (0) + (0)
(2) = (1) + (1)
= (0) + (0) + (1)
(3) = (2) + (2)
= (0) + (0) + (1) + (2)

Mengulangi prosedur ini, didapatkan

( ) = (0) + ( ) (2.2)

Setelah mendapatkan solusi sistem (,), bisa didefinisikan sifat keterkontrolan dari sistem tersebut.
Suatu sistem (,) dinamakan *terkontrol* jika untuk setiap keadaan awal (0) = , ≥ 0 dan keadaan akhir , terdapat > 0 dan vektor kontrol ( ) sedemikian hingga solusi dalam persamaan (2.2) menjadi ( ) = .
Selanjutnya akan diturunkan ekivalensi keterkontrolan sistem (,).

Lemma 2.1. [2]. *Pandang sistem* (,) *pada Persamaan (2.1) Pernyataan berikut ekivalen :*

1. *Sistem* (,) *terkontrol*
2. *rank* [−] = *, untuk setiap*
3. *rank* [, , … ,] = *, dengan kata lain* [, , … ,] = .

Didefinisikan spektrum dari yaitu himpunan dari seluruh nilai eigen dari yang dinotasikan dengan ( ), dan matriks × hermit jika = dengan = , matriks transpose konjugate dari [5].
Berikut ini diberikan suatu lema yang sangat penting dalam menunjukkan identifikasi solusi Riccati.

Lemma 2.2. [4]. *Pandang sistem waktu diskrit* (,) *yang sudah diberikan pada persamaan* (2.1) *yaitu*
(+ 1) = ( ) + ( ).
Asumsikan bahwa
| | < 1
( ) (2.3)
maka terdapat matriks hermit sebagai solusi dari
− = (2.4)
Solusi non singular jika dan hanya jika (,) *terkontrol.*

2.2 Kontrol Kuadratik Optimal

Pandang sistem (,) yang memenuhi persamaan (2.1). Asumsikan sistem (,) terkontrol. Pada permasalahan kontrol optimal kuadratik, diinginkan untuk menentukan vektor ( ) sehingga indeks performansi kuadratik yang diberikan dapat diminimalkan. Salah satu contoh indek performansi kuadratik untuk waktu yang dibatasi adalah

= ( ) ( ) + [( ) ( )
+ ( ) ( )] (2.5)

dengan
= matriks definit positif anggota ×
= matriks definit positif anggota ×
= matriks definit positif anggota ×
dengan (0) = konstan dan ( ) ditentukan. Permasalahan kontrol optimal bisa diselesaikan dengan banyak pendekatan, salah satunya adalah dengan menggunakan metode Lagrange. Didefinisikan:

= ( ) ( ) + [( ) ( ) + ( ) ( )]
+ (+ 1)[( ) + ( ) − (+ 1)]
+ [( ) − ( ) − (+ 1)] (+ 1)

Meminimalkan fungsi (dengan kendala Persamaan (2.1)) ekivalen dengan meminimalkan fungsi . Untuk meminimumkan , ditentukan titik kritis dari dengan cara menurunkan terhadap ( ), ( ), dan ( ) dan hasilnya sama dengan 0. Dengan perhitungan yang tidak sulit didapat

0 = ( ) = ( ) + (+ 1)
− ( ) (2.6)

0 = ( ) = ( ) − ( )

0 = ( ) = ( ) + (+ 1) (2.7)

0 = ( ) = (− 1) + (− 1) − ( ) (2.8)

Dari Persamaan (2.6), didapat
( ) + (+ 1) = ( ), dengan
( ) = ( ) (2.9)
Dari Persamaan (2.7), didapat
( ) = − (+ 1), = 0,1,2, … , − 1(2.10)
Persamaan (2.8) ditulis kembali
(+ 1) = ( ) + ( ),
= 0,1,2, … , − 1 (2.11)
Substitusi Persamaan (2.10) ke Persamaan (2.11) didapat:
(+ 1) = ( ) − (+ 1), dengan (0) =
(2.12)

Untuk mendapatkan solusi minimum, selesaikan Persamaan (2.6) dan (2.12) secara simultan. Asumsikan ( ) sebagai fungsi dari vektor keadaan ( ) dalam bentuk:
( ) = ( ) ( ), dengan matriks hermit anggota × (2.13)
Substitusi (2.13) ke (2.9) didapat:
( ) ( ) = ( ) + (+ 1) (+ 1) (2.14)
Substitusi Persamaan (2.13) ke Persamaan (2.12) didapat:
(+ 1) = ( )
− (+ 1) (
+ 1) (2.15)
Dapat dilihat bahwa Persamaan (2.14) dan (2.15) tidak mengandung ( ). Dari persamaan (2.15) didapat:
[+ (+ 1)] (+ 1) = ( ) (2.16)
| + (+ 1)|
= + (+ 1)
= + (+ 1)
= | | + | + (+ 1) |

Karena(,) terkontrol, maka (+ 1) definit positif [2]. Karena (+ 1) definit positif maka
| + (+ 1)|
= | | + | + (+ 1) | ≠ 0
sehingga (+ (+ 1)) ada.

Persamaan (2.16) dapat ditulis:
(+ 1) = [+ (+ 1)] ( ) (2.17)
Substitusi Persamaan (2.17) ke Persamaan (2.14) didapat:
( ) ( ) =
( ) + (+ 1)[+ (+ 1)] ( )
atau
[( ) − − (+ 1)[+ (+ 1)]] ( ) = 0, untuk semua ( )
sehingga
( ) = + (+ 1)[+ (+ 1)]
(2.18)

Karena
(+) = − (+) ,
dengan = , = dan = (+ 1)
maka
[+ (+ 1)]
= − [+ (+ 1)] (
+ 1)
= − [+ (+ 1)] (+ 1)

Sehingga persamaan (2.18) bisa dimodifikasi menjadi:
( ) = + (+ 1)
− (+ 1) [+ (+ 1)]
(+ 1) (2.19)
Persamaan (2.19) dan ekivalensinya (2.18) dinamakan persamaan Riccati. Dari Persamaan (2.6) dan (2.13), perhatikan pada = , didapat:
( ) ( ) = ( ) = ( )
atau
( ) =
(2.20)
Oleh karena itu persamaan (2.18) dan (2.19) bisa diselesaikan secara tunggal dari = ke = 0. Akibatnya didapat ( ), (− 1), … , (0) dimulai dari ( ) yang sudah diketahui. Dari persamaan (2.6) dan (2.13), ( ) yang diberikan dari (2.10) menjadi:
( ) = − (+ 1)
= − ( ) [( ) − ( )]
= − ( ) [( ) −] ( )
= − ( ) ( ) (2.21)
dengan
( ) = ( ) [( )
−] (2.22)
Persamaan (2.21) memberikan bentuk umpan balik keadaan (*close loop*) untuk

vektor kontrol optimal ( ). Sedang dalam hal ini matriks dinamakan matriks umpan balik. Perhatikan bahwa vektor ( ) bisa diberikan dalam bentuk lain, yaitu

( ) = − (+ 1)
= − (+ 1) (+ 1) (2.23)
= − (+ 1)[+ (+ 1)] ( )
= − [(+ 1) +] ( )
= − ( ) ( )

dengan

( ) = [(+ 1) +] (2.24)

Bentuk bentuk ( ) yang diberikan oleh Persamaan (2.21), (2.23), adalah ekivalen.

Telah dilihat ketika proses kontrol berhingga (ketika berhingga), matriks umpan balik menjadi matriks *time variant* (berubah terhadap waktu).

Pandang masalah kuadratik kontrol optimal yang prosesnya tanpa batas yaitu:

= [( ) ( ) + ( ) ( )]

Dari persamaan (2.18), bisa ditentukan sebagai berikut:

= + (+)
= + (+)

Atau dari persamaan (2.19),

= + − (+) (2.25)

Persamaan (2.25) tersebut dikenal dengan Persamaan Riccati Aljabar Waktu Diskrit (*PRAWD*).

Dari persamaan (2.22) diperoleh

= ( ) (−)

Dari persamaan (2.24),

= (+)

masih memungkinkan bentuk yang lain yaitu:

=
(+) (2..26)

Kontrol optimalnya diberikan oleh

( ) = −)

sehingga jika Persamaan (2.26) disubstitusikan ke persamaan terakhir, didapat:

( ) = −(+) ( )

Akibatnya sistemnya menjadi:

(+ 1) = [− (+)] ( ) (2.27)

Selanjutnya hanya matriks hermit yang dipandang sebagai solusi dari Persamaan (2.25). Didefinisikan = [− (+)] maka dapat diasosiasi semacam matriks umpan balik pada setiap solusi . Misalkan Γ = GR G , maka definisi bisa diubah menjadi:

= (+)

Misalkan nonsingulir maka PRAWD dapat dipandang sebagai persamaan dua pasangan seperti yang ditunjukkan dalam lema berikut.

Lemma 2.3. [4]. *Asumsikan* ≠ 0. *Maka adalah solusi nonsingulir dari*

− + (+) − = 0

Jika dan hanya jika = − *adalah solusi nonsingulir dari*

− + (+) − Γ = 0, Γ = (2.28)

3. KAJIAN SOLUSI PERSAMAAN RICCATI ALJABAR WAKTU DISKRIT

3.1 Ekivalensi Persamaan Riccati Aljabar Waktu Diskrit

Seperti yang diuraikan di bagian sebelumnya, sudah dibahas solusi PRAWD yang bersifat hermit. Pandang PRAWD pada Persamaan (2.25). Selanjutnya diberikan asumsi > 0, dan matriks hermit anggota × . Berdasarkan asumsi yaitu > 0, maka dapat ditulis = , dengan > 0.

(+) = (+)
= ((+))
= (+)

dengan =

Persamaan (2.25) bisa diubah menjadi

− − (+) +
= − − (+) +
= − − (+) + = 0

Dengan memandang matriks ′ sebagai matriks , bentuk PRAWD menjadi:

− + (+) − = 0 (3.1)

Dengan demikian tanpa mengurangi keumuman, Persamaan (2.25) dapat diubah dengan = . Selanjutnya akan diberikan sifat yang menunjukkan bahwa dengan diperolehnya satu solusi dari persamaan (2.29) solusi yang lain cukup dengan memandang PRAWD terkait dengan = dan = 0, yaitu:

$$- \quad + \quad (+ \quad) \quad = 0 \quad (3.2)$$

Lemma 3.1. [3]. *Jika dan adalah solusi dari persamaan* (3.1)*, maka selisih* $\Delta = \; -$ *memenuhi:*

$$(\Delta) = \Delta - \quad \Delta \quad + \quad \Delta \;[(\; + \quad) + \quad \Delta \;] \quad \Delta \quad = 0 \qquad (3.3)$$

dan himpunan solusi dari (3.1) *diberikan oleh*

$$+ \{\Delta | \Delta = \Delta \;, \; (\Delta) = \; \}$$

Berdasarkan Lemma 3.1 dapat disimpulkan bahwa terdapat korespondensi satu satu antara himpunan solusi PRAWD (3.1) dengan himpunan solusi PRAWD (3.3) dengan memilih tertentu dapat diperoleh menyatakan matriks stabil yaitu untuk setiap $, |\;| < 1$. Karena itu, untuk selanjutnya cukup mengkaji PRAWD (3.2) dengan untuk setiap $(\;), |\;| < 1$.

Pandang solusi PRAWD yang diberikan di persamaan (3.2). Dapat dibentuk matriks baru yang terkait pada persamaan (3.2) dengan perubahan koordinat yang sesuai.

Artinya dapat dibentuk matriks = , = dan $\bar{}$ = dengan matriks uniter. Dengan pendefinisian matriks baru di atas dapat dibuktikan sifat ekivalensi PRAWD (3.2) dengan PRAWD dengan matriks baru tersebut yang dinyatakan pada lema berikut.

Lemma 3.2. *adalah solusi persamaan*

$$- \quad + \quad (+ \quad) \quad = 0$$

jika hanya jika = $\bar{}$ *solusi persamaan*

$$-(\;) \quad +(\;) \quad \bar{(} \; +(\bar{\;}) \quad \bar{)} \;\; (\bar{\;}) \quad = 0 \qquad (3.4)$$

Bukti: ( ) Misalkan solusi persamaan

$$-(\;) \quad +(\;) \quad \bar{(} \; +(\;) \quad \bar{)} \;\; (\;) \quad = 0.$$

Diuraikan persamaan (3.4) menjadi

$$-(\;) \quad +(\;) \quad \bar{(} \; +(\bar{\;}) \quad \bar{)} \;\; (\bar{\;})$$
$$= \quad - \quad (\;)$$
$$+ \quad (\;) \quad ($$
$$+ \quad (\;) \quad) \quad (\;)$$
$$= \quad - \quad + \quad (+ \quad)$$
$$= \quad (- \quad + \quad (+ \quad) \quad)$$
$$= \quad 0 \quad = 0.$$

( ) Misalkan

$$-(\;) \quad +(\;) \quad \bar{(} \; +(\bar{\;}) \quad \bar{)} \;\; (\bar{\;})$$
$$= \quad (\; - \quad + \quad (+ \quad) \quad) \quad = 0.$$

Karena invertible, maka $- \quad +$

$$(+ \quad) \quad = 0.$$

ð

Berdasarkan Lema 3.1 dapat disimpulkan bahwa solusi PRAWD (3.2) dapat diperoleh dari solusi PRAWD terkait (3.4). Selanjutnya matriks dalam bentuk Schur dinotasikan dengan . Lebih jauh, dengan memandang matriks $\bar{}$ sebagai matriks dan matriks dengan matriks maka bentuk PRAWD (3.2) menjadi:

$$- \quad + \quad (+ \quad) \quad = 0 \qquad (3.5)$$

Selanjutnya diberikan sifat-sifat yang akan digunakan dalam membuktikan sifat solusi PRAWD terkait (3.5) dengan subruang invarian yaitu: Untuk , didefinisikan

$$(\;) \quad = \quad [\; - \;] \qquad (3.6)$$

sedemikian hingga (3.6) adalah ruang eigen tergeneralisir dari jika ( ).

Berikutnya misalkan

$$(\;,\;) = \quad (\;, \quad , \ldots , \quad)$$

adalah subruang dari .

3.2. Sifat Solusi Persamaan Riccati Aljabar Waktu Diskrit

Dengan menggunakan sifat-sifat serta definisi pada sub bab sebelumnya, dapat diperoleh sifat solusi PRAWD dalam persamaan (3.5) seperti yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3. *Misalkan*

$$(\;) = \quad - \quad + \quad (+ \quad) \quad = 0 \qquad (3.7)$$

dengan stabil yaitu untuk setiap $(\;), |\;| < 1$ *dan adalah solusi dari persamaan* (3.7) *yang bersifat hermit.*

Maka bersifat

1. $(\;) \quad \ker$
2. $\ker \quad \mathrm{Inv}$
3. $\ker \quad + \quad (\;,\;) =$

Bukti.

Akan dibuktikan ker memenuhi :

1. ( ) ker
2. ker Inv
3. ker + (,) =

1. Akan dibuktikan ( ) ker . Dengan mengaplikasikan matriks Schur [1], = [ ] adalah matriks segitiga atas dengan = , = 1, … , , ( ) sedemikian hingga dapat dituliskan

$$= \quad 0 \quad = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{matrix} \quad , \quad < \qquad (3.8)$$

sedemikian hingga matriks nilpoten dan matriks nonsingulir. Oleh karena itu dapat diperoleh ( ) = ker[−] = Im 0 .

Misalkan = . Karena

$$= \ - \ + \ (\ + \ ) \ (\ ) \ = 0,$$

Maka − = 0 (3.9)

dengan = (+ Γ) , Γ =
Karena nilpoten, maka terdapat , sehingga ( ) = 0. Mengalikan Persamaan (3.9) dengan ( ) sehingga menjadi

$$(\ ) \ - \ (\ )(\ ) \ = 0$$

$$(\ ) \ - \ (\ ) \ = 0$$

$$(\ ) \ - 0 = 0$$

Akibatnya ( ) = 0. Langkah selanjutnya mengalikan persamaan (3.9) dengan ( ) sehingga menjadi

$$(\ ) \ - \ (\ )(\ ) \ = 0$$

$$(\ ) \ - \ (\ ) \ = 0$$

Akibatnya ( ) = 0. Dilakukan iterasi sampai dengan − sehingga didapat ( ) = 0.

Artinya $= \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$.

Sehingga (,) = (0,0) dan = diag(0,) atau $= \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{matrix}$.

Ambil sebarang Im 0 . Maka

$$= \ . \ \times \ = (0 \dots 0 \ ) \times \ = \quad 0$$

$$\begin{matrix} & 0 \\ 0 & \\ 0 & \end{matrix}$$

0 = 0. Sehingga ker . Jadi

0

0

( ) = Im 0 ker .

2. Akan dibuktikan ker Inv . Perhatikan bahwa

$$(\ ) = \ - \ = 0 \qquad (3.10)$$

dengan = (+ Γ) dengan

$$\Gamma = \ , \ = \ .$$

Karena matriks nonsingulir, maka nonsingulir, sehingga = . Akan dibuktikan Inv . Berdasarkan subruang invarian artinya akan dibuktikan ker , untuk setiap ker . Ambil sebarang ker . Karena ker , maka = 0. Akan dibuktikan ker . Dengan kata lain akan dibuktikan = 0. Berdasarkan persamaan (3.10) diperoleh

$$=$$
$$= \ . 0$$
$$= 0$$

Artinya ker . Sehingga ker Inv . Akan dibuktikan ker Inv . Artinya akan dibuktikan ker untuk setiap ker . Ambil sebarang ker . Karena ker maka $= 0$. Dengan kata lain

$$0 \quad 0 \quad = \quad 0 \quad = \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad (3.11)$$

Akan dibuktikan ker . Dengan kata lain akan dibuktikan $= 0$.

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \quad 0 \quad 0$$
$$= 0 \quad 0 \quad 0$$

Dari Persamaan (3.11) didapatkan $= 0$. Akibatnya ker . Karena Inv , maka $= 0$. Sehingga $= 0$. Artinya ker Inv .

3. Akan dibuktikan ker komplemen dari (,). Karena ker Inv dapat diasumsikan ker = 0 0 0 sehingga $= \mathrm{diag}(0, \ ) \quad ^{\times}, | \ | \neq 0$.
Pandang persamaan

$$(\ ) = \ -$$
$$+ \quad (+ \quad) \quad = 0$$

Berdasarkan persamaan (3.8) nonsingulir. Selanjutnya misalkan $= -$, maka

$$- \quad = \Gamma = \qquad (3.12)$$

adalah kasus khusus dari persamaan (3.10) dengan $= 0$. Karena stabil maka $| \ | < 1 \quad (\ )$. Pandang persamaan (3.12). Karena nonsingulir, berdasarkan Lema 2.2 didapatkan ($_1$, $_1$) terkontrol. Akibatnya menurut Lema 2.1 $_1$, $_1$ = ^{2} sehingga

(,) Im untuk suatu .

Dengan demikian ker + (,) = .

4. KESIMPULAN

Pada paper ini telah dilakukan kajian mengenai ekivalensi solusi PRAWD dengan PRAWD dalam bentuk matriks Schur.
Selain itu juga didapatkan sifat solusi PRAWD dalam bentuk Schur yang merupakan suatu subruang invarian dan sifat sifat lainnya. Pada kajian yang selanjutnya dapat dikaji mengenai identifikasi (bukan hanya sifat) solusi persamaan aljabar Riccati waktu diskrit dari himpunan sub ruang invarian.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Horn R.A. and Johnson C.A., (1985), *Matrix Analysis,* Cambridge University Press.

[2] Katsuhiko, O., (1995), *Discrete-Time Control System*, Prentice-Hall International.

[3] Ran A. C. M and Trentelman H. M, (1993), *Linear Quadratic Problem with Indefinite Cost for Discrete Time Systems,* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14, 776-797.

[4] Wimmer H. K., (1996), *Hermitian Solutions of The Discrete-Time Algebraic Riccati Equation*.

[5] Zang F., (1993), *Matrix Theory*, Springer-Verlag, New York.