JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 1 - 10, April 2001, ISSN : 1410-8518

PENDEKATAN REGRESI POLINOMIAL ORTHOGONAL PADA RANCANGAN DUA FAKTOR (DENGAN APLIKASI SAS DAN MINITAB)

Tatik Widiharih
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Abstrak

Pendekatan regresi polinomial orthogonal dapat dilakukan pada rancangan dengan faktor kuantitatif dan jarak antar taraf faktor sama. Pendekatan ini dilakukan bila peneliti ingin menentukan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon yang diamati. Penentuan derajat polinomial berdasarkan kontras-kontras orthogonal yang nyata (significant) dari masing-masing faktor, kemudian dapat ditemukan bentuk regresi pendekatannya. Persamaan yang diperoleh merupakan fungsi matematika dengan dua peubah. Dengan menggunakan hitung differensial dapat ditentukan titik ekstrem dari fungsi tersebut. Bila dikembalikan kebentuk rancangan berarti dapat ditentukan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon yang diamati.

Kata kunci **:** faktor kuantitatif, respon, polinomial orthogonal, kontras orthogonal.

1. PENDAHULUAN

Rancangan dua faktor pada tulisan ini dibatasi pada rancangan dengan kedua faktor kuantitatif, jarak antar taraf faktor sama, ulangan sama dan model yang dipilih adalah model tetap (fixed model). Pendekatan regresi polinomial orthogonal ini dapat diterapkan dalam percobaan faktorial , split – plot maupun split – blok.

Setelah menentukan rancangan yang dipilih, dan berdasarkan data pengamatan (respon), pertama tama disusun tabel analisa variansnya (tabel anova). Dari tabel anova tersebut akan terlihat faktor-faktor mana yang nyata (significant) yang mempengaruhi respon yang diamati. [1 , 2 , 3]. Jumlah kuadrat faktor utama (yang nyata / significant) dapat dipecah menjadi jumlah kuadrat kontras-kontras yang saling orthogogal yang berderajat bebas 1. Banyaknya kontras orthogonal yang dapat dibentuk sebanyak taraf faktornya dikurangi satu. Koeffisien dari kontras-kontras orthogonal ditentukan berdasarkan tabel koeffisien polinomial orthogonal (lampiran 1). Melalui uji kontras dapat ditentukan derajat polinomial dari faktor utama. Untuk faktor interaksi, kontras-kontras orthogonalnya ditentukan melalui kontras-kontras dari faktor utama (seolah – olah seperti perkalian bilangan riil biasa). Jumlah kuadrat faktor interaksi dapat dipecah menjadi jumlah kuadrat kontras-kontras orthogonal yang berderajat bebas 1. Banyaknya kontras ortogonal yang dapat dibentuk sebanyak perkalian antara banyaknya kontras orthogonal dari faktor ke 1 dengan faktor ke 2. Dengan melalui uji kontras dapat ditentukan bentuk interaksi dan derajat dari polinomialnya [2]. Dengan menggabungkan polinomial dari faktor utama dan faktor interaksi akan diperoleh pendekatan regresi polinomial orthogonal.

Bentuk persamaan regresi yang diperoleh merupakan bentuk fungsi matematika dengan dua peubah, sehingga dengan menggunakan pendekatan hitung differensial dapat ditentukan titik-titik yang mengoptimalkan fungsi tersebut (dengan kata lain dapat ditentukan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon yang diamati). Dalam tulisan ini penentuan kondisi optimum ini dilakukan dengan paket program Maple 6.

Berdasarkan uraian tersebut diatas maka tujuan penulisan dari makalah ini adalah menentukan kontras-kontras orthogonal yang nyata baik untuk faktor utama maupun faktor interaksi sehingga dapat ditentukan bentuk umum dari pendekatan polinomial orthogonalnya dengan menggunakan program SAS. Berdasarkan bentuk yang diperoleh pendekatan persamaan regresi polinomial dilakukan dengan program MINITAB. Penentuan taraf faktor dari masing-masing faktor yang mengoptimalkan respon dilakukan dengan paket program MAPLE 6. Sebagai contoh kasus dalam tulisan ini dipilih percobaan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak kelompok. Faktor pertama (A) mempunyai 5 buah taraf faktor, faktor kedua (B) mempunyai 3 buah taraf faktor dan percobaan dilakukan pada 3 kelompok yang berbeda.

2. DISKRIPSI TEORITIS

Percobaan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak kelompok, faktor A mempunyai 5 buah taraf faktor, faktor B mempunyai 3 buah taraf faktor dan percobaan dilakukan pada 3 kelompok yang berbeda mempunyai model linier :

$Y_{ijk} = \mu + \kappa_k + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$ i = 1,2,..,5; j = 1,2,3; k = 1,2,3 …......….(2.1)

Dengan :

Y_{ijk} : observasi pada taraf ke i faktor A , taraf ke j faktor B dan kelompok ke k

μ : rataan umum

κ_k : pengaruh kelompok ke k

α_i : pengaruh taraf ke i faktor A

β_j : pengaruh taraf ke j faktor B

$(\alpha\beta)_{ij}$: pengaruh interaksi taraf ke i faktor A dan taraf ke j faktor B

ε_{ijk} : pengaruh galat percobaan.

Digunakan model tetap dengan asumsi :

$\Sigma_i \alpha_i = 0$; $\Sigma_j \beta_j = 0$; $\Sigma_i (\alpha\beta)_{ij} = \Sigma_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$

ε_{ijk} menyebar normal dengan rata-rata 0 dan variansi σ_ε .

Data pengamatan dapat disajikan sebagai berikut :

FAKTOR A	FAKTOR B	KELOMPOK		
		1	2	3
A_1	B_1 B_2 B_3	Y_{111} Y_{121} Y_{131}	Y_{112} Y_{122} Y_{132}	Y_{113} Y_{123} Y_{133}
….	…	…	…	…
A_5	B_1 B_2 B_3	Y_{511} Y_{521} Y_{531}	Y_{512} Y_{522} Y_{532}	Y_{513} Y_{523} Y_{533}

Hipotesa yang dapat diambil adalah :

1. H_0 : $\kappa_k = 0; \forall k=1,2,3$; (tidak ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)

   H_1 : paling sedikit ada satu k dengan $\kappa_k \neq 0$; (ada pengaruh kelompok terhadap respon yang diamati)

2. H_0 : $\alpha_i = 0$; $\forall i = 1,2,3,4,5$; (tidak ada pengaruh taraf ke i faktor A terhadap

respon yang diamati)

H_1 : paling sedikit ada satu i dengan $\alpha_i \neq 0$; (ada pengaruh taraf ke i faktor A terhadap respon yang diamati)

3. H_0 : $\beta_j = 0$; $\forall j = 1,2,3,$; (tidak ada pengaruh taraf ke j faktor B terhadap respon yang diamati)

   H_1 : paling sedikit ada satu j dengan $\beta_j \neq 0$; (ada pengaruh taraf ke j faktor B terhadap respon yang diamati)

4. H_0 : $(\alpha\beta)_{ij} = 0$; $\forall$i & j (tidak ada pengaruh interaksi taraf ke i faktor A dan taraf ke j faktor B terhadap respon yang diamati)

   H_1 : paling sedikit ada sepasang (i,j) dengan $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$; (ada pengaruh taraf ke i faktor A terhadap respon yang diamati)

Perhitungan-perhitungan :

Derajat bebas total = 44. Derajat bebas kelompok = 2. Derajat bebas faktor A = 4 Derajat bebas faktor B = 2. Derajat bebas interaksi AB = 8. Derajat bebas galat = 28. Kuadrat Tengah (KT) = Jumlah Kuadrat (JK) dibagi derajat bebasnya.

Adapun rumus-rumus yang diperlukan untuk menghitung Jumlah Kuadrat (JK) adalah :

$$FK = \frac{Y_{...}^{2}}{5X3X3} ......dengan Y_{...} = \sum_{i,j,k} Y_{ijk}$$

$$JKT = \sum_{i,j,k} Y_{ijk}^{2} - FK$$

$$JKK = \sum_{k} \frac{Y_{..k}^{2}}{5x3} - FK .....dengan Y_{..k} = \sum_{i,j} Y_{ijk}$$

$$JKA = \sum_{i} \frac{Y_{i..}^{2}}{3x3} - FK ......dengan Y_{i..} = \sum_{j,k} Y_{ijk}$$

$$JKB = \sum_{j} \frac{Y_{.j.}^{2}}{5x3} - FK ......dengan Y_{.j.} = \sum_{i,k} Y_{ijk}$$

$$JKAB = \sum_{i,j} \frac{Y_{ij.}^{2}}{3} - FK - JKA - JKB .....dengan Y_{ij.} = \sum_{k} Y_{ijk}$$

$$JKG = JKT - JKK - JKA - JKB - JKAB$$

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 1 - 10, April 2001, ISSN : 1410-8518

Berdasarkan perhitungan-perhitungan tersebut dapat disusun tabel ANOVA sebagai berikut :

Tabel 1. Tabel Anova.

Sumber Variasi	Derajat Bebas	JK	KT	F_{hitung}	F_{tabel}
Kelompok	2	JKK	KTK	KTK/KTG	$F_{2;28;(\alpha)}$
A	4	JKA	KTA	KTA/KTG	$F_{2;28;(\alpha)}$
B	2	JKB	KTB	KTB/KTG	$F_{4;28;(\alpha)}$
AB	8	JKAB	KTAB	KTAB/KTG	$F_{8;28;(\alpha)}$
Galat	28	JKG	KTG		
Total	44	JKT			

Kriteria uji : tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$.

Berdasarkan tabel 1 tersebut dapat ditentukan faktor mana saja yang nyata (significant) yang mempengaruhi respon yang diamati. Faktor yang nyata tersebut kemudian dilakukan uji kontras orthogonal untuk menentukan regresi polinomial orthogonal pendekatannya.

Bila faktor A nyata, maka dapat dibentuk 4 buah kontras arthogonal yaitu Linier (A_L), Kuadratik (A_K), Qubic (A_C), dan Quartik (A_Q). Koeffisien dari kontras-kontras dapat ditentukan berdasarkan tabel koeefisien polinomial orthogonal (Lampiran 1). Jumlah kuadrat faktor A (JKA) dapat dipecah menjadi JKA_L , JKA_K , JKA_C DAN JKA_Q yang masing-masing berderajat bebas satu dan dicari dengan cara sebagai berikut :

Total taraf faktor A	Koeffisien kontras orthogonal			
	Linier	Kuadratik	Qubic	Quartik
$Y_{1..}$	-2	2	-1	1
$Y_{2..}$	-1	-1	2	-4
$Y_{3..}$	0	-2	0	6
$Y_{4..}$	1	-1	-2	-4
$Y_{5..}$	2	2	1	1
Effect : $\Sigma C_i . Y_{i..}$	EA_L	EA_K	EA_C	EA_Q
JK= $(\text{effect})^2$ / (b.n. ΣC_i^2)	$(EA_L)^2/(3x3x10)$	$(EA_k)^2/(3x3x14)$	$(EA_C)^2/(3x3x10)$	$(EA_Q)^2/(3x3x70)$

Bila faktor B nyata, maka dapat dibentuk dua buah kontras rothogonal yaitu Linier (B_L) dan Kuadratik (B_K). Jumlah kuadrat faktor B (JKB) dapat dipecah menjadi JKB_L dan JKB_K yang masing-masing berderajat bebas satu, dan dicari dengan cara sebagai berikut :

Total taraf faktor B	Koeffisien kontras orthogonal	
	Linier	Kuadratik
$Y_{.1.}$	-1	1
$Y_{.2.}$	0	-2
$Y_{.3.}$	1	1
Effect : $\Sigma\ C_j\ .\ Y_{.j.}$	EB_L	EB_K
JK= $(\text{effect})^2$ / (a.n. $\Sigma\ C_i^2$)	$(EB_L)^2$ / (5x3x2)	$(EB_K)^2$ / (5x3x6)

Bila faktor interaksi AB nyata , maka dapat dibentuk 8 buah kontras orthogonal yaitu : A_LB_L , A_KB_L , A_CB_L , A_QB_L , A_LB_K , A_KB_K , A_CB_K dan A_QB_K . Jumlah kuadrat interaksi AB (JKAB) dipecah menjadi : $JK(A_LB_L)$, $JK(A_KB_L)$, $JK(A_CB_L)$, $JK(A_QB_L)$, $JK(A_LB_K)$, $JK(A_KB_K)$, $JK(A_CB_K)$ dan $JK(A_QB_K)$ yang masing-masing berderajat bebas satu. Penentuan jumlah kuadrat kontras ini kontras faktor utama A dan B, dalam hal ini diberikan salah satu ilustrasi kontras dari interaksi tersebut dan yang lain ditentukan secara analog , misalnya di sini akan menentukan $JK(A_LB_L)$ sebagai berikut :

A_L	B_L		
	-1	0	1
-2	2	0	-2
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1
2	-2	0	2

$A_LB_L = \Sigma\ C_{jj}\ .\ Y_{ij.}$

$= (2)xY_{11.} + (0)xY_{12.} + (-2)xY_{13.} + (1)xY_{21.} + (0)xY_{22.} + (-1)xY_{23.} + (0)xY_{31.} + (0)xY_{32.} + (0)xY_{33.} + (-1)xY_{41.} + (0)xY_{42.} + (1)xY_{43.} + (-2)xY_{51.} + (0)xY_{52.} + (2)xY_{53.}$

$JK(A_LB_L) = (A_LB_L)^2 / (nx\Sigma\ C_{jj}^2\ ) = (A_LB_L)^2 / (3x(2^2 + 0^2 + \ldots + 2^2\ ) = (A_LB_L)^2 / (3x20)$

Tabel 1 dapat disusun kembali menjadi tabel 2 berikut :

JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 4. No. 1, 1 - 10, April 2001, ISSN : 1410-8518

Tabel 2. Tabel Anova

Sumber Variasi	Der. Bebas	JK	KT	F_{HITUNG}	F_{TABEL}
Kelompok	2	JKK			
A	(4)	(JKA)			
A_L	1	JKA_L	KTA_L	KTA_L/KTG	$F_{1;28;(\alpha)}$
A_K	1	JKA_K	KTA_K	KTA_K/KTG	
A_C	1	JKA_C	KTA_C	KTA_C/KTG	
A_Q	1	JKA_Q	KTA_Q	KTA_Q/KTG	
B	(2)	(JKB)			
B_L	1	JKB_L	KTB_L	KTB_L/KTG	
B_K	1	JKB_K	KTB_K	KTB_K/KTG	
AB	(8)	(JKAB)			
A_LB_L	1	JKA_LB_L	KTA_LB_L	KTA_LB_L/KTG	
A_KB_L	1	JKA_KB_L	KTA_KB_L	KTA_KB_L/KTG	
A_CB_L	1	JKA_CB_L	KTA_CB_L	KTA_CB_L/KTG	
A_QB_L	1	JKA_QB_L	KTA_QB_L	KTA_QB_L/KTG	
A_LB_K	1	JKA_LB_K	KTA_LB_K	KTA_LB_K/KTG	
A_KB_K	1	JKA_KB_K	KTA_KB_K	KTA_KB_K/KTG	
A_CB_K	1	JKA_CB_K	KTA_CB_K	KTA_CB_K/KTG	
A_QB_K	1	JKA_QB_K	KTA_QB_K	KTA_QB_K/KTG	
Galat	28	JKG	KTG		
Total	44	JKT			

Dari tabel 2 tersebut dapat ditentukan bentuk dan derajat polinomial orthogonal berdasarkan kontras-kontras yang nyata. Bentuk umum polinomial orthogonal dengan menotasikan A sebagai X_1 dan B sebagai X_2 adalah sebagai berikut :

$$\hat{Y} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_{10} P_1(X_1) + \hat{\alpha}_{20} P_2(X_1) + \hat{\alpha}_{30} P_3(X_1) + \hat{\alpha}_{40} P_4(X_1)$$
$$+ \hat{\alpha}_{01} P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{02} P_2(X_2) + \hat{\alpha}_{11} P_1(X_1) P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{21} P_2(X_1) P_1(X_2)$$
$$+ \hat{\alpha}_{31} P_3(X_1) P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{41} P_4(X_1) P_1(X_2) + \hat{\alpha}_{12} P_1(X_1) P_2(X_2)$$
$$+ \hat{\alpha}_{22} P_2(X_1) P_2(X_2) + \hat{\alpha}_{32} P_3(X_1) P_2(X_2) + \hat{\alpha}_{42} P_4(X_1) P_2(X_2)$$

$$Dengan : \hat{\alpha}_{ij} = \frac{\sum_{i,j} Y_{ij} P_i(X_{1i}) P_j(X_{2j})}{\sum_{i,j} \left[P_i(X_{1i}) P_j(X_{2j}) \right]^2}$$

$$P_0(X) = 1$$

$$P_1(X) = \lambda_1 \left[\frac{X - \overline{X}}{d} \right]$$

$$P_2(X) = \lambda_2 \left[\left(\frac{X - \overline{X}}{d} \right)^2 - \left(\frac{a^2 - 1}{12} \right) \right]$$

$$P_3(X) = \lambda_3 \left[\left(\frac{X - \overline{X}}{d} \right)^3 - \left(\frac{X - \overline{X}}{d} \right) \left(\frac{3a^2 - 7}{20} \right) \right]$$

$$P_4(X) = \lambda_4 \left[\left(\frac{X - \overline{X}}{d} \right)^4 - \left(\frac{X - \overline{X}}{d} \right)^2 \left(\frac{3a^2 - 13}{14} \right) + \frac{3(a^2 - 1)(a^2 - 9)}{560} \right]$$

Dalam hal ini : a = banyaknya taraf faktor

d = jarak antar taraf faktor

λ_i = ditentukan dalam tabel (lampiran 1).

3. CONTOH KASUS DENGAN APLIKASI SAS DAN MINITAB .

Suatu penelitian dilakukan untuk mengetahui pengaruh kadar pemupukan Nitrogen (N) dengan taraf faktor 20 ; 40 ; 60 ; 80 dan 100 kg/ha dan kadar P_2O_5 dengan taraf faktor 40 ; 60 dan 80 kg/ha terhadap produksi serat kenaf Hc 48 dikonversikan dalam ton/ha. Percobaan dilakukan pada tiga kelompok yang berbeda [3], diperoleh data sebagai berikut :

Kadar N	Kadar P	Kelompok		
		1	2	3
20	40	2.10	2.25	1.95
40	40	2.55	2.75	2.50
60	40	3.20	3.15	3.00
80	40	3.50	3.65	3.50
100	40	3.00	3.10	3.05
20	60	2.25	2.30	2.00
40	60	2.60	2.65	2.55
60	60	3.50	3.60	3.65
80	60	3.80	3.90	3.85
100	60	3.25	3.30	3.27
20	80	2.30	2.15	2.28
40	80	2.65	2.75	2.77
60	80	3.50	3.55	3.60
80	80	3.90	3.85	3.80
100	80	3.20	3.35	3.22

Dengan menggunakan paket program SAS 6.12 diperoleh, F hitung untuk kadar N adalah 555.92, kadar P adalah 41.17 dan interaksi kadar N*P adalah 4.23. Bila diambil α=1%, dapat disimpulkan :

- Ada pengaruh Kadar pemupukan N terhadap respon yang diamati.
- Ada pengaruh Kadar pemupukan P terhadap respon yang diamati
- Ada pengaruh interaksi antara kadar pemupukan N dan P terhadap respon yang diamati.

Berdasar uji kontras dengan taraf nyata 1% terlihat bahwa N linier, kuadratik, qubic nyata, P linier dan kuadratik nyata, untuk faktor interaksi tidak ada yang nyata, dengan paket program minitab 11.12 diperoleh persamaan regresi pendekatanya adalah :

```
Serat = 1.38 - 0.0490 N + 0.00181 N*2 -0.000012 N*3 +

        0.0342 P -0.000235 P*2
```

Dari persamaan regresi tersebut dengan menggunakan hitung differensial diperoleh bahwa N = 84.4306 dan P = 72.7659 merupakan ekstrem maksimum, dengan dugaan serat pada titik tersebut adalah 4.1674.

DAFTAR PUSTAKA

1. Mattjik, A. A, Ir.MSc.Ph.D dan Sumertajaya, I. M, Ir. Msi, *Perancangan Percobaan Dengan Aplikasi SAS dan Minitab*, Jilid 1, IPB Press Bogor. 2000.

2. Montgomery, D.C, *Design And Analysis of Experiments*, Third Edition, John Wiley and Sons Inc, Singapura, 1991.

3. Sastrosupadi, A.Dr.Ir.MS, *Rancangan Percobaan Praktis Bidang Pertanian*, Edisi Revisi, Penerbit Kanisius, Yogyakarta , 2000.

4. *SAS / STAT User's Guide*, Version 6, Fourth Edition, SAS Institute Inc. Cary, NC, USA, 1990, Vol. 1.

LAMPIRAN 1. KOEFISIEN DARI POLINOMIAL ORTHOGONAL

	N = 3		N = 4			N = 5			
X_j	P_1	P_2	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3	P_4
1	-1	1	-3	1	-1	-2	2	-1	1
2	0	-2	-1	-1	3	-1	-1	2	-4
3	1	1	1	-1	-3	0	-2	0	6
4			3	1	1	1	-1	-2	-4
5						2	2	1	1
$\Sigma\{P_i(X_j)\}^2$	2	6	20	4	20	10	14	10	70
λ	1	3	2	1	10/3	1	1	5/6	35/12

X_j	N = 6					N = 7					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	-5	5	-5	1	-1	-3	5	-1	3	-1	1
2	-3	-1	7	-3	5	-2	0	1	-7	4	-6
3	-1	-4	4	2	-10	-1	-3	1	1	-5	15
4	1	-4	-4	2	10	0	-4	0	6	0	-20
5	3	-1	-7	-3	-5	1	-3	-1	1	5	15
6	5	5	5	1	1	2	0	-1	-7	-4	-6
7						3	5	1	3	1	1
$\Sigma\{P_i(X_j)\}^2$	70	84	180	28	252	28	84	6	154	84	924
λ	2	3/2	5/3	7/12	27/10	1	1	1/6	7/12	7/20	27/60