

SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY

Beta Noranita
Program Studi Ilmu Komputer
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang Semarang
Email : beth2nice@yahoo.com

Abstract. Let $AU = V$ be fuzzy system of linear equations. The fuzzy system of linear equations consist of n variables and n equations. We rearrange the fuzzy system of linear equations became $2n$ variables and $2n$ equations. The new system was devoted by $BX^* = V^*$. In this paper, we show that solution of $BX^* = V^*$ can be used to find $AU = V$ fuzzy system of linear equations, whenever B^{-1} is non-negative.

Keywords: Fuzzy numbers, system of linear equations, and non-negative matrix.

1. PENDAHULUAN

Problem-problem di bidang rekayasa dan sains dapat dimodelkan menggunakan persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial. Pada umumnya, menentukan solusi eksak persamaan diferensial biasa/persamaan diferensial parsial tidak dapat ditemukan dengan mudah. Sistem persamaan linear (SPL) memegang peranan penting dalam menentukan solusi pendekatan persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial [5]. Oleh karenanya, peranan matriks untuk menentukan solusi pendekatan persamaan diferensial sangat besar. Pengertian sifat-sifat matriks yang digunakan dalam makalah ini merujuk pada [4] & [6].

Teori *fuzzy* dapat digunakan dalam bidang teori kontrol, teori keputusan, dan beberapa bagian dalam manajemen sains [3] & [7]. Bidang-bidang tersebut memerlukan sistem persamaan berbasis teori *fuzzy* sebagai model matematikanya. Friedman et. al. merumuskan lebih tegas mengenai solusi sistem linear *fuzzy*, khususnya daerah fisibel dari permasalahan sistem linear tersebut [1]. Lebih lanjut, bilangan *fuzzy* yang digunakan hanya bilangan *fuzzy* yang disusun oleh fungsi-fungsi linear.

Dalam makalah ini, notasi R menyatakan himpunan semua bilangan real. Bilangan *fuzzy* yang dimaksud adalah bilangan *fuzzy* yang disusun oleh fungsi dengan domain dan kodomainnya di R . Dalam makalah ini, dibuktikan syarat perlu dan cukup agar solusi sistem persamaan linear dapat digunakan menjadi solusi sistem persamaan linear *fuzzy*. Matriks koefisien dari sistem persamaan baru haruslah bersifat non-negatif.

2. BILANGAN FUZZY

Bilangan *fuzzy* u dalam R didefinisikan sebagai pasangan fungsi $(\underline{u}, \bar{u})$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- (a) fungsi $\underline{u}$ monoton naik, terbatas, dan kontinu kiri pada $[0, 1]$,
- (b) fungsi $\bar{u}$ monoton turun, terbatas, dan kontinu kanan pada $[0, 1]$, dan
- (c) $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$ untuk setiap r dalam $[0, 1]$.

Untuk definisi bentuk lain bilangan *fuzzy* dapat dilihat secara detail dalam [3] & [7]. Himpunan bilangan-bilangan *fuzzy* dinyatakan dengan F . Untuk selanjutnya, setiap bilangan *fuzzy* $u \in F$ ditulis dalam bentuk parameter $u = (\underline{u}, \bar{u})$.

Operasi aljabar bilangan *fuzzy* menggunakan definisi seperti dalam [1] & [2]. Untuk setiap $u, v \in F$ dan bilangan real α didefinisikan :

(d) $u = v$ jika dan hanya jika $\underline{u} = \underline{v}$ dan $\bar{u} = \bar{v}$.

(e) $u + v = (\underline{u} + \underline{v}, \bar{u} + \bar{v})$

(f) $\alpha u = (\alpha \underline{u}, \alpha \bar{u})$ untuk $\alpha \geq 0$

(g) $\alpha u = (\alpha \underline{u}, \alpha \bar{u})$ untuk $\alpha < 0$

3. SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY

Diberikan sistem persamaan linear n variabel dan n persamaan dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$Ax = y \quad (1)$$

dengan A matriks persegi yang entri-entriya bilangan real, dan x, y adalah vektor-vektor di dalam R^n . Metode-metode untuk menyelesaikan persamaan (1) dapat dilihat dalam [4] & [5].

Model permasalahan sistem persamaan linear fuzzy dijelaskan sebagai berikut :

Diberikan $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n \in F$ dan $a_{i,j} \in R$ untuk $1 \leq i, j \leq n$.

Sistem persamaan

$$\begin{aligned} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \dots + a_{1,n}u_n &= v_1 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \dots + a_{2,n}u_n &= v_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \dots + a_{n,n}u_n = v_n$$

dinamakan sistem persamaan linear fuzzy (SPL-fuzzy).

Sistem persamaan (2) dapat ditulis dalam

bentuk matriks $AU = V$ dengan $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$,

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Model sistem persamaan linear (2) mempunyai solusi fuzzy jika terdapat

vektor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ di dalam F^n sedemikian

sehingga $\sum_{k=1}^n \overline{a_{j,k}} x_k = \bar{v}_j$ dan

$\sum_{k=1}^n \underline{a_{j,k}} x_k = \underline{v}_j$, untuk setiap $j = 1, 2, \dots, n$.

Mengingat operasi aljabar pada bilangan fuzzy (aksioma (d)-(g)), fungsi-fungsi $\bar{v}_j$ dan $\underline{v}_j$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\bar{x}_j$ dan $\underline{x}_j$. Sistem persamaan (2) diubah ke bentuk (2n) variabel dan (2n) persamaan menjadi

$$BX^* = V^* \quad (3)$$

dengan $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,2n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & b_{2n,2} & \dots & b_{2n,2n} \end{bmatrix}$,

$X^* = [\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]^T$ dan

$V^* = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n]^T$.

Entri-entri $b_{i,j}$ ditentukan sebagai berikut:

- jika $a_{i,j} \geq 0$ maka $b_{i,j} = a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{i,j}$
- jika $a_{i,j} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{i,j}$
- $b_{i,j} = 0$ untuk lainnya.

Persamaan (3) bukan sistem persamaan linear fuzzy. Persamaan (3) merupakan persamaan linear biasa yang nilai variabelnya berada dalam ruang fungsi. Dengan menggunakan persamaan (3), dimungkinkan sistem persamaan linear fuzzy dapat diselesaikan melalui penyelesaian sistem persamaan linear biasa. Lebih lanjut, matriks B pada persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk matriks blok

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}, \text{ sehingga matriks koefisien}$$

A pada persamaan (2) adalah $A = B_1 - B_2$.

Contoh 1

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy*

$$x_1 - x_2 = v_1$$

$$x_1 + x_2 = v_2$$

Matriks A seperti dalam persamaan (2)

adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, matriks

B seperti dalam persamaan (3) adalah

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy*

$$x_1 - x_2 = v_1$$

$$x_1 + 3x_2 = v_2$$

Jika sistem persamaan ini diubah menjadi persamaan (3), maka

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &+ (-\bar{x}_2) &= \underline{v}_1 \\ \underline{x}_1 + 3\underline{x}_2 &&= \underline{v}_2 \\ \underline{x}_2 &+ (-\bar{x}_1) &= -\underline{v}_1 \\ (-\bar{x}_1) + 3(-\bar{x}_2) &= -\underline{v}_2 \end{aligned}$$

Teorema 1

Diberikan $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ adalah matriks

koefisien pada persamaan (3). Matriks B tak-singular jika dan hanya jika matriks-matriks $A = B_1 - B_2$ dan $B_1 + B_2$ keduanya tak-singular.

Bukti :

($\Rightarrow$) Dengan menggunakan operasi elementer baris/kolom pada matriks

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}, \quad \text{didapat matriks}$$

$$C = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & B_1 + B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}. \text{ Jika matriks } C$$

dikenai operasi elementer jumlahan dua

$$\text{kolom, didapat } D = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 - B_2 \end{bmatrix}.$$

Matriks C adalah matriks yang dihasilkan dari operasi elementer jumlahan dua baris/kolom dari matriks B . Sedangkan matriks D adalah matriks yang dihasilkan dari operasi elementer jumlahan dua baris/kolom dari matriks C .

Hal ini berakibat,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(C) = \det(D), \\ \text{sehingga } \det(B) &= \det(D) \\ &= \det(B_1 + B_2) \cdot \det(B_1 - B_2) \end{aligned}$$

Karena B tak-singular maka $\det(B) \neq 0$ dan $\det(B_1 + B_2) \cdot \det(B_1 - B_2) = \det(B) \neq 0$. Hal ini mengakibatkan $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan $\det(B_1 - B_2) \neq 0$. Jadi matriks $A = B_1 - B_2$ dan $B_1 + B_2$ keduanya tak-singular.

($\Leftarrow$) Diketahui matriks $A = B_1 - B_2$ dan $B_1 + B_2$ keduanya tak-singular. Jadi $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan $\det(B_1 - B_2) \neq 0$. Dengan cara serupa seperti pada bagian sebelumnya, didapat

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(C) = \det(D) \\ \text{dengan } C &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & B_1 + B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \\ D &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 - B_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hal ini berakibat

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(D) \\ &= \det(B_1 + B_2) \cdot \det(B_1 - B_2) \neq 0, \end{aligned}$$

karena nilai $\det(B_1 + B_2) \neq 0$ dan nilai $\det(B_1 - B_2) \neq 0$. Sehingga B adalah matriks tak-singular. Bukti selesai.

Teorema 2

Diberikan $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ adalah matriks

koefisien pada persamaan (3). Jika invers matriks B ada, maka inversnya berbentuk

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}.$$

Bukti :

Misalkan $b_{i,j}$ dan $b^*_{i,j}$ berturut-turut menyatakan entri matriks B dan B^{-1} pada baris ke- i dan kolom ke- j . Karena $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B)$, maka

$$b^*_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} \det(B_{j,i})}{\det(B)} \quad (4)$$

dengan $B_{j,i}$ sub matriks yang diperoleh dengan cara mengeliminasi baris ke- j dan kolom ke- i dari matriks B .

Perhatikan sub matriks $B_{j+n,i}$ dan $B_{j,i+n}$. Matriks $B_{j+n,i}$ dapat diperoleh melalui operasi elementer pertukaran baris dan kolom dari $B_{j,i+n}$ sebanyak p kali, dengan p bilangan genap. Oleh karenanya, $\det(B_{j+n,i}) = (-1)^p \det(B_{j,i+n}) = \det(B_{j,i+n})$. Dari persamaan (4) dan mengingat $\det(B_{j+n,i}) = \det(B_{j,i+n})$, maka

$$\begin{aligned} b^*_{i+n,j} &= \frac{(-1)^{i+n+j} \det(B_{j,i+n})}{\det(B)} \\ &= \frac{(-1)^{i+n+j} \det(B_{j+n,i})}{\det(B)} = b^*_{i,j+n} \end{aligned}$$

untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$. Sampai di sini, didapat $B^{-1} = \begin{bmatrix} * & N \\ N & * \end{bmatrix}$

Perhatikan juga sub matriks $B_{j,i}$ dan $B_{j+n,i+n}$, untuk $1 \leq i, j \leq n$.

Karena $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ maka $B_{j+n,i+n}$ dapat diperoleh menggunakan operasi elementer pertukaran baris dan kolom dari $B_{j,i}$ sebanyak q kali, dengan q bilangan genap. Oleh karenanya,

$$\begin{aligned} \det(B_{j,i}) &= (-1)^q \det(B_{j+n,i+n}) \\ &= \det(B_{j+n,i+n}). \end{aligned}$$

Hal ini berakibat

$$\begin{aligned} b^*_{i,j} &= \frac{(-1)^{i+j} \det(B_{j,i})}{\det(B)} \\ &= \frac{(-1)^{i+j} (-1)^{2n} \det(B_{j+n,i+n})}{\det(B)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{(i+n)+(j+n)} \det(B_{j+n,i+n})}{\det(B)}$$

$$= b^*_{i+n,j+n}$$

untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$.

$$\text{Terbukti bahwa } B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}.$$

Persamaan (3) merupakan perubahan bentuk dari sistem persamaan linear *fuzzy*. Walaupun persamaan (3) mempunyai solusi tunggal, tidak berarti sistem persamaan linear *fuzzy* langsung dipeperoleh solusinya. Jika B dalam (3) tak-singular, tidak ada jaminan bahwa $X = B^{-1}V \in F$, untuk setiap $V \in F$. Contoh berikut memperlihatkan bahwa persamaan (3) mempunyai solusi tunggal tetapi permasalahan SPL-*fuzzy* tidak mempunyai solusi tunggal.

Contoh 3

Diberikan permasalahan SPL-*fuzzy*

$$x_1 + x_2 - x_3 = (r, 2 - r)$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = (2 + r, 3)$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = (-2, -1 - r)$$

Jika diubah dalam bentuk persamaan (3), maka diperoleh matriks-matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} r \\ 2 + r \\ -2 \\ r - 2 \\ -3 \\ 1 + r \end{bmatrix}.$$

$$\text{dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ mempunyai}$$

invers, sehingga solusi (penyelesaian)

persamaan (3) adalah

$$\begin{aligned} X &= [-2.31 + 3.62r, -0.62 - 0.77r, 1.08 - 2.15r, \\ &\quad -4.69 + 3.38r, 1.62 - 0.32r, 2.92 - 1.85r]^T \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} x_1 &= [-2.31 + 3.62r, 4.69 - 3.38r]^T, \\ x_2 &= [-0.62 - 0.77r, -1.62 + 0.23r]^T \quad \text{dan} \\ x_3 &= [1.08 - 2.15r, -2.92 + 1.85r]^T. \end{aligned}$$

Vektor (x_1, x_2, x_3) bukan solusi SPL-fuzzy ini, karena x_1 dan x_2 bukan bilangan fuzzy.

Teorema berikut memperlihatkan syarat cukup dan syarat perlu agar solusi persamaan (3) juga menjadi solusi untuk SPL fuzzy semula. Sebelumnya, didefinisikan pengertian sifat ketak-negatifan yang dimiliki suatu matriks.

Matriks $Q = [q_{i,j}]$ dikatakan non-negatif jika untuk setiap i dan setiap j berlaku $q_{i,j} \geq 0$ [4] & [6]. Sebagai contoh, matriks koefisien pada persamaan (3) di atas adalah matriks non-negatif.

Toerema 3

Diberikan SPL-fuzzy $AU = V$ dengan n variable dan n persamaan. Persamaan $BX^* = V^*$ seperti persamaan (3), dengan B non-singular. Solusi $BX^* = V^*$ menjadi solusi SPL-fuzzy $AU = V$ jika dan hanya jika matriks B^{-1} non-negatif.

Bukti :

($\Rightarrow$) Misalkan $B^{-1} = [b^*_{i,j}]$ dan

$$X^* = [x_1, \dots, x_n, -x_1, \dots, -x_n]^T.$$

Karena $X^* = B^{-1}V^*$, maka diperoleh

$$\underline{x}_i = \sum_{j=1}^n b^*_{i,j} \underline{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} \bar{v}_i \quad (5)$$

$$-\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n b^*_{i+n,j} \underline{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i+n,j+n} \bar{v}_i \quad (6)$$

untuk $1 \leq i, j \leq n$.

Selanjutnya karena $B^{-1} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & M \end{bmatrix}$ maka persamaan (6) menjadi

$$-\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} \underline{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i,j} \bar{v}_i, \quad \text{sehingga}$$

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n b^*_{i,j} \bar{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} \underline{v}_i \quad (7)$$

Jika persamaan (7) dikurangi dengan persamaan (5), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{x}_i - \underline{x}_i &= \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j} \bar{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} \underline{v}_i \right) \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j} \underline{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} \bar{v}_i \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j} \bar{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i,j} \underline{v}_i \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} \bar{v}_i - \sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} \underline{v}_i \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j} (\bar{v}_i - \underline{v}_i) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} (\bar{v}_i - \underline{v}_i) \right) \quad (8) \end{aligned}$$

Diketahui $V \in F^n$ maka $v_1, v_2, \dots, v_n \in F$, sehingga $(\bar{v}_i - \underline{v}_i) \geq 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

Diketahui pula bahwa $\bar{x}_i - \underline{x}_i \geq 0$. Hal ini berakibat $b^*_{i,j} \geq 0$ untuk setiap i dan j . Dengan kata lain matriks $B^{-1} = [b^*_{i,j}]$ non-negatif.

($\Leftarrow$) Misalkan $B^{-1} = [b^*_{i,j}]$ matriks non-negatif. Jadi $b^*_{i,j} \geq 0$ untuk setiap i dan j . Dengan cara yang serupa seperti pada bagian sebelumnya, didapat persamaan (8)

$$\begin{aligned} \bar{x}_i - \underline{x}_i &= \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j} (\bar{v}_i - \underline{v}_i) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} (\bar{v}_i - \underline{v}_i) \right). \end{aligned}$$

Diketahui pula

$$V^* = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, -\bar{v}_1, \dots, -\bar{v}_n]^T$$

solusi persamaan (3) dan $v_1, v_2, \dots, v_n \in F$,

maka $(\bar{v}_i - \underline{v}_i) \geq 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \bar{x}_i - \underline{x}_i &= \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j} (\bar{v}_i - \underline{v}_i) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n b^*_{i,j+n} (\bar{v}_i - \underline{v}_i) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

untuk $1 \leq i \leq n$.

Sehingga $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$ atau $[x_1, x_2, \dots, x_n] \in F^n$. Dengan demikian, solusi ini menjadi solusi sistem persamaan linear *fuzzy*. Bukti selesai.

Dalam contoh 3, matriks B adalah matriks non-negatif. Tetapi invers matriks B, yakni B^{-1} adalah

$$\begin{bmatrix} 27692 & -0.8462 & -0.4615 & 22308 & -1.1538 & -0.5385 \\ -0.4615 & 0.3077 & 0.0769 & -0.5385 & 0.6923 & -0.0769 \\ -1.6923 & 0.4615 & 0.6154 & -1.3077 & 0.5385 & 0.3846 \\ 22308 & -1.1538 & -0.5385 & 27692 & -0.8462 & -0.4615 \\ -0.5385 & 0.6923 & -0.0769 & -0.4615 & 0.3077 & 0.0769 \\ -1.3077 & 0.5385 & 0.3846 & -1.6923 & 0.4615 & 0.6154 \end{bmatrix}$$

jelas bukan matriks non-negatif. Sebab terdapat entri matriks B^{-1} yang bernilai negatif. Mengingat teorema 3, solusi persamaan linearnya tidak langsung menjadi solusi persamaan linear *fuzzy*.

4. KESIMPULAN

Sistem persamaan linear *fuzzy* (SPL-*fuzzy*) dapat diubah menjadi bentuk sistem persamaan linear biasa. Dari sistem n variabel dan n persamaan diubah menjadi sistem $2n$ variabel dan $2n$ persamaan. Solusi sistem persamaan baru, tidak secara langsung menjadi solusi sistem persamaan semula. Contoh 3 memperlihatkan bahwa solusi sistem persamaan baru, tidak menjadi sistem persamaan semula. Jika matriks koefisien dari sistem persamaan bersifat non-negatif, maka solusinya menjadi sistem persamaan semula. Hal ini ditulis dalam Teorema 2.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Friedman, M, Ma Ming, and A Kandel, (1998), *Fuzzy linear system*, Fuzzy Set and System, No. 96, 201-209.
 - [2]. Kajani, M.T., Asady, B., and Vencheh, A.H., (2005), *An Iterative Method for Solving Dual Fuzzy Nonlinear Equations*, AMC, No. 167, 316-323.
 - [3]. Kwang F Lee, (2005), *First course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, Germany.
 - [4]. Lukeplod, H., (1996), *Handbook of Matrices*, John Wiley & Sons, England.
 - [5]. Saad, Y., (1996), *Iterative Methods for Sparse Linear System*, PWS Publishing Company, a Division of International Thomson Publishing Inc., VSA.
 - [6]. Sire, D., (2002), *Matrices : Theory and Applications*, Springer, Germany
 - [7]. Sivanandam, S.N., Sumanthi, S., and Deepa, S.N., (2007), *Introduction to Fuzzy Logic using Matlab*, Springer, Berlin-Germany.
-