

PENGENDALI LPV POLYTOPIC UNTUK SISTEM DENGAN PARAMETER BERUBAH-UBAH

Widowati

Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275
wiwied_mathundip@yahoo.com

Abstract: This paper proposes a polytopic LPV controller design for air craft lateral-directional dynamics. The state space matrices of the plant and the controller are represented by using polytopic linear parameter varying model. A controller synthesis is derived by an approach linear matrix inequalities evaluated at the 32 vertices of the polytopic model. From the simulation results, it can be show that a polytopic LPV controller can maintain the closed loop systems stability and performance.

Kata kunci: polytopic LPV controller, convex combination, robust stability, performance

1. PENDAHULUAN

Beberapa tahun terakhir ini, teknik-teknik kendali kokoh berkembang pesat. Dalam rekayasa sistem, akan semakin banyak dibutuhkan sistem pengendalian yang dapat menangani suatu pekerjaan dengan lebih afektif dan efisien. Perancangan sistem kendali dalam metode klasik terbatas pada anggapan bahwa sistem yang akan dikendalikan adalah linear dan tetap. Padahal sebenarnya sering dijumpai sistem yang berubah terhadap waktu dan sistem dengan parameter berubah-ubah (*Linear Parameter Varying (LPV)*). Perubahan parameter plant (obyek yang dikendalikan) umumnya besar, sehingga penggunaan pengendali linear dengan parameter tetap saja tidak akan cukup menghasilkan stabilitas dan kinerja yang diharapkan. Oleh karena itu, sangat diperlukan suatu perancangan pengendali untuk sistem linear dengan parameter berubah-ubah, yang dapat menangani perubahan parameter secara kontinu. Pengendali LPV yang dinyatakan sebagai fungsi dari parameter telah diteliti sebagai pengendali yang dapat menstabilkan plant dengan parameter yang berubah-ubah [2, 5, 6].

Di dalam artikel ini, kami melakukan sintesis (perancangan secara matematik) pengendali LPV dan mengaplika-

sikannya pada pesawat terbang untuk pengendalian gerak lateral-direksional. Variasi dari dinamika pesawat terbang yang dikaji disini, diakibatkan oleh perubahan kecepatan dan posisi *dflap* pesawat. Plant dan pengendali direpresentasikan dalam bentuk sistem LPV *polytopic*. Perancangan pengendali diturunkan dengan menyelesaikan pertidaksamaan matriks linear yang dievaluasi pada 32 verteks.

2. SISTEM LPV POLYTOPIC

Berikut ini dibahas sistem dengan parameter berubah-ubah model *polytopic*. Pandang himpunan lintasan parameter *feasible*:

$$\mathfrak{S}_\rho = \{ \rho_{i_{min}} \leq \rho_i \leq \rho_{i_{max}}, \\ \dot{\rho}_{i_{min}} \leq \dot{\rho}_i \leq \dot{\rho}_{i_{max}}, \forall i \}$$

yang menjadi sub himpunan dari

$$\mathfrak{S} = \{ \rho(t) \mid R \rightarrow R^s, \rho_i(t) \in C^1, \forall i \}.$$

Sistem LPV dapat direpresentasikan dalam persamaan ruang keadaan kontinu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t), \\ y(t) &= C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t), \\ \rho(t) &\in \mathfrak{S}_\rho, \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan $x(t)$ adalah vektor keadaan, $y(t)$ adalah vektor keluaran, $u(t)$ adalah vektor masukan, $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^{n_y}$, $u(t) \in R^{n_u}$,

$$A: R^s \rightarrow R^{n \times n}, B: R^s \rightarrow R^{n \times n_u}, C: R^s \rightarrow R^{n_y \times n},$$

$$D: R^s \rightarrow R^{n_y \times n_u}.$$

A, B, C, D diasumsikan sebagai fungsi kontinu dari vektor parameter $\rho(t)$.

Matriks polytop didefinisikan [2] sebagai konveks hull dari sejumlah berhingga matriks-matriks N_i dengan dimensi sama yaitu

$$C_o \{N_i | i = 1, 2, \dots, r\} =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) N_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) = 1 \right\}$$

Bila vektor parameter $\rho(t)$ diambil nilainya didalam box dari R^s dengan sudut-sudut $\{\rho_{v_i}\}_{i=1}^r$ ($r = 2^s$), dengan kata lain, $\rho(t)$ nilainya berada didalam polytop Θ dengan verteks-verteks $\rho_{v_1}, \rho_{v_2}, \dots, \rho_{v_r}$, maka dapat ditulis

$$\rho(t) \in \Theta = C_o \{\rho_{v_1}, \rho_{v_2}, \dots, \rho_{v_r}\} \forall t \geq 0.$$

Sistem LPV disebut *polytopic* bila dapat direpresentasikan oleh matriks ruang keadaan $A(\rho(t))$, $B(\rho(t))$, $C(\rho(t))$, dan $D(\rho(t))$ dengan vektor parameter bervariasi didalam suatu polytop tetap dan ketergantungan dari $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, dan $D(\cdot)$ pada ρ adalah *affine*. Jadi matriks ruang keadaan dari sistem LPV polytopic dapat direpresentasikan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B(\rho(t)) \\ C(\rho(t)) & D(\rho(t)) \end{bmatrix} \in$$

$$C_o \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, r \right\} =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) = 1 \right\}$$

Penulisan di atas dapat diartikan bahwa

$$\begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B(\rho(t)) \\ C(\rho(t)) & D(\rho(t)) \end{bmatrix} \text{ adalah kombinasi}$$

konveks dari matriks-matriks sistem

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, r.$$

Sistem LPV (2.1) dengan trayektori parameter $\rho(t)$ akan stabil internal dan mempunyai penguatan L_2 yang dibatasi oleh $\gamma, \gamma > 0$ [1, 4, 7] jika dan hanya jika ada matriks simetrik $P(\rho(t)) > 0$ dan

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(\rho(t)) + A(\rho(t))^T P(\rho(t)) + P(\rho(t)) A(\rho(t)) & & & & \\ & B(\rho(t))^T P(\rho(t)) & & & \\ & & C(\rho(t)) & & \\ & P(\rho(t)) B(\rho(t)) & C(\rho(t))^T & & \\ & -\gamma I & & D(\rho(t))^T & \\ & & & & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.2)$$

yang berlaku untuk semua nilai yang diperkenankan dari vektor parameter $\rho(t)$ dan $\dot{\rho}(t)$. Dalam hal ini, fungsi kuadratik Lyapunov $V(x(t), \rho(t)) = x(t)^T P(\rho(t)) x(t)$ membangun kestabilan dan keterbatasan $\|y\|_2 < \gamma \|u\|_2$ untuk semua input (u) yang terbatas dalam norm- L_2 dan semua trayektori $\rho(t)$ (dengan mengambil $x(0)=0$).

3. PERANCANGAN PENGENDALI LPV POLYTOPIC

Pada bagian ini dikemukakan suatu proses perancangan secara matematik (*synthesis*) pengendali LPV *polytopic*, yang diperoleh dengan menyelesaikan pertidaksamaan matriks linear. Selanjutnya, untuk menyederhanakan penulisan, ketergantungan variabel dan data ruang keadaan terhadap $\rho(t)$ tidak ditulis. Misalnya $A(\rho(t))$ ditulis A saja.

Untuk keperluan perancangan pengendali, sistem LPV (2.1) diperumum menjadi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t),$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t),$$

$$y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t), \quad (3.1)$$

dengan w : input dari luar, u : input kendali, y : output yang diukur, dan z : output yang dikendalikan. Plant LPV yang diperumum dapat ditulis dalam model *polytopic* sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \in \Theta$$

$$= C_o \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, r \right\}, r$$

adalah banyaknya verteks dari *polytop*.

Selanjutnya akan dirancang pengendali LPV *polytopic* dengan persamaan ruang keadaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_k x(t) + B_k y(t), \\ u(t) &= C_k x(t) + D_k y(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sedemikian sehingga sistem lup tertutup stabil sepanjang lintasan parameter dan norm L_2 dari sistem lup tertutup kurang dari $\gamma, (\gamma > 0)$ untuk setiap parameter yang berada di daerah politop Θ .

Teorema 3.1. [1] Pandang plant LPV yang diperumum (3.1) dengan parameter trayektori ρ . Terdapat pengendali output feedback yang membangun stabilitas dan norm L_2 dari sistem lup tertutup kurang dari $\gamma, (\gamma > 0)$, jika dan hanya jika terdapat sepasang matriks (X, Y) simetri tergantung parameter dan 4 pasang matriks tergantung parameter dari data ruang data keadaan $(\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{D}_k)$, sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + XA + \bar{B}_k C_2 + (*) & * \\ \bar{A}_k^T & -\dot{Y} + AY + B_2 \bar{C}_k + (*) \\ (XB_1 + \bar{B}_k D_{21})^T & (B_1 + B_2 \bar{D}_k D_{21})^T \\ C_1 + D_{12} \bar{D}_k C_2 & C_1 Y + D_{21} \bar{C}_k \\ * & * \\ * & * \\ -\mathcal{M} & * \\ D_{11} + D_{12} \bar{D}_k D_{21} & -\mathcal{M} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0. \quad (3.4)$$

Tanda * menyatakan diinduksi oleh simetri.

Contoh.

$$\begin{bmatrix} M+N+(*) & * \\ Q & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M+M^T+N+N^T & Q^T \\ Q & P \end{bmatrix}$$

pengendali LPV *polytopic* diperoleh dengan menggunakan prosedur perancangan seperti di bawah ini.

- i. Menyelesaikan pertidaksamaan matriks linear (3.3) dan (3.4) pada Teorema 3.1. sehingga diperoleh matriks simetri X dan Y .
- ii. Menentukan matriks N dan M dari persamaan: $I - XY = NM^T$.
- iii. Menentukan A_k, B_k, C_k, D_k melalui persamaan:

$$\begin{aligned} A_k &= N^{-1} (XY + NM^T + \bar{A}_k - \\ &\quad (A + B_2 \bar{D}_k C_2)^T - X(A - \\ &\quad B_2 \bar{D}_k C_2)Y - \bar{B}_k C_2 Y - \\ &\quad XB_2 \bar{C}_k)M^{-T}, \\ B_k &= N^{-1} (\bar{B}_k - XB_2 \bar{D}_k), \\ C_k &= (\bar{C}_k - \bar{D}_k C_2 Y)M^{-T}, \\ D_k &= \bar{D}_k. \end{aligned}$$

Pengukuran data parameter $\dot{\rho}$ secara praktik sangat sulit diperoleh karena belum adanya sensor yang dapat mengukurnya dengan baik selama operasi sistem. Oleh karena itu, digunakan metode kebebasan X dan Y [1] untuk menghilangkan ketergantungan fungsi terhadap $\dot{\rho}$. Dengan menggunakan metode tersebut, pada artikel ini adalah dengan mengasumsikan parameter ρ dapat berubah cepat sekali, atau $\dot{\rho}$ tak terbatas (*unbounded rate*) parameter sehingga persamaan (3.3) dan A_k pada prosedur No. iii di atas, menjadi:

$$\begin{bmatrix} XA + \bar{B}_k C_2 + (*) & * \\ \bar{A}_k^T & AY + B_2 \bar{C}_k + (*) \\ (XB_1 + \bar{B}_k D_{21})^T & (B_1 + B_2 \bar{D}_k D_{21})^T \\ C_1 + D_{12} \bar{D}_k C_2 & C_1 Y + D_{21} \bar{C}_k \\ * & * \\ * & * \\ -\mathcal{M} & * \\ D_{11} + D_{12} \bar{D}_k D_{21} & -\mathcal{M} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.5)$$

$$A_k = N^{-1}(\bar{A}_k - (A + B_2 \bar{D}_k C_2)^T - X(A - B_2 \bar{D}_k C_2)Y - \bar{B}_k C_2 Y - X B_2 \bar{C}_k) M^{-T}.$$

Untuk sistem LPV *polytopic*, pertidaksamaan (3.5) dan prosedur di atas diselesaikan di setiap verteks dari politop, sehingga diperoleh pengendali LPV *polytopic*

$$\begin{bmatrix} A_k(\rho(t)) & B_k(\rho(t)) \\ C_k(\rho(t)) & D_k(\rho(t)) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \begin{bmatrix} A_{ki} & B_{ki} \\ C_{ki} & D_{ki} \end{bmatrix}, \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1,$$

yang menstabilkan sistem lup tertutup dan norm L_2 dari sistem lup tertutup kurang dari γ , ($\gamma > 0$) untuk semua parameter yang berada di daerah polytop Θ .

4. HASIL SIMULASI

Berikut ini diberikan aplikasi pengendali LPV *polytopic* untuk pengendalian gerak lateral-direksional pesawat terbang. Persamaan dinamik dari gerak lateral-direksional model nominal pesawat terbang [3] dapat direpresentasikan dalam sistem LPV sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho(t))x(t) + B(\rho(t))u(t), \\ y(t) &= C(\rho(t))x(t) + D(\rho(t))u(t), \end{aligned}$$

dengan variabel keadaan (x): kecepatan lateral, *roll rate*, *yaw rate*, sudut roll, dan sudut *azimut*; vektor masukan (u): *defleksi aileron*, *defleksi rudder* vektor keluaran (y): sudut *side slipe*, kecepatan sudut guling (*roll rate*), kecepatan sudut geleng (*yaw rate*), sudut guling, dan sudut *azimut*, dan akselerasi lateral. Tujuan dari perancangan pengendali adalah untuk memenuhi kriteria berikut.

Spesifikasi dalam domain frekuensi

- Sistem lup tertutup mempunyai lebar pita 10 rad/sec.
- Sistem lup tertutup mempunyai sensitivitas rendah pada frekuensi ≤ 8 rad/sec.
- Pada daerah frekuensi tinggi, derau pengukuran diredam sekitar 2 dB.

Spesifikasi dalam domain waktu

- Toleransi galat kondisi tunak maksi-

imum 7 %, overshoot ≤ 10 % dan waktu transient antara 4-8 seconds.

- Magnitudo sinyal kendali tidak melebihi batas saturasi aktuator, terutama posisi dan laju perubahan putaran aktuator
- Respon sistem terhadap komando memenuhi kualitas terbang level 1.

Secara umum, variabel keluaran yang akan diatur meliputi level sinyal aktuator dan sinyal-sinyal yang berhubungan dengan variabel kinerja. Variabel sinyal aktuator yang akan dikaji adalah laju perubahan serta posisi putaran aktuator yang menggerakkan *aileron* dan *rudder*. Data fisik kedua aktuator pada pesawat terbang diberikan pada Tabel 4.2. (sumber: dokumen TN-2/X1100/09/93) [3].

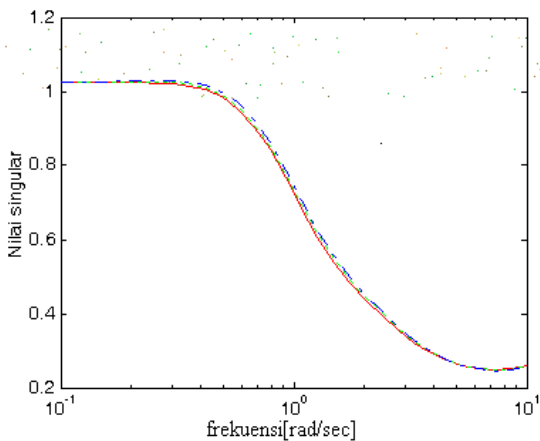
Table 2. Defleksi dan laju perubahan maksimum aktuator

	Defleksi maksimum	Laju perubahan maksimum
Aileron	± 22 deg	50 deg/sec
Rudder	± 20 deg	37 deg/sec

Dalam rangka memenuhi kriteria di atas, digunakan fungsi bobot. Fungsi bobot tersebut dikombinasikan dengan model nominal dan diperoleh plant yang diperumum berorde 20 dengan output yang dikendalikan adalah posisi *aileron*, posisi *rudder*, laju perubahan *aileron*, laju perubahan *rudder*, galat *side slipe*, dan galat *yaw-rate*. Plant berorde 20 tersebut tidak stabil. Selanjutnya untuk memperoleh matriks ruang keadaan yang tergantung secara affine pada parameter, dipilih elemen-elemen dari matriks A yang berubah secara signifikan apabila kecepatan dan *dflap* sebagai kondisi dari operasi penerbangan. Diperoleh elemen-elemen matriks $A(2,1)$, $A(2,2)$, $A(3,1)$, $A(3,2)$, $A(3,3)$ yang paling berpengaruh terhadap perubahan kecepatan dan posisi *dflap* sebagai kondisi dari operasi penerbangan. Dari sini berarti ada 5 parameter yaitu $\rho_1 = A(2,1)$, $\rho_2 = A(2,2)$, $\rho_3 = A(3,1)$, $\rho_4 = A(3,2)$, $\rho_5 = A(3,3)$ yang masing-masing terbatas. Sehingga jumlah verteks dari polytop adalah $2^5 = 32$.

Pada keadaan landing, data nominal pesawat terbang adalah kecepatan bervariasi dari 90-150 knots, $dflap$: 40 deg, pusat gravitasi: 26,7 cg, masa pesawat terbang: 20267,5 kg, ketinggian: 1250 feet. Kemudian dengan menggunakan prosedur seperti pada bagian 3 dan dengan menggunakan program MATLAB khususnya LMI Lab, dirancang pengendali LPV *polytopic* yang dievaluasi di 32 verteks. Dari hasil perancangan diperoleh berorde 20 dengan γ optimal sebesar 50,0004 yang merupakan nilai penguatan maksimum dari perbandingan antara output yang dikendalikan dan input dari luar sistem lup tertutup.

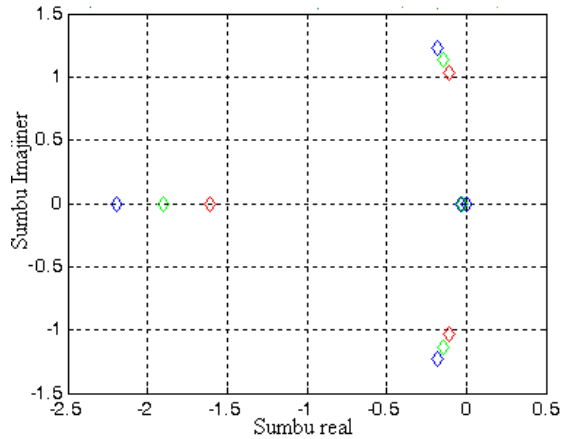
Respon frekuensi untuk *frozen* parameter dari sistem lup tertutup diberikan pada Gambar 1. Dari gambar tersebut terlihat bahwa lebar pita ± 10 rad/sec. Nilai singular yang tinggi pada



Gambar 1. Respon frekuensi dari sistem LPV lup tertutup untuk frozen parameter.

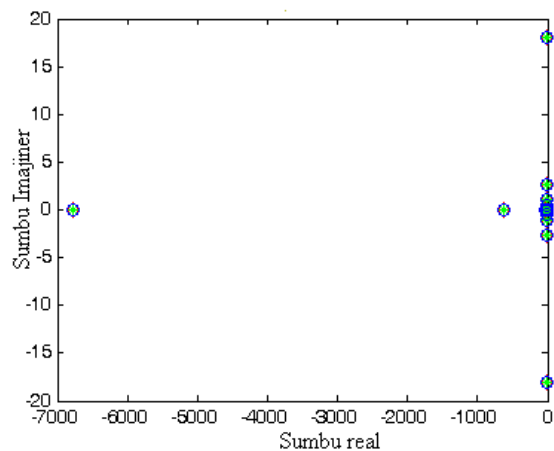
frekuensi rendah menyatakan bahwa sistem memiliki sensitivitas rendah atau penguatan tinggi pada frekuensi rendah. Sedangkan nilai singular yang rendah pada frekuensi tinggi menyatakan bahwa penguatan sistem pada daerah tersebut rendah sehingga gangguan dari derau pengukuran dapat diredam sekitar 2 dB. Ini berarti kriteria perancangan pengendali terpenuhi. Lokasi dari pole-pole sistem nominal dan lup tertutup untuk *frozen* parameter pada saat diambil kecepatan 90, 110, 130 knots diberikan pada Gambar 2 dan

Gambar 3. Pada Gambar 2 terlihat bahwa terdapat pole yang terletak di sebelah kanan sumbu imajiner (terdapat pole yang bagian realnya positif yaitu bernilai $4,438 \times 10^{-16}$).



Gambar 2. Letak pole-pole sistem nominal pesawat pada frozen parameter

Pada Gambar 3 letak pole-pole pada kecepatan 90, 110, 130 knots berimpit dan semuanya terletak disebelah kiri sumbu sumbu imajiner (semua bagian real dari pole adalah negatif), ini berarti untuk *frozen* parameter sistem lup tertutup stabil. Koefisien redaman minimum dan frekuensi osilasi dari sistem lup tertutup untuk *frozen* parameter dengan kecepatan 90, 120, 140 knots dan $dflaps$ 40 derajat diberikan pada Tabel 2.



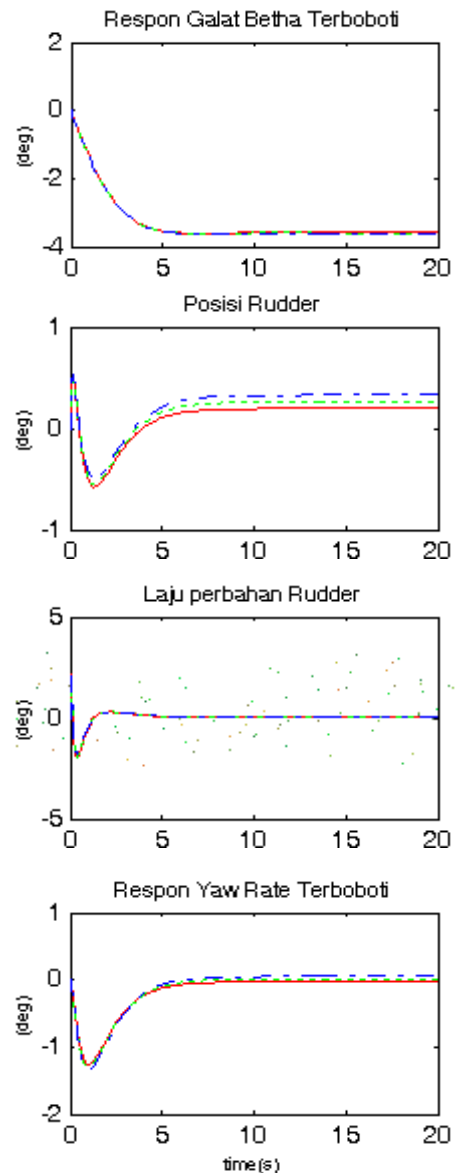
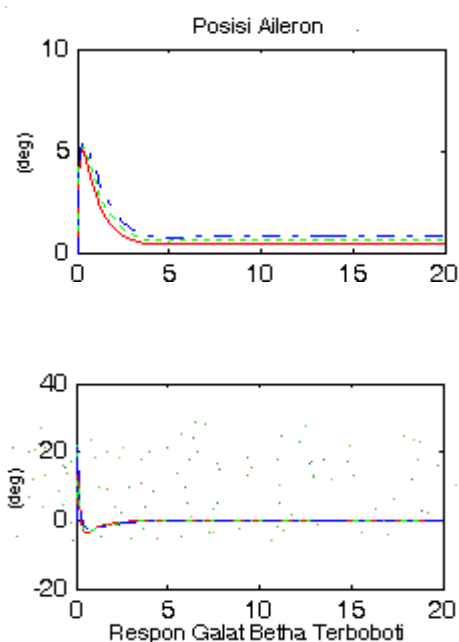
Gambar 3. Letak pole-pole sistem lup tertutup untuk frozen parameter.

Tabel 2. Koefisien redaman minimum dan frekuensi osilasi dari sistem lup tertutup

V (knots)	Real	Imajiner	Frekuensi	Damping
90	-2.3	-2.6	3.4	0.7
110	-2.4	-2.6	3.6	0.7
130	-2.5	-2.7	3.7	0.7

Dari data diatas diketahui bahwa telah terjadi pergeseran lokasi pole minimum sejauh 0.7 ke arah kiri sumbu real sehingga sistem lup tertutup memiliki redaman dan frekuensi osilasi lebih baik dari pada model nominal. Ini berarti sesuai dengan kriteria kualitas terbang.

Kinerja pengendali gain scheduling yang dapat dilihat dari respon waktu sistem lup tertutup apabila diberi input gangguan berupa sinyal step dan komando pilot side-slope 3 deg untuk frozen parameter di berikan pada Gambar 4. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa posisi dan laju perubahan dari *aileron* dan *rudder* masih di bawah batas saturasi aktuator. Dari gambar ini juga terlihat bahwa sistem lup tertutup dapat distabilkan dalam waktu sekitar 8 detik meskipun kecepatan dari pesawat diubah-ubah. Dari hasil-hasil diatas berarti kriteria perancangan dipenuhi.



Gambar 4. Respon step dari sistem LPV lup tertutup untuk *frozen* parameter (_ : V=90 knots, ...: V= 110 knots, -.-: V= 130 knots).

5. KESIMPULAN

Dalam artikel ini telah dibahas perancangan pengendali gain scheduling dari sistem LPV model *polytopic*. Dari hasil simulasi *gain scheduling* diperoleh bahwa pengendali yang dirancang mampu mempertahankan kekokohan stabilitas dan kinerja sistem selama beroperasi walaupun mendapat gangguan dari luar dalam variasi parameter yang diberikan. Kualitas kinerja

sistem lup tertutup untuk frozen parameter adalah baik dalam arti sistem mempunyai faktor redaman diatas 0.7 dan frekuensi natural yang kecil.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Apkarian, P. and R. J. Adam. (1997), *Advanced Gain Scheduling Techniques for Uncertain System*, AACC.
 - [2]. Apkarian, P., J. M. Biannie and P. Gahinet. (1995), *Self Scheduled Control of Missile via Linear Matrix Inequalities*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **18**(3): 532-538.
 - [3]. Bambang, R. T. (1999), *Self Scheduled H_{∞} Control Design for N250 Aircraft*
 - [4]. *Dynamics based on Polytopic LPV Model*, *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Application*, Banff, Canada.
 - [5]. Becker, G. and A. Packard. (1994), *Robust performance of Linear Parametrically Varying Systems Using Parametrically-Dependent Linear Feedback*, System and Control Letters, **23**: 205-215.
 - [6]. Biannic, J. M. and P. Apkarian. (1997), *Parameter Varying Control of a High Performance Aircraft*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, **20** (2).
 - [7]. Ghaoui, L. E. and S. Niculescu. (2000), *Advanced in Linear Matrix Inequality Method in Control*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 209-228.
 - [8]. Wu, F., et. al. (1996), *Induced L2-Norm Control for LPV System with Bounded Variation Rates*, Int. Journal of Robust Control and Non Linear, **6**(9-10): 983-998.
-