MODEL REDUKSI PADA PARAMETER MARKOV

Farikhin
Program Studi Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, S.H Semarang 50275
email : farikhin2@yahoo.com

Abstract. As well known that the model reduction for large-scale linear dynamical systems based on Krylov subspace is called moments matching. In this method, one or more interpolation points is needed to construct a certain Krylov subspace. In this paper, we propose the proof of theorem for moment matching at Markov parameter using the theorem which is obtained from standard block Arnoldi algorithm.

Keywords: Block Krylov subspace, Block Arnoldi Algorithm, and moment matching.

1. PENDAHULUAN

Diberikan sistem dinamik linear

$$\begin{aligned} \frac{(\ )}{} &= \quad (\ ) + \quad (\ ), \\ (\ ) &= \quad (\ ), \end{aligned} \qquad (1)$$

dengan syarat awal $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Dalam makalah ini, $\mathbf{E} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, dan $\mathbf{C} \in \mathrm{R}^{q\times n}$ menyatakan matriks sistem (1), $\mathrm{x} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ fungsi keadaan, $\mathrm{u} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^p$ fungsi input, and $\mathrm{y} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^q$ fungsi output. Bilangan disebut **order** persamaan (1). Untuk selanjutnya, notasi $(\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ digunakan untuk menyatakan persamaan (1). Persamaan (1) banyak digunakan sebagai model matematika untuk rekayasa *Integrated Circuit* (IC), prediksi cuaca, pengendalian kualitas udara, sistem molukuler, sistem akuistik, bifurkasi reaktor kimia, dan pendinginan dalam industri baja ([1], [3]). Jika transformasi Laplace dikenakan pada persamaan (1), diperoleh

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = G(s)\ \hat{\mathbf{u}}(s),$$

dengan $\hat{\mathbf{x}}(s)$, $\hat{\mathbf{y}}(s)$, dan $\hat{\mathbf{u}}(s)$ masing-masing menyatakan transformasi Laplace untuk $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, dan $G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. Fungsi $G(s)$ dapat ditulis dalam bentuk deret di sekitar titik $s = s_0$,

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}_k \left(s_0 - s\right)^k,$$

dengan $\mathbf{M}_k = \mathbf{C}\left((s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}\right)^k (s_0\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ untuk $k = 0,1,2,3,\ldots$. Matriks $\mathbf{M}_k$ disebut **momen ke-k** untuk persamaan (1) dan $s = s_0$ disebut **titik interpolasi**. Selanjutnya, momen ke-k di **parameter Markov** didefinisikan sebagai ekspansi $G(s)$ di $s \to \infty$ dan

$$\mathbf{M}_{\infty,k} = \mathbf{C}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}, \qquad (2)$$

untuk $k = 1,2,3,\ldots$.

Model reduksi adalah suatu model yang menghampiri persamaan (1) dengan persamaan $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ yang ordernya $r < n$ sedemikian hingga sifat-sifat penting yang berlaku dalam persamaan (1), juga akan berlaku dalam $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$. Persamaan $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ dapat dicari menggunakan konsep proyeksi. Konstruksi persamaan $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu (1) menggunakan dekomposisi nilai singular dan (2) menggunakan subruang Krylov [1]. Model reduksi yang disusun berdasarkan subruang Krylov disebut **pemadanan momen**. Pemadanan momen dapat dijelaskan sebagai berikut. Jika $\mathbf{M}_{\infty,k} = \mathbf{C}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}$ momen ke-k untuk $(\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, akan dicari $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ sedemikian hingga

$$\mathbf{M}_{\infty,k} = \tilde{\mathbf{M}}_{\infty,k},$$

untuk $k = 1,2,\ldots, p \le r$ dan

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\infty,k} = \tilde{\mathbf{C}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

untuk $k = 1,2,\cdots$.

Dalam makalah ini, dibahas pendekatan matematis pemadanan momen di parameter Markov. Teorema fundamental untuk pemadanan momen seperti ditulis dalam Teorema 3.3. Pada tahun 2004, Gallivan *et. al.* membuktikan Teorema 3.1 dengan cara mengasumsikan lebih dahulu eksistensi suatu matriks yang ruang kolomnya memuat subruang Krylov blok [4]. Penulis mengusulkan secara eksplisit bagaimana matriks tersebut dikonstruksikan. Matriks tersebut adalah matriks basis untuk subruang Krylov blok, dan dikonstruksikan menggunakan Algoritma Arnoldi blok.

2. SUBRUANG KRYLOV BLOK

Dalam bagian ini, dibahas secara ringkas konsep subruang Krylov blok dan algoritma untuk mencari basis subruang tersebut. Secara numerik, kajian mengkonstruksi basis subruang Krylov blok dibahas secara mendalam seperti di dalam [5].

Seperti yang telah diketahui bahwa subruang $K_m(\mathbf{A},\mathbf{b})$ dapat direntang menggunakan matriks $\mathbf{A}$ dan vektor $\mathbf{b}$. Untuk subruang Krylov blok, subruang tersebut dikontruksikan menggunakan **dua matriks**. Misalkan $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ dan $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{g}_p] \in \mathrm{R}^{n\times p}$. Subruang Krylov blok didefinisikan sebagai berikut

$$K_m(\mathbf{F},\mathbf{G}) = ren\{\mathbf{F}^q\mathbf{g_k}\} \qquad (3)$$

untuk = 0,1, … , − 1 dan = 1,2, … , .

Algoritma Arnoldi blok adalah algoritma untuk mencari basis subruang Krylov blok $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$. Proses ortogonalisasi dalam algoritma tersebut mengggunakan dekomposisi QR. Algoritma tersebut ditulis sebagai berikut.

Algoritma 1 : Algoritma Arnoldi Blok

Input : $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{G} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, dan bilangan asli m

Output : $\overline{\mathbf{V}} \in \mathrm{R}^{n\times mp}$ dan $\overline{\mathbf{H}} \in \mathrm{R}^{mp\times mp}$.

1. Tentukan matriks ortogonal $\mathbf{V}^1 \in R^{n\times p}$ menggunakan dekomposisi QR terhadap matriks $\mathbf{G}$. Katakan $\mathbf{G} = \mathbf{V}^1\mathbf{R}$.
2. untuk $j = 1,2,\cdots,m$, kerjakan
   2.1. $\mathbf{\Gamma}^j = \mathbf{F}\,\mathbf{V}^j$
   2.2. untuk $k = 1,2,...,j$, kerjakan
      2.2.1. $\overline{\mathbf{H}}^{k,j} = \mathbf{V}^{k^T}\,\mathbf{\Gamma}^j$
      2.2.2. $\mathbf{\Gamma}^j = \mathbf{\Gamma}^j - \mathbf{V}^k\overline{\mathbf{H}}^{k,j}$
   2.3. Hitung $\overline{\mathbf{V}}^{j+1}$ dan $\overline{\mathbf{H}}^{j+1,j}$ menggunakan dekomposisi QR terhadap $\mathbf{\Gamma}^j$, namakan $\mathbf{\Gamma}^j = \overline{\mathbf{V}}^{j+1}\overline{\mathbf{H}}^{j+1,j}$.
   2.4. stop. ■

Misalkan $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $\mathbf{G} \in \mathrm{R}^{n\times p}$ data input untuk Algoritma 1, maka diperoleh dua matriks berikut

1. V = [V V V] R × dan kolom-kolom V membentuk basis untuk subruang Krylov blok $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$ [4].
2. **Matriks Hessenberg blok**

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{1,2} & \mathbf{H}^{1,2} & \mathbf{H}^{1,3} & \mathbf{H}^{1,4} & \cdots & \mathbf{H}^{1,m-1} & \mathbf{H}^{1,m} \\ \mathbf{H}^{2,1} & \mathbf{H}^{2,2} & \mathbf{H}^{2,3} & \mathbf{H}^{2,4} & \cdots & \mathbf{H}^{2,m-1} & \mathbf{H}^{2,m} \\ \Theta & \mathbf{H}^{3,2} & \mathbf{H}^{3,3} & \mathbf{H}^{3,4} & \cdots & \mathbf{H}^{3,m-1} & \mathbf{H}^{3,m} \\ \Theta & \Theta & \mathbf{H}^{4,3} & \mathbf{H}^{4,4} & \cdots & \mathbf{H}^{4,m-1} & \mathbf{H}^{4,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & \ddots & \mathbf{H}^{m-1,m-1} & \mathbf{H}^{m-1,m} \\ \Theta & \Theta & \Theta & \cdots & \cdots & \mathbf{H}^{m.m-1} & \mathbf{H}^{m,m} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{H}^{k,j} = \begin{cases} \mathbf{V}^{k^T}\mathbf{F}\,\mathbf{V}^j & (j = 1,2,\cdots,m-1; k = 1,2,\cdots,j+1) \\ \mathbf{V}^{k^T}\mathbf{F}\,\mathbf{V}^m & (k = 1,2,\cdots,m) \\ \Theta & (\text{selainnya}) \end{cases}$$

.

Hubungan antara matriks input dan matriks output dalam Algoritma 1 dijelaskan sebagai berikut.

Teorema 2.1 ([1], [5], [6]) *Jika (a)* $\mathbf{F} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, *(b)* $\mathbf{G} \in \mathrm{R}^{n\times p}$, *dan (c)* $\overline{\mathbf{V}}$ *dan* $\overline{\mathbf{H}}$ *adalah dua matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok yang tidak berhenti sebelum iterasi ke-* m *, maka*

$$\mathbf{F}\,\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}} + \mathbf{V}^{m+1}\,\overline{\mathbf{H}}^{m+1,m}\,\mathbf{E}_p^{\,T},$$
(4)

dengan $\mathbf{E}_p$ *adalah* p *kolom terakhir matriks indentitas* $\mathbf{I}_{mp \times mp}$. ■

3. TEOREMA PEMADANAN MOMEN

Teorema 3.3 merupakan teorema yang dijadikan dasar untuk pembuktian teorema pemadanan momen. Gallivan *et. al.* membuktikan teorema tersebut dengan mengasumsikan terlebih dahulu matriks yang dimensi ruang kolomnya sama dengan banyaknya kolom matriks tersebut [4]. Dalam makalah ini, penulis mengusulkan matriks yang diasumsikan dapat diperoleh menggunakan Algoritma 1. Sebelumnya, diberikan dua teorema yang digunakan dalam teorem tersebut. Untuk pembuktian dua teorema itu dapat dilihat dalam [2].

Teorema 3.1 [2] *Jika (a)* $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *(b)* $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, *dan (c)* $\overline{\mathbf{V}}$ *dan* $\overline{\mathbf{H}}$ *dua matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok* $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$ *yang tidak berhenti sebelum iterasi ke-*m, *maka untuk* $k = 1,2,\ldots,m$ *berlaku*

$$\mathbf{F}^{k-1}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1 \qquad (5)$$

dengan $\mathbf{E}_1$ *matriks yang kolom-kolomnya* p *kolom pertama matriks identitas* $\mathbf{I}_{mp \times mp}$. ■

Teorema 3.2 [2] *Jika (a)* $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *(b)* $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, *(c)* $\overline{\mathbf{V}}$ *dan* $\overline{\mathbf{H}}$ *adalah dua matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok* $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$ *yang tidak berhenti sebelum iterasi ke-*m, *dan (d)* $\overline{\mathbf{U}}^T\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{I}$, *maka untuk* $k = 1,2,\ldots,m$ *berlaku*

$$\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1 \qquad (6)$$

dengan $\tilde{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}$, *dan* $\mathbf{E}_1$ *matriks yang kolom-kolomnya merupakan* p *kolom pertama matriks identitas* $\mathbf{I}_{mp \times mp}$.■

Teorema 3.3 *Jika (a)* $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *(b)* $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, *(c)* $\overline{\mathbf{V}}$ *matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang Krylov blok* $K_m(\mathbf{F},\mathbf{G})$ *yang tidak berhenti sebelum iterasi ke-*m, *dan (d)* $\overline{\mathbf{U}}^T\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{I}$, *maka untuk* $k = 1,2,\ldots,m$ *berlaku*

$$\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{G} = \overline{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\tilde{\mathbf{G}} \qquad (7)$$

dengan $\tilde{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{F}\overline{\mathbf{V}}$ *dan* $\tilde{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{G}$.

Bukti:

Misalkan $\mathbf{V}^1$ adalah hasil dari dekomposisi QR terhadap matriks $\mathbf{G}$, katakan $\mathbf{G} = \mathbf{V}^1\mathbf{R}$. Jika $\mathbf{E}_1$ adalah p kolom pertama matriks identitas $\mathbf{I}_{mp\times mp}$, maka

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}^1\mathbf{R} = \left[\mathbf{V}^1 \quad \mathbf{V}^2 \quad \ldots \quad \mathbf{V}^m\right]\mathbf{E}_1\mathbf{R} = \overline{\mathbf{V}}\mathbf{E}_1\mathbf{R}. \qquad (8)$$

Dengan menggunakan hipotesis (d), diperoleh

$$\tilde{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{U}}^T\mathbf{G} = \overline{\mathbf{U}}^T\overline{\mathbf{V}}\mathbf{E}_1\mathbf{R} = \mathbf{E}_1\mathbf{R} \qquad (9)$$

Persamaan (8) dan (9) dapat digunakan untuk membuktikan

$$\mathbf{G} = \overline{\mathbf{V}}\mathbf{E}_1\mathbf{R} = \overline{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{G}}.$$

Jadi, Teorema 3.3 benar untuk $k = 1$.

Selanjutnya, dibuktikan persamaan (7) untuk $k = 2,3,\ldots,m$. Dengan menggunakan persamaan (5) dan (6), diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{k-1}\mathbf{G} &= \left(\mathbf{F}^{k-1}\overline{\mathbf{V}}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R} \\
&= \left(\overline{\mathbf{V}}\,\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R} \\
&= \overline{\mathbf{V}}\left(\overline{\mathbf{H}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R} \\
&= \overline{\mathbf{V}}\left(\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\mathbf{E}_1\right)\mathbf{R} \\
&= \overline{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\left(\mathbf{E}_1\mathbf{R}\right) \\
&= \overline{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{F}}^{k-1}\tilde{\mathbf{G}}
\end{aligned}$$

untuk $k = 2,3,\ldots,m$. Oleh karena itu, (7) benar untuk $k = 1,2,\ldots,m$. ■

Dengan menggunakan Teorema 3.3 dapat dibuktikan dua teorema pemadanan momen berikut. Teorema 3.4 tidak dibuktikan. Pembuktiannya dapat dilakukan analog dengan pembuktian Teorema 3.5.

Teorema 3.4 *Jika (a)* $(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ *dengan* $\mathbf{E}$ *tak singular, (b)* $\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{V}} = [\mathbf{V}_1 \;\; \mathbf{V}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{V}_m]$ *adalah matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok untuk subruang*

Krylov blok $K_m\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A},\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\right)$ *yang tidak berhenti sebelum iterasi ke-* m*, (c)* $\left(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}},\tilde{\mathbf{C}}\right)$ *adalah model reduksi untuk* $\left(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\right)$ *dan* $\tilde{\mathbf{E}}$ *tak singular, maka*

$$\mathbf{M}_{\infty,k}=\tilde{\mathbf{M}}_{\infty,k}$$

untuk $k=1,2,\ldots,m$. ■

Teorema 3.5 *Jika (a)* $\left(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\right)$ *dengan* $\mathbf{E}$ *tak singular, (b)* $\bar{\mathbf{V}}=\left[\mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2\ \ldots\ \mathbf{V}_m\right]$ *matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok yang tidak berhenti sebelum iterasi ke-* m *dan kolom-kolomnya merupakan basis untuk subruang Krylov blok* $K_m\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A},\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\right)$*, (c)* $\bar{\mathbf{W}}$ *matriks yang dihasilkan oleh algoritma Arnoldi blok yang tidak berhenti sebelum iterasi ke-* m *dan kolom-kolomnya merupakan basis untuk subruang Krylov blok* $K_m\left(\mathbf{E}^{-T}\mathbf{A}^T,\mathbf{E}^{-T}\mathbf{C}^T\right)$*, (d)* $\left(\tilde{\mathbf{E}},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}},\tilde{\mathbf{C}}\right)$ *model reduksi untuk* $\left(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\right)$ *dengan* $\tilde{\mathbf{E}}$ *tak singular, maka*

$$\mathbf{M}_{\infty,k}=\tilde{\mathbf{M}}_{\infty,k}$$

untuk $k=1,2,\ldots,2m$.

Bukti

Didefinisikan $\mathbf{F}_1=\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{G}_1=\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}$, $\bar{\mathbf{U}}_1^T=\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\bar{\mathbf{V}}^T\mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{F}}_1=\bar{\mathbf{U}}_1^T\mathbf{F}_1\bar{\mathbf{V}}$, dan $\tilde{\mathbf{G}}_1=\bar{\mathbf{U}}_1^T\mathbf{G}_1$. Akibatnya,

$$\tilde{\mathbf{F}}_1=\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}},\quad \tilde{\mathbf{G}}_1=\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}},\ \text{dan}\ \bar{\mathbf{U}}_1^T\bar{\mathbf{V}}=\mathbf{I}.$$

Dengan menggunakan Teorema 3.3, diperoleh

$$\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_1-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}=\bar{\mathbf{V}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_1-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

(10)

untuk $k_1=1,2,\ldots,m$.

Selanjutnya, didefinisikan juga

$$\mathbf{F}_2=\mathbf{E}^{-T}\mathbf{A}^T,$$
$$\mathbf{G}_2=\mathbf{E}^{-T}\mathbf{C}^T,$$

dan

$$\bar{\mathbf{U}}_2^T=\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\bar{\mathbf{V}}^T\mathbf{E}^T.$$

Jika $\tilde{\mathbf{F}}_2=\bar{\mathbf{U}}_2^T\mathbf{F}_2\bar{\mathbf{W}}$ dan $\tilde{\mathbf{G}}_2=\bar{\mathbf{U}}_2^T\mathbf{G}_2$, maka

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_2&=\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\bar{\mathbf{V}}^T\mathbf{E}^T\right)\left(\mathbf{E}^{-T}\mathbf{A}^T\right)\bar{\mathbf{W}}\\&=\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\left(\bar{\mathbf{V}}^T\mathbf{A}^T\bar{\mathbf{W}}\right)=\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\tilde{\mathbf{A}}^T,\\\tilde{\mathbf{G}}_2&=\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\bar{\mathbf{V}}^T\mathbf{E}^T\right)\left(\mathbf{E}^{-T}\mathbf{C}^T\right)\\&=\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\left(\mathbf{C}\bar{\mathbf{V}}\right)^T=\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\tilde{\mathbf{C}}^T,\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}}_2^T\bar{\mathbf{W}}&=\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\bar{\mathbf{V}}^T\mathbf{E}^T\right)\bar{\mathbf{W}}\\&=\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\left(\bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{E}^T\bar{\mathbf{V}}\right)^T=\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\mathbf{E}^T=\mathbf{I}.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 3.3, diperoleh

$$\left(\mathbf{E}^{-T}\mathbf{A}^T\right)^{k_2-1}\mathbf{E}^{-T}\mathbf{C}^T=\bar{\mathbf{W}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\tilde{\mathbf{A}}^T\right)^{k_2-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\tilde{\mathbf{C}}^T$$

atau

$$\mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}\right)^{k_2-1}=\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\right)^{k_2-1}\bar{\mathbf{W}}^T$$

(11)

untuk $k_2=1,2,\ldots,m$.

Sekarang, kita akan buktikan bahawa $\mathbf{M}_k^{(\infty)}=\tilde{\mathbf{M}}_k^{(\infty)}$ benar untuk $k=1,2,3,\ldots,2m$. Perhatikan kembali persamaan (10), diperoleh

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}=\bar{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

sehingga

$$\mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{C}\bar{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}=\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

atau

$$\mathbf{M}_1^{(\infty)}=\tilde{\mathbf{M}}_1^{(\infty)}.$$

Jadi teorem benar untuk $k=1$.

Untuk $k\geq 2$, terdapat dua bilangan asli k_1 dan k_2 yang memenuhi

$$k_1,\ k_2\leq m\ \text{dan}\ k=k_1+k_2.$$

Pertimbangkan persamaan berikut

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\\&=\mathbf{C}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_1+k_2-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\\&=\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_2}\right)\left(\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_1-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\right)\\&=\left(\mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_2-1}\mathbf{A}\right)\left(\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_1-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\right)\\&=\left(\mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_2-1}\right)\mathbf{A}\left(\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_1-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\right)\end{aligned}$$

(12)

Dengan mensubstitusikan persamaan (10) dan (11) ke dalam (12), diperoleh

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\\&\quad=\left(\mathbf{C}\mathbf{E}^{-1}\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_2-1}\right)\mathbf{A}\left(\left(\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\right)^{k_1-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\right)\\&\quad=\left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\right)^{k_2-1}\bar{\mathbf{W}}^T\right)\mathbf{A}\\&\left(\bar{\mathbf{V}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_2-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\right)\\&\qquad=\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\right)^{k_2-1}\left(\bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{A}\bar{\mathbf{V}}\right)\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_1-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\\&\qquad=\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\right)^{k_2-1}\tilde{\mathbf{A}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_1-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

$$= \tilde{\mathbf{C}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{A}}\,\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\right)^{k_2-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_1-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$
$$= \tilde{\mathbf{C}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_2}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_1-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$
$$= \tilde{\mathbf{C}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k_1+k_2-1}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$
$$= \tilde{\mathbf{C}}\left(\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{k}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$$

untuk $k = 2,3,4,\ldots,2m$.

Dalam perkataan lain, kita telah membuktikan

$$\mathbf{M}_k^{(\infty)} = \tilde{\mathbf{M}}_k^{(\infty)}$$

untuk $k = 2,3,4,\ldots,2m$. Teorema terbukti. ■

Berdasarkan Teorema 3.4 dan Teorema 3.5, diperlukan penghitungan matriks $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}$ dan $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}$. Jika orde matriks $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cukup besar, katakan $n \geq 10^5$, maka komputasi matriks $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}$ dan $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}$ menjadi masalah tersendiri. Salah satu solusi yang dapat disajikan adalah matriks $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}$ sebagai solusi dari persamaan matriks $\mathbf{EX} = \mathbf{A}$. Masalah selanjutnya adalah jika matriks-matriks sistem (1) tidak mempunyai *rank* yang penuh. Oleh karena itu, Algoritma 1 memerlukan modifikasi untuk mendapat output matriksnya yang bersifat ortogonal. Modifikasi-modifikasi tersebut akan menjadi fokus penelitian selanjutnya oleh penulis.

4. KESIMPULAN

Telah dibuktikan teorema yang menjadi dasar untuk pembuktian teorema-teorema pemadanan momen. Pembuktian tersebut berbeda dengan pembuktian yang diusulkan. Pembuktian yang diusulkan oleh penulis bertujuan untuk mendekatkan antara aspek teori dan aspek numerik di bidang model reduksi.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Antoulas, A.C. (2005). *Approximation of large-scale dynamical systems*, Philadelphia: SIAM Publisher.

[2]. Farikhin dan Ismail Mohd, (2010). *Mathematical approach for moments matching*, This paper was presented at Seminar Bulanan Institut Penyelidikan Matematika (INSPEM) UPM on 10-11 July 2010.

[3]. Freund, R.W. *Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 123 (2000), 395 – 421

[4]. Gallivan, K., Vandendorpe, A., Van Dooren, P. (2004). *Sylvester equation and projection based model reduction*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 126, p. 213-229.

[5]. Heres, P.J. (2005). *Robust and efficient Krylov subspace methods for model order reduction*, Thesis Doctoral, Technische Universiteit Eindhoven.

[6]. Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear System*, Second edition, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Publisher.