METODE KUMAR UNTUK MENYELESAIKAN PROGRAM LINIER FUZZY PENUH PADA MASALAH TRANSPORTASI FUZZY

Mohamad Ervan S[1], Bambang Irawanto[2],
[1,2]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro Semarang
Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang
[1]mohomadervan@yahoo.co.id, [2]b_irawanto@yahoo.co.id

Abstract. In this paper, we discusses fully fuzzy linear programming in transportation problem. To find the fuzzy optimal solution of the problem with equality constraints, we use Kumar's Method. The value of the fuzzy optimal solution obtained is used to find the optimal value of fuzzy objective function. Then do defuzzification to obtain crisp optimal solutions by using Ranking Function. To illustrate the Kumar's Method, we give a example as iteration

Keywords: Fully Fuzzy Linear Programming, Transportation problem, Triangular Fuzzy Numbers, Kumar's Method.

1. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari untuk membuat keputusan tentang perencanaan transportasi yang sesuai dengan kondisi/keadaan nyata (*real condition*) perlu ditentukan secara tegas. Hal ini disebabkan karena adanya kendala-kendala dan parameter yang berkaitan dengan masalah transportasi tersebut tidak diketahui dengan tegas (baik) atau dalam keadaan samar (*fuzzy*) [1]. Zadeh mendefinisikan himpunan fuzzy dengan menggunakan apa yang disebutnya fungsi keanggotaan (*membership function*), yang nilainya berada dalam selang tertutup [0,1]. Jadi keanggotaan dalam himpunan fuzzy tidak lagi merupakan sesuatu yang tegas (yaitu anggota atau bukan anggota), melainkan sesuatu yang berderajat atau bergradasi secara kontinu [2]. Beberapa metode telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah program linier fuzzy penuh, seperti yang telah dikembangkan oleh Lotfi, dkk [3]. telah menggunakan metode Kumar untuk menyelesaikan masalah program linier fuzzy penuh [4] menggunakan metode Multi Objektive Linear Programming untuk menyelesaikan masalah program linier fuzzy penuh dan membandingkannya dengan metode Kumar. Tulisan ini akan membahas penyelesaian masalah transportasi fuzzy dengan menggunakan Metode Kumar.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam pembahasan diberikan beberapa pengertian yang mendukung pada permasalahan, diantaranya Himpunan Fuzzy, Program Linier crisp dan Program Linier Fuzzy

2.1. Himpunan Fuzzy

Definisi 2.1 [5] *Himpunan fuzzy A di dalam semesta pembicaraan X didefinisikan sebagai himpunan yang mencirikan suatu fungsi keanggotaan (x) yang mengawankan setiap $x \in X$ dengan bilangan real di dalam interval [0,1].*

$$: X \rightarrow [0,1]$$

dimana nilai (x) menunjukan tingkat keanggotaan (membership) dari x pada A.

Definisi 2.2 [6] *Support (pendukung) dari himpunan fuzzy A adalah himpunan dari semua titik dalam yang memiliki derajat keanggotaan bernilai lebih dari 0 yaitu* 0, *yang didefinisikan dengan* support *A* | 0 .

Definisi 2.3 [6] *Core (inti) dari himpunan fuzzy A adalah himpunan dari semua titik dalam yang memiliki derajat keanggotaan bernilai 1 yaitu* 1, *yang didefinisikan dengan* $cor\ A$ $|$ 1 .

Definisi 2.4 [6] *Himpunan fuzzy A disebut normal jika core dari A tidak kosong* $cor\ A \neq \emptyset$, *sehingga selalu dapat ditemukan satu titik* $\in$ *yang memiliki derajat keanggotaan bernilai 1 yaitu* 1.

Definisi 2.5 [6] *Himpunan fuzzy A disebut konveks jika untuk setiap* $_1, _2 \in$ *dan* $\in 0,1$ *berlaku:* $1 -$ $_2 \geq min$ $_1$, $_2$.

Definisi 2.6 [6] *Bilangan fuzzy adalah himpunan fuzzy dalam bilangan real yang memenuhi kondisi normalitas dan konveksitas*

Definisi 2.7 [7] *Bilangan fuzzy A* $a, , c$ *dinamakan bilangan segitiga fuzzy jika fungsi keanggotaannya diberikan oleh:*

$$\frac{-a}{-a},\quad a \leq \quad ,$$
$$1, \quad ,$$
$$\frac{-c}{-c},\quad \leq c,$$
$$0, \quad ainn\ .\ a$$

dengan $a \leq \ \leq c$ *yang sesuai dengan fungsi keanggotaan bilangan segitiga fuzzy.*

Definisi 2.8 [7] *Bilangan segitiga fuzzy ũ = (* $_1, _1, _1$ *disebut bilangan fuzzy non negatif jika* $_1 \geq 0$.

Definisi 2.9 [7] *Dua bilangan segitiga fuzzy (triangular fuzzy number) ũ = (* $_1, _1, _1$ *dan ṽ = (* $_2, _2, _2$ *dikatakan sama, ũ = ṽ, jika* $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, *dan* $z_1 = z_2$.

Definisi 2.10 [7] *Misalkan terdapat dua bilangan segitiga fuzzy A = (a, b, c) dan = (e, f, g) maka:*

(i) A ⊕ = (a, b, c) ⊕ (e, f, g) = (a + e , b + f, c + g),

(ii) -A = -(a, b, c) = (-c, - b, -a),

(iii) A ⊖ = (a, b, c) ⊖ (e, f, g) = (a - g , b - f, c - e),

(iv) misal A = (a, b, c) sebarang bilangan segitiga fuzzy dan = (x, y, z) adalah sebuah bilangan segitiga fuzzy non-negatif, maka:

$A \otimes \quad = A \quad =$
$a\ ,\ \ ,c\ \ ,\ \ i\ \ \alpha a \geq 0,$
$a\ ,\ \ ,c\ \ ,\ \ i\ \ \alpha a \leq 0,\ c \geq 0,$
$a\ ,\ \ ,c\ \ ,\ \ i\ \ \alpha a \leq 0.$

Definisi 2.11 [2] *Fungsi Ranking yang digunakan untuk mengurutkan bilangan segitiga fuzzy didefinisikan ℜ(A) =* $\frac{2}{4}$ *, dengan A = (a, b, c), A ∈ F(R), dimana F(R) adalah himpunan dari bilangan bilangan fuzzy triangular.*

2.2.Program Linier Fuzzy Penuh

Program Linier secara umum yang biasa dikenal adalah program linier bentuk crisp yang memiliki Formulasi model secara matematis bentuk umum jika diubah menjadi masalah program linier bentuk baku sebagai berikut [8]:

Memaksimumkan (atau meminimumkan) :

$$\sum_{j\ \ 1} c_j\ \ _j \quad (2.1)$$

dengan kendala :

$$\sum_{j\ \ 1} a_{ij}\ \ _j \quad _i \quad i \quad 1,2,\ldots,m \quad (2.2)$$

$$_j \geq 0 \quad 1,2,\ldots,n \quad (2.3)$$

Model Program Linier bentuk Crisp, dikembangkan kedalam Program Linier *Fuzzy,* dimana Program Linier *Fuzzy* memiliki dua bentuk Program Linier *Fuzzy* penuh dan tidak penuh ,Model Program Linier *Fuzzy* Penuh dapat disajikan dalam bentuk baku

Memaksimalkan (atau meminimalkan)

$$\sum_{j\ \ 1} \tilde{c}_j\ \ _j, \quad (2.4)$$

terhadap $\sum_{j\ \ 1} a_{ij}\ \ _j \leq, \geq, \quad _i,$

$$i \quad 1,2,\ldots,m\ , \quad (2.5)$$

$$_j \geq 0, \quad 1,2,\ldots,n\ , \quad (2.6)$$

masalah PLFP (Program Linier *Fuzzy* Penuh) dengan persamaan kendala *fuzzy* m dan variabel *fuzzy* n dapat diformulasikan sebagai berikut

Memaksimalkan (atau meminimalkan)

$$\otimes \quad ,$$

dengan kendala $A \otimes$

adalah bilangan *fuzzy* non-negatif, dimana:

$\tilde{c}_j\ _1$; $_j\ _1$; A a_{ij} ; $_i\ _1$ dan $a_{ij}, \tilde{c}_j, _j, _i \in$. , *i* = 1, 2, …, m dan *j* =1, 2, …, n.

Pada [6] $x^* = ((x^*)^l, (x^*)^c, (x^*)^u)$ dikatakan solusi optimal fuzzy dari persamaan (2.4-2.6) jika memenuhi karakteristik berikut:

(i) $x^* = \quad {}_j^* \quad {}_1$ dimana ${}_j^* \in F(\mathrm{R})^+, j$ =1, 2, …, n, (ii) $Ax^* \quad b$,

(iii) $\forall x = ((x)^l, (x)^c, (x)^u) \in S = \{ x \mid Ax = b,\ x = \quad {}_j \quad {}_1$ dimana ${}_j \in F(\mathrm{R})^+\}$ sehingga $(\tilde{c} \quad) < (\tilde{c} \quad {}^*)$ (dalam masalah meminimalkan $(\tilde{c} \quad) > (\tilde{c} \quad {}^*)$

Jika terdapat $x' \in S$ sedemikian sehingga $\tilde{c} \quad ' = \tilde{c} \quad {}^*$, maka x' juga merupakan solusi optimal dari persamaan (1),(2), (3) dan dinamakan solusi optimal alternatif.

Langkah-langkah dari Metode Kumar adalah untuk menyelesaikan masalah program linier fuzzy penuh sebagai berikut[6]:

1. **Langkah 1** masalah FFLP ditulis sebagai:

   Memaksimalkan (atau meminimalkan) $\sum_{j \quad 1} \tilde{c}_j \otimes \quad {}_j$,

   terhadap $\sum_{j \quad 1} a_{ij} \otimes \quad {}_j \quad {}_i, \quad {}_j$ adalah bilangan non-negatif triangular fuzzy.

2. **Langkah 2** Jika semua parameter $\tilde{c}_j, \ {}_j, a_{ij}$ dan ${}_i$ merupakan bilangan triangular fuzzy $p_j, \ {}_j, r_j, \quad {}_j, \ {}_j, \ {}_j, \ a_{ij}, \ {}_{ij}, c_{ij}$, dan ${}_i, \ {}_i,$ ${}_i$, berdasarkan langkah 1 dapat ditulis:

   Memaksimalkan (atau meminimalkan) $\sum_{j \quad 1} p_j, \ {}_j, r_j \otimes \quad {}_j, \ {}_j, \ {}_j$,

   terhadap $\sum_{j \quad 1} a_{ij}, \ {}_{ij}, c_{ij} \otimes \quad {}_j, \ {}_j, \ {}_j \quad {}_i, \ {}_i,$ ${}_i, \quad {}_j \geq 0, \forall i$ $1,2, \dots, m$

3. **Langkah 3** Asumsikan $a_{ij}, \ {}_{ij}, c_{ij} \otimes \quad {}_j, \ {}_j, \ {}_j$ m_{ij}, n_{ij}, o_{ij} adalah asalah FFLP (*Fully Fuzzy Linear Programming*), berdasarkan langkah 2 dapat ditulis:

   Memaksimalkan (atau meminimalkan) $\sum_{j \quad 1} p_j, \ {}_j, r_j \otimes \quad {}_j, \ {}_j, \ {}_j$,

   terhadap $\sum_{j \quad 1} m_{ij}, n_{ij}, o_{ij} \quad {}_i, \ {}_i,$ ${}_i, \quad {}_j \geq 0 \quad \forall i$ $1,2, \dots, m,$

4. **Langkah 4** Dengan menggunakan operasi aritmatika yang didefinisikan dalam masalah program linier fuzzy pada definisi 2.4 dan definisi 2.5 dan berdasarkan langkah 3 maka diubah menjadi masalah CLP (*Crisp Linear Programming*) yaitu sebagai berikut:

   Memaksimalkan (atau meminimalkan) $\sum_{j \quad 1} p_j, \ {}_j, r_j \otimes \quad {}_j, \ {}_j, \ {}_j$,

   terhadap $\sum_{j \quad 1} m_{ij} \quad {}_i; \sum_{j \quad 1} n_{ij} \quad {}_i, \sum_{j \quad 1} o_{ij}$ ${}_i, \quad \forall i \quad 1,2, \dots, m,$ ${}_j - \ {}_j \geq 0, \quad {}_j - \ {}_j \geq 0,$ $\forall \quad 1,2, \dots, n.$

5. **Langkah 5** Temukan solusi optimal ${}_j, \ {}_j$ dan ${}_j$ dengan menyelesaikan masalah CLP (*Crisp Linear Programming*) berdasarkan langkah 4.

6. **Langkah 6** Temukan solusi optimal fuzzy dengan memasukkan nilai dari ${}_j, \ {}_j$ dan ${}_j$ kedalam ${}_j \quad {}_j, \ {}_j, \ {}_j$.

7. **Langkah 7** Temukan nilai optimal fuzzy dengan memasukkan nilai ${}_j$ kedalam $\sum_{j \quad 1} \tilde{c}_j \otimes \quad {}_j$.

Contoh 2.12 Diberikan tabel untuk masalah transportasi dalam bilangan fuzzy sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel masalah transportasi dalam bilangan Fuzzy

Sumber	Tujuan				Supply
	Distribusi 1	Distribusi 1	Distribusi 1	Distribusi 1	
Pabrik 1	(5.6, 5.8, 6)	(3.8, 4, 4.2)	(6, 6.2, 6.4)	(5.8, 6, 6.2)	(1465, 2185, 2905)
Pabrik 1	(4.1, 4.3, 4.5)	(2.8, 3, 3.2)	(4.5, 4.7, 4.9)	(4.3, 4.5, 4.7)	(1255, 1617, 1979)
Demand	(810, 1045.5, 1281)	(577, 865.5, 1154)	(633, 917, 1201)	(700, 974, 1248)	

$_{ij}$: banyaknya distribusi produk ke-*i* dengan tujuan ke-*j*.
dengan $_{ij} = ((\ _{ij})^l, (\ _{ij})^c, (\ _{ij})^u)$. Untuk semua i =1, 2 dan j = 1, 2, 3, 4.

Fungsi tujuan (meminimumkan)
Meminimumkan ((5.6, 5.8, 6) $_{11} \oplus$ (3.8, 4, 4.2) $_{12} \oplus$ (6, 6.2, 6.4) $_{13} \oplus$(5.8, 6, 6.2) $_{14}\oplus$ (4.1, 4.3, 4.5) $_{21} \oplus$ (2.8, 3, 3.2) $_{22} \oplus$ (4.5, 4.7, 4.9) $_{23} \oplus$ (4.3, 4.5, 4.7) $_{24}$,
dengan kendala:
$_{11} \oplus\ _{12} \oplus\ _{13} \oplus\ _{14}$ = (1465, 2185, 2905),
$_{21} \oplus\ _{22} \oplus\ _{23} \oplus\ _{24}$ = (1255, 1617, 1979),
$_{11} \oplus\ _{21}$ = (810, 1045.5, 1281),
$_{12} \oplus\ _{22}$ = (577, 865.5, 1154),
$_{13} \oplus\ _{23}$ = (633, 917, 1201),
$_{14} \oplus\ _{24}$ = (700, 974, 1248),
dimana $_{ij} \in F(\ )+$, $\forall i$ = 1, 2 dan $\forall j$ = 1, 2, 3, 4.

Menggunakan langkah 4, mengkonversi masalah program linier fuzzy penuh ke dalam masalah CLP (*Crisp Linear Programming*).
Meminimumkan $(1.4(\ _{11})^l + 0.95(\ _{12})^l + 1.5(\ _{13})^l + 1.45(\ _{14})^l + 1.025(\ _{21})^l + 0.7(\ _{22})^l + 1.125(\ _{23})^l + 1.075(\ _{24})^l + 2.9(\ _{11})^c + 2(\ _{12})^c + 3.1(\ _{13})^c + 3(\ _{14})^c + 2.15(\ _{21})^c + 1.5(\ _{22})^c + 2.35(\ _{23})^c + 2.25(\ _{24})^c + 1.5(\ _{11})^u + 1.05(\ _{12})^u + 1.6(\ _{13})^u + 1.55(\ _{14})^u + 1.125(\ _{21})^u + 0.8(\ _{22})^u + 1.225(\ _{23})^u + 1.175(\ _{24})^u)$
dengan kendala:
$((\ _{11})^l + (\ _{12})^l + (\ _{13})^l + (\ _{14})^l = 1465)$; $((\ _{11})^c + (\ _{12})^c + (\ _{13})^c + (\ _{14})^c = 2185)$; $((\ _{11})^u + (\ _{12})^u + (\ _{13})^u + (\ _{14})^u = 2905)$; $((\ _{21})^l + (\ _{22})^l + (\ _{23})^l + (\ _{24})^l = 1255)$; $((\ _{21})^c + (\ _{22})^c + (\ _{23})^c + (\ _{24})^c = 1617)$;$((\ _{21})^u + (\ _{22})^u + (\ _{23})^u + (\ _{24})^u = 1979)$; $((\ _{11})^l + (\ _{21})^l = 810)$; $((\ _{11})^c + (\ _{21})^c = 1045.5)$; $((\ _{11})^u + (\ _{21})^u = 1281)$;
$((\ _{12})^l + (\ _{22})^l = 577)$; $((\ _{12})^c + (\ _{22})^c = 865.5)$; $((\ _{12})^u + (\ _{22})^u = 1154)$;
$((\ _{13})^l + (\ _{23})^l = 633)$; $((\ _{13})^c + (\ _{23})^c = 917)$; $((\ _{13})^u + (\ _{23})^u = 1201)$;
$((\ _{14})^l + (\ _{24})^l = 700)$; $((\ _{14})^c + (\ _{24})^c = 974)$; $((\ _{14})^u + (\ _{24})^u = 1248)$,
$((\ _{ij})^c - (\ _{ij})^l \geq 0)$; $((\ _{ij})^u - (\ _{ij})^c \geq 0)$; $((\ _{ij})^l \geq 0)$, $\forall i$ = 1, 2, $\forall$ = 1, 2, 3, 4. Menggunakan langkah 6, berdasarkan langkah 5 menemukan solusi optimal menggunakan aplikasi matematika, yaitu POM for Windows Version 3.0, yaitu:

$((\ ^*_{11})) = ((x_{11})^l, (x_{11})^c, (x_{11})^u) = (0, 0, 0)$,
$((\ ^*_{12})) = ((x_{12})^l, (x_{12})^c, (x_{12})^u) = (577, 865.5, 1154)$,
$((\ ^*_{13})) = ((x_{13})^l, (x_{13})^c, (x_{13})^u) = (188, 345.5, 503)$,
$((\ ^*_{14})) = ((x_{14})^l, (x_{14})^c, (x_{14})^u) = (700, 974, 1248)$,
$((\ ^*_{21})) = ((x_{21})^l, (x_{21})^c, (x_{21})^u) = (810, 1045.5, 1133.5)$,
$((\ ^*_{22})) = ((x_{22})^l, (x_{22})^c, (x_{22})^u) = (0, 0, 0)$,
$((\ ^*_{23})) = ((x_{23})^l, (x_{23})^c, (x_{23})^u) = (445, 571.5, 698)$,
$((\ ^*_{24})) = ((x_{24})^l, (x_{24})^c, (x_{24})^u) = (0, 0, 0)$.

Nilai optimal dari fungsi tujuan diperoleh dengan mensubstitusikan harga * ke dalam $\tilde{c}$, sehingga solusi optimal dari permasalahan FFLP dapat dituliskan sebagai berikut:

$\sum_{i\ 1}^{2}\sum_{j\ 1}^{4} c_{ij}\ {}_{ij}^{*}$ = 5.6(0) + 3.8(577) + 6(188) + 5.8(700) + 4.1(810) + 2.8(0) +4.5(445) + 4.3(0) = 12704.1 ,

$\sum_{i\ 1}^{2}\sum_{j\ 1}^{4} c_{ij}\ {}_{ij}^{*}$ = 5.8(0) + 4(865.5) + 6.2(345.5) + 6(974) + 4.3(1045.5) +3(0) + 4.7(571.5) + 4.5(0) = 18629.8 ,

$\sum_{i\ 1}^{2}\sum_{j\ 1}^{4} c_{ij}\ {}_{ij}^{*}$ = 6(0) + 4.2(1154) + 6.4(503) + 6.2(1248) + 4.5(1281) +3.2(0) + 4.9(698) + 4.7(0) = 24988.3 ,

$\tilde{c}\ ^{*} = \sum_{i\ 1}^{2}\sum_{j\ 1}^{4} c_{ij}\ {}_{ij}^{*}\ ,\sum_{i\ 1}^{2}\sum_{j\ 1}^{4} c_{ij}\ {}_{ij}^{*}\ ,\sum_{i\ 1}^{2}\sum_{j\ 1}^{4} c_{ij}\ {}_{ij}^{*}$

$\tilde{c}\ ^{*}$ = (12704.1, 18629.8, 24988.3).

Penegasan (*defuzzification*) digunakan untuk mengubah nilai solusi optimal fungsi tujuan fuzzy menjadi nilai solusi optimal fungsi tujuan tegas (*crisp*). Dengan menggunakan fungsi peringkat (definisi 2.6) penegasan dari solusi optimal fungsi tujuan = (12704.1, 18629.8, 24988.3), yaitu sebagai berikut:

$Z = \frac{12704.1\ \ 2\ 1\ \ \ 2\ \ \ 24\ \ \ .3}{4} = \frac{74\ \ \ 2}{4} =$ 18738

3. PENUTUP

Masalah program linier fuzzy penuh pada masalah transportasi dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Kumar. Dengan menggunakan Fungsi rangking penegasan (*deffuzification*) dilakukan untuk mengubah nilai solusi optimal fuzzy menjadi solusi optimal tegas (*crisp*).

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Suroso, Widodo, (2013), Kajian Penerapan Program Linear Multi Objektif Fuzzy Interaktif pada Keputusan Perencanaan Transportasi. *Jurnal Teknik Sipil*, 18(1): 44-54.

[2] Susilo, Frans, (2006), *Himpunan & Logika Kabur serta Aplikasinya,* Yogyakarta: Graha Ilmu.

[3] F.H, Lotfi. T, Allahviranloo. M.A, Jondabeha. L, Alizadeh, (2009), Solving a Fully Fuzzy Linear Programming Using Lexicography Method and Fuzzy Approximate Solution, *International Journal of Applied Mathematics Modelling,* 33(7) : 3151-3156.

[4] Mohammad Ervan, Bambang Irawanto dan Sunarsih, (2015), Program Linier Fuzzy Penuh dengan Algoritma Multi Objective Linear Programming, *Jurnal Matematika*, 18(1):36-40.

[5] Klir, George J. dan Yuan Bo, (1995), *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Apllications,* New Jersey: Prentice Hall P T R.

[6] Kumar, Amit. Jagdeep Kaur. Pushpinder Singh, (2011), A New Method For Solving Fully Fuzzy Linear Problemming Problem. *International Journal of Applied Mathematics Modelling*, 35(2): 817-823.

[7] A. Kaufmann, M.M. Gupta, (1985), *Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications*, New york: Van Nostrand Reinhold.

[8] Hillier, Frederick S dan Gerald J. Liberman, (1990), *Introduction to Operations Research Fifth Edition,* Jakarta: Erlangga.