

**KESTABILAN MODEL *SUSCEPTIBLE VACCINATED INFECTED RECOVERED*
(SVIR) PADA PENYEBARAN PENYAKIT
CAMPAK (*MEASLES*)
(Studi Kasus di Kota Semarang)**

Melita Haryati¹, Kartono², Sunarsih³
^{1,2,3}Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

Abstract. Measles is the disease that caused by paramixovirus that infected to the humans by direct contact with infected person. Measles in Semarang was still as endemic disease. The aim of this study is analyze the SVIR (*Susceptible Vaccinated Invected Recovered*) model of the spread of Measles. This model is a system of nonlinear differential equation which solved by numerical solution with Euler's method. The study use the data from Semarang Health Department, from the SVIR model generated $R_0 = 0.0013 < 1$, disease free equilibrium (119; 103; 0; 10156). If the vaccination rate is increasing, so susceptible people will be decreased and increasing the recovered people. Based on the result of analysis SVIR model in the strategy to control the spread of Measles can be done by developing the program of Measles' vaccination.

Keywords: SVIR Model, Measles, Euler's Method

1. PENDAHULUAN

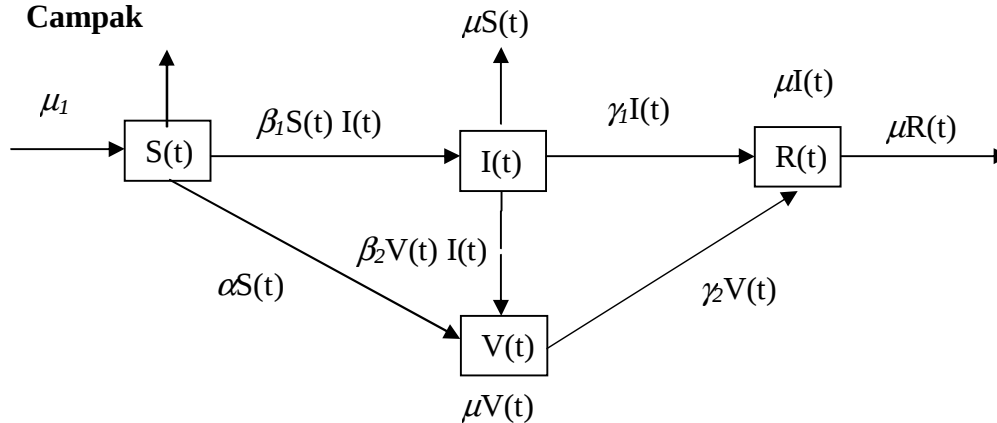
Penyakit Campak adalah penyakit yang terjadi akibat dari infeksi, keberadaan, dan pertumbuhan virus pada organisme *host* individu. Campak memiliki daya penularan tinggi, yang ditandai dengan demam, korisa, konjungtivitis, batuk disertai ruam *makulopapular* menyeluruh. Komplikasi Campak cukup serius seperti diare, pneumonia (radang paru-paru), otitis media, eksaserbasi, dan kematian [1]. Hingga tahun 2013 masih terjadi Kejadian Luar Biasa (KLB) penyakit Campak di kota Semarang. Bentuk model matematika yang digunakan dalam melihat tingkat penyebaran suatu penyakit menular disebut pemodelan epidemi. [2] Perlu adanya pengkonstrusian model penyebaran penyakit Campak sebagai dasar untuk menganalisis fenomena tersebut. Secara umum, model epidemik yaitu *susceptible* (S), *infected* (I), dan *recovered* (R) atau SIR, dimana *susceptible* (S) sebagai sub kelas populasi yang rentan terinfeksi, *infected* (I) sebagai sub kelas populasi yang terinfeksi, dan *recovered* (R) sebagai sub kelas yang telah sembuh. Penambahan

klas *vaccinated* ke dalam model dasar SIR yaitu sebagai salah satu strategi penanggulangan penyebaran penyakit Campak sehingga model SIR menjadi SVIR. Model matematika yang dibahas didasari oleh Xianning Liu, Yasuhiro Takeuchi, Shingo Iwami [3].

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Fenomena penyebaran penyakit Campak dapat digambarkan dalam suatu diagram transfer dinamik yang menjadi acuan dalam pengembangan model SVIR.

a. Model Penyebaran Penyakit Campak



Gambar 2.1 Transfer Dinamik antar Klas pada Model SVIR

Parameter-parameter yang digunakan antara lain μ yaitu konstanta laju kematian alami, μ_1 yaitu konstanta laju kelahiran, α yaitu konstanta laju dimana individu *suspect* yang sudah divaksinasi Campak (masuk klas *vaccinated*), β_1 yaitu tingkat transmisi penyakit Campak ketika individu *susceptible* kontak dengan individu yang terinfeksi (*infected*). Berdasarkan jurnal yang ditulis oleh Teri Johnson, 2009 menerangkan tingkat transmisi penyakit dapat diperoleh dari persamaan $\beta_1 = \frac{\beta_1 S(t) I(t)}{S(t) I(t)}$ [4]. β_2 yaitu tingkat transmisi penyakit Campak ketika individu *vaccinated* kontak dengan individu yang terinfeksi (*infected*). γ_1 yaitu konstanta laju kesembuhan penyakit Campak dari klas *infected*. γ_2 yaitu konstanta laju kesembuhan alami.

Asumsi-asumsi yang digunakan yaitu populasi konstan, tidak ada proses migrasi, pada usia vaksin (1-14 tahun) mendapat vaksinasi (imunisasi) Campak,, pada setiap klas (kelompok) memungkinkan terjadinya kematian alami, penularan penyakit Campak melalui kontak langsung dengan penderita, setiap individu yang sembuh dari Campak mempunyai kekebalan permanen, umur, jenis kelamin, status sosial, dan ras tidak mempengaruhi kemungkinan terinfeksi.

Untuk menyatakan jumlah individu dalam klas S , V , I , dan R pada waktu t

adalah $S(t)$, $V(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ dan $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$. Diasumsikan total populasi manusia N konstan, sehingga proporsi dari total populasi manusia adalah satu. Jadi dapat dituliskan $s(t) + v(t) + i(t) + r(t) = 1$ dengan

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad v(t) = \frac{V(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

dan nilai dari $s(t)$, $v(t)$, $i(t)$, $r(t)$ adalah positif.

[5] Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu yang menggambarkan penyebaran penyakit Campak yang terjadi pada populasi manusia dengan proses perpindahan antar klas *susceptible* (S), *vaccinated* (V), *infected* (I), dan *recovered* (R), yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \mu_1 - \beta_1 s i - \alpha s - \mu s \\ \dot{v} &= \alpha s + \beta_2 v i - \gamma_2 v - \mu v \\ \dot{i} &= \beta_1 s i - \gamma_1 i - \mu i \\ \dot{r} &= \gamma_1 i + \gamma_2 v - \mu r \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan kondisi awal: $s(0) = 1$, $v(0) = 0$, $i(0) = 0$, $r(0) = 0$
 $\mu \geq 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ dan $\beta_2 \geq 0$.

Keterangan:

- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *susceptible* (rentan terkena penyakit Campak)
- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *vaccinated* (yang sudah diberikan vaksin Campak)

- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *infected* (yang terinfeksi penyakit Campak)
- : laju perubahan proporsi jumlah individu pada klas *recovered* (yang sembuh dari penyakit Campak).

b. Solusi Kestimbangan Model

Titik kesetimbangan digunakan untuk mengetahui perilaku kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan tersebut. Titik kesetimbangan diperoleh jika memenuhi $\dot{S} = 0$, $\dot{I} = 0$, $\dot{R} = 0$, sehingga sistem Persamaan (2.1) pada titik (S^*, I^*, R^*) menjadi

$$\begin{aligned} -\dot{S} &= (\lambda - \mu - \beta I^*)S^* - \beta I^*R^* = 0 \\ -\dot{I} &= (\beta I^*S^* - (\alpha + \mu)I^*) = 0 \\ -\dot{R} &= (\beta I^*R^* - \mu R^*) = 0 \end{aligned}$$

diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu (S^*, I^*, R^*)

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\mu}{\lambda - \mu - \beta I^*}, 0, \frac{\beta I^*S^*}{\lambda - \mu - \beta I^*} \right) \\ &\text{titik kesetimbangan endemik, yaitu} \\ &= \left(\frac{\mu}{\beta I^*}, \frac{\mu}{\lambda - \mu - \beta I^*}, \frac{\beta I^*S^*}{\lambda - \mu - \beta I^*} \right) \end{aligned}$$

c. Basic Reproduction Number

Untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit Campak diperlukan suatu parameter yaitu *basic reproduction number* (rasio reproduksi dasar) yang dinotasikan dengan R_0 . Rasio reproduksi dasar dapat diekspresikan sebagai

$$R_0 = \frac{\beta I^*S^*}{\lambda - \mu - \beta I^*}$$

Jika $R_0 < 1$ maka $\dot{I} < 0$ untuk $I \rightarrow \infty$, yang berarti bahwa jumlah penderita penyakit Campak berangsur-angsur semakin berkurang sehingga penyakit akan menghilang dari populasi dan tidak terjadi endemik. Jika $R_0 > 1$ maka $\dot{I} > 0$, yang berarti jumlah penderita berangsur-angsur semakin bertambah sehingga penyakit Campak akan meluas dan endemik.

d. Kestabilan dari Solusi Kestimbangan

Kestabilan di sekitar titik kesetimbangan dicari dengan melinierisasikan sistem di sekitar titik kesetimbangan, kemudian menentukan nilai eigen yang menjadi penentu stabil atau tidaknya sistem. Nilai eigen dari linierisasi sistem SVIR pada titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\lambda - \mu - \beta I^*), \quad \lambda_2 = -(\lambda - \mu - \beta I^*), \\ \lambda_3 &= (\beta I^*S^* - (\alpha + \mu)I^*), \quad \lambda_4 = -\mu \end{aligned}$$

$\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$ sehingga nilai eigen $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 > 0$ sehingga nilai eigen $\lambda_3 < 0$, bernilai negatif $(\lambda_4 - 1) < 0$ $\lambda_4 < 1$. Syarat stabil asimtotik lokal jika $\lambda_4 < 1$ dan tidak stabil jika $\lambda_4 > 1$. $\lambda_4 > 0$ sehingga nilai eigen $\lambda_4 < 0$. Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil jika memenuhi $\lambda_4 < 1$.

e. Simulasi Numerik dengan Metode Euler

Berdasarkan data-data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Semarang tahun 2013, maka nilai dari setiap parameter sebagai berikut $\mu = 0.0081$ (laju kematian alami=laju kelahiran), $\alpha = 0.696$, $\beta = 0.0824$, $\beta = 0.0401$, $\gamma = 1$, $\gamma = 0.8$ sehingga diperoleh nilai $R_0 = 0.00133445 < 1$ (*Basic reproduction number*), titik kesetimbangan bebas penyakit untuk klas: *susceptible* yaitu pada $S^* = 0.011504047720494$ atau $S^* = 119$, *vaccinated* yaitu pada $I^* = 0.009908200981888$ atau $I^* = 103$, *infected* $R^* = 0$, dan *recovered* yaitu $R^* = 0.978587751297617$ atau $R^* = 10156$.

Dengan demikian $R_0 < 1$ yang sudah diperoleh dapat menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik, yaitu pada $(S^*, I^*, R^*) = (0.011504047720494; 0.009908200981888; 0.978587751297617)$ $(S^*, I^*, R^*) = (119; 103; 0; 10156)$

Dengan parameter yang telah diperoleh sehingga sistem dapat dicari solusi numeriknya dengan metode Euler [6].

Substitusi parameter-parameter yang ada $\mu = 0.0081$, $\alpha = 0.696$, $\beta = 0.0824$, $\beta = 0.0401$, $\gamma = 1$, $\gamma = 0.8$ sehingga persamaan diferensial menjadi

$$- = 0.0081 - 0.7041 - 0.0824$$

$$- = 0.696 - 0.8081 - 0.0401$$

$$- = 0.0824 + 0.0401 - 1.0081$$

$$- = 0.8 + - 0.0081$$

batas interval : $0 \leq \leq 1$ syarat awal:

$(0) = 1$, $(0) = 0$, $(0) = 0$, $(0) = 0$,
dimana $= 100$. Disini terlihat bahwa
batas awal interval, $= 0$ dan batas akhir
 $= 1$.

Dalam metode Euler, pertama kali yang harus dilakukan adalah menghitung *step-size(h)* [2], dengan cara

$$= \frac{1 - 0}{100} = 0,01$$

kemudian menentukan posisi titik-titik berdasarkan rumus

$$= + = 0 + (0,01) \\ = 0,01$$

Selanjutnya, menetapkan , , , yang diambil dari syarat awal $(0) = 1$, $(0) = 0$, $(0) = 0$, $(0) = 0$ sehingga dapat ditulis dengan

$$= 1, = 0, = 0, = 0$$

Dengan demikian persamaan Euler dapat dinyatakan sebagai berikut

a) Klas *Susceptible*

$$= + 0.0081 - 0.7041 \\ - 0.0824) \\ = 0.000081 + 0.992959 \\ - 0.000824$$

b) Klas *Vaccinated*

$$= + 0.696 - 0.8081 \\ - 0.0401) \\ = 0.00696 + 0.991919 \\ - 0.000401$$

c) Klas *Infected*

$$= + 0.0824 + 0.0401 \\ - 1.0081)$$

$$= 0.000824 + 0.000401 \\ + 0.989919$$

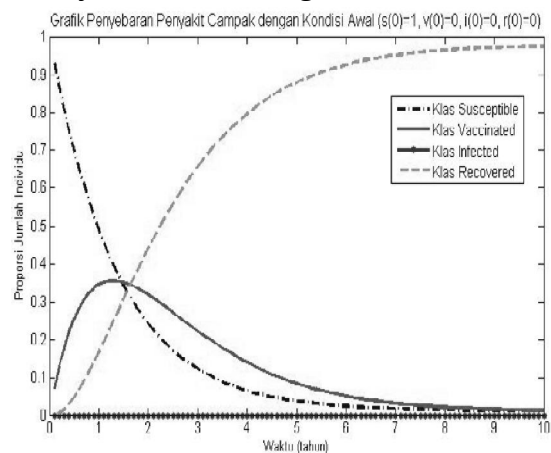
d) Klas *Recovered*

$$= + 0.8 + - 0.0081 \\ = 0.008 + 0.01 + 0.999919$$

dimana $= 0,1,2, \dots, - 1$. karena
 $= 100$, maka $= 0,1,2, \dots, 99$

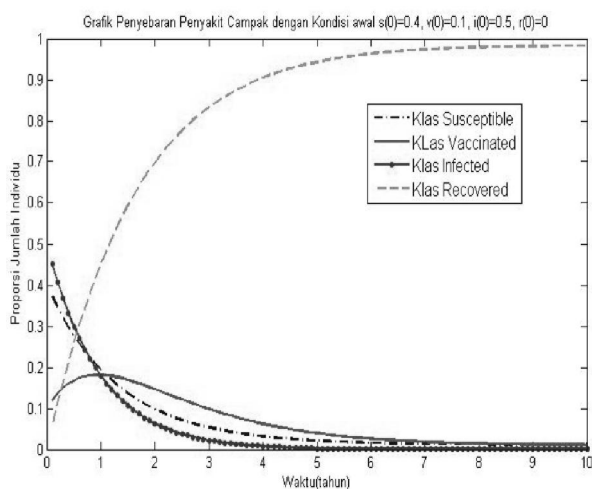
Perhitungan (iterasi) dilakukan berulang-ulang sebanyak N kali.

Dari perhitungan tersebut dapat disajikan hasilnya dalam bentuk grafik berikut



Gambar 2.2 Grafik Model SVIR pada Kondisi Awal Bebas Penyakit Campak

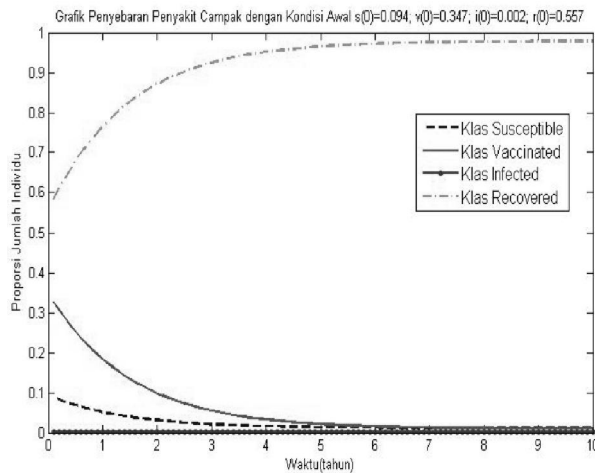
Gambar 2.2 menunjukkan perilaku penyebaran penyakit Campak setiap klas kondisi awal bebas penyakit, terlihat bahwa tidak ada orang yang terinfeksi.



Gambar 2.3 Grafik Model SVIR pada Kondisi Awal Endemik $(0) = 0.4$, $(0) = 0.1$, $(0) = 0.5$, $(0) = 0$

Penyebaran Penyakit Campak Gambar 2.3 menunjukkan perilaku penyebaran penyakit Campak pada kondisi awal

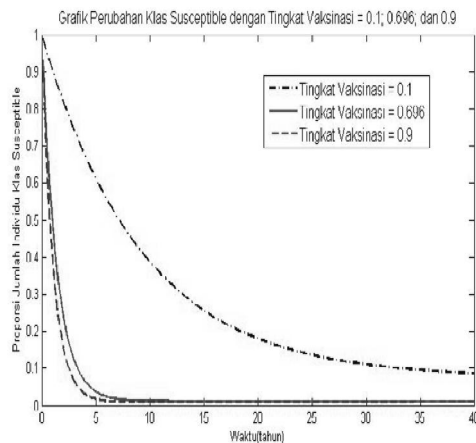
endemik dengan jumlah penderita yang cukup tinggi.



Gambar 2.4 Grafik Model SVIR pada Penyebaran Penyakit Campak, Kondisi Awal Endemik $s(0) = 0.094$, $i(0) = 0.347$, $r(0) = 0.002$, $v(0) = 0.557$

Gambar 2.4 menunjukkan perilaku penyebaran penyakit Campak pada kondisi awal endemik dengan jumlah penderita yang sedikit.

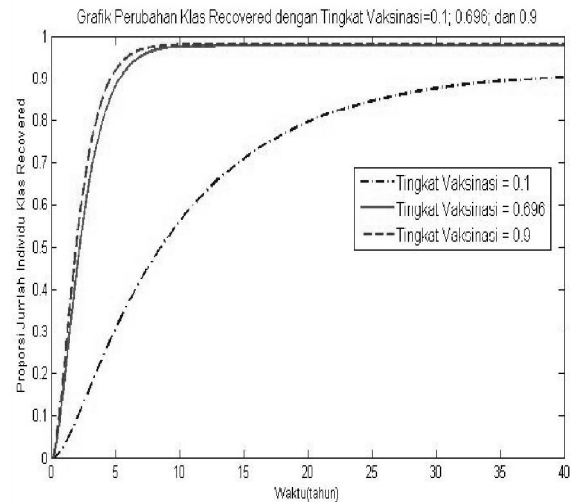
a. Perubahan klas *Susceptible* dengan perbedaan tingkat vaksinasi ($\alpha = 0.1$; 0.696; dan 0.9), pada syarat awal bebas penyakit menggunakan metode Euler,



Gambar 2.5 Grafik Perubahan Klas *Susceptible*, dengan Tingkat vaksinasi ($\alpha = 0.1$; 0.696; dan 0.9), Syarat Awal: $s(0) = 1$, $i(0) = 0$, $r(0) = 0$, $v(0) = 0$

Gambar 2.5 menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat vaksinasi, maka semakin rendah jumlah individu *suspectnya*.

b. Perubahan klas *Recovered* dengan perbedaan tingkat vaksinasi ($\alpha = 0.1$; 0.696; dan 0.9), pada syarat awal bebas penyakit menggunakan metode Euler



Gambar 2.6 Grafik Perubahan Klas *Recovered*, dengan Tingkat Vaksinasi ($\alpha = 0.1$; 0.696; dan 0.9), Syarat Awal: $s(0) = 1$, $i(0) = 0$, $r(0) = 0$, $v(0) = 0$

Gambar 2.6 menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat vaksinasi, maka semakin tinggi jumlah individu yang sembuh.

3. PENUTUP

Model SVIR memiliki titik kesetimbangan bebas penyakit Campak pada $(s, i, r, v) =$

$(\frac{1}{1+\alpha}, 0, \frac{\alpha}{1+\alpha}, 0)$ dan persamaan *basic reproduction number* yaitu $R_0 = \frac{1}{(1+\alpha)(1-\alpha)}$.

Titik kesetimbangan yaitu pada $(s, i, r, v) = (119; 103; 0; 10156)$ dan $R_0 = 0.00133 < 1$ maka model stabil. Solusi ini dapat dijadikan acuan menganalisis penyebaran penyakit campak. Berdasarkan hasil yang didapat, jika tingkat imunisasi (vaksinasi) semakin tinggi, maka jumlah individu *suspect* menurun dan meningkatkan jumlah individu yang sembuh (*recovered*).

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Perry, Robert T dan Neal A Halsey, (2004), The Clinical Significance of Measles: A Review. Oxfordjournals.
 - [2] Soedjiono, B., (1995), *Pengantar Model Matematika*. Yogyakarta : FMIPA UGM
 - [3] Liu, Xianning; Yasuhiro Takeuchi; Shingo Iwami, (2007), *SVIR Epidemic Models with Vaccination Strategies*. Science Direct.
 - [4] Johnson, Teri, (2009), *Mathematical Modeling of Diseases : SIR Model*, University of Minnesota, Morris.
 - [5] Campbell, S. L. and Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*. New Jersey: Princeton University Press.
 - [6] Triatmodjo, B., (2002), *Metode Numerik*. Yogyakarta: FT UGM.
-