MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER MENGGUNAKAN ANALISIS SVD

Irdam Haidir Ahmad[1] dan Lucia Ratnasari[2]
[1,2]Jurusan Matematika, FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

Abstract. Linear equation system, $Ax = b$, may be consistent or inconsistent. The approximate solution of inconsistent of linear equation system can be determined. Gauss elimination or Gauss-Jordan elimination can be used to determine the solution of the consistent of linear equation system, but can't for the inconsistent of linear equation system. Singular Value Decomposition (SVD) is matrix factorization method that closely associated with the singular value of the matrix. SVD analysis can be used to determined the orthonormal bases for the four fundamental subspaces associated with matrix *A*. That bases can be used to compute thesolution of the consistent and inconsistent of linear equation system.

Keywords: Linear Equation System, Singular Value Decomposition (SVD), orthonormal base, singular value.

1. PENDAHULUAN

Bentuk umum dari Sistem Persamaan Linier (SPL) adalah :

$$Ax = b.$$

Metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan SPL adalah Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, aturan Cramer, atau menggunakan invers matriks koefisien, di mana solusinya diberikan oleh:

$$x = A^{-1}b.$$

Namun bila matriks *A* yang terbentuk bukanlah matriks persegi atau det(A)=0, maka aturan Cramer dan metode invers matriks koefisien tidak dapat digunakan. Kelemahan lain dari keempat metode di atas adalah apabila SPL tersebut tidak mempunyai pemecahan (tidak konsisten), maka solusi dari SPL tersebut tidak dapat ditentukan.

Untuk mengatasi kekurangan dari metode-metode di atas, ada suatu metode yang juga dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL. Metode tersebut adalah dengan analisis Dekomposisi Nilai Singular atau Singular Value Decomposition (SVD). Dengan menggunakan analisis SVD, solusi dari persamaan selalu dapat dicari meskipun matriks koefisien yang terbentuk bukanlah matriks persegi maupun matriks yang tidak mempunyai invers. Kelebihan lain dari metode ini adalah solusi dari SPL tetap dapat dicari meskipun SPL tersebut tidak mempunyai pemecahan, dalam hal ini solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik.

2. SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)

Singular Value Decomposition atau Dekomposisi Nilai Singular yang selanjutnya ditulis dengan SVD adalah suatu teknik yang digunakan secara luas untuk mendekomposisikan suatu matriks kedalam beberapa komponen matriks yang berkaitan erat dengan nilai singular darimatriksnya. Proses dekomposisi ini sering juga disebut dengan *Faktorisasi*.

Dalam SVD, suatu matriks difaktorkan menjadi tiga buah matriks, di manasalah satu dari matriks tersebut entrinya merupakan nilai singular dari matriksnya. Berikut ini akan diberikan definisi dari nilai singular.

Definisi 2.1[3] *Diberikan matriks dengan elemen-elemennya anggota himpunan kompleks* $A \in C^{mxn}$ *dengan rank(A) = r, di mana* $r \le min(m,n)$*, nilai eigen dari matriks* A^HA *adalah* $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_r > \lambda_{r+1} = \ldots =$

λ_n = 0 akar nilai eigen positif dari A^HA disebut dengan nilai singular (σ) dari matriks A dan dinyatakan dengan

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

Suatu matriks A yang berukuran mxn dan $m \geq n$ (asumsi ini hanya dibuat untuk memudahkan, semua hasil juga akan berlakuj ika$m<n$) dengan rank(A) = r dan $r \leq$ min(m,n),dapat difaktorkan kedalam bentuk :

$$A = USV^H \quad (2)$$

yang disebut dengan SVD dari matriks A, di mana :

U = [u_1 u_2 ... u_m] adalah matriks uniter berukuran mxm

V = [v_1 v_2 ... v_n] adalah matriks unit berberukuran nxn

S = $\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berukuran mxn, di mana $\sum$ adalah matriks diagonal yang berukuran rxr.

Teorema 2.2 [6] *Diberikan matriks A berukuran mxn yang mempunyai rank r dan nilai singularnya adalah $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$. Jika terdapat matriks U, S, dan V maka matriks A dapat difaktorkan kedalam bentuk :*

$$A = USV^H$$

dimana U dan V adalah matriks uniter, S = $\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan $\sum$ adalahmatriks diagonal yang entrinya adalah nilai singular dari matriksA.

Berikut ini akan diberikan penjelasan tentang matriks U, S, dan$V$.

a. Matriks$S$

Matriks S disebut matriks nilai singular dari A karena entri diagonal dari matriks S diisi dengan nilai singular dari A sedangkan entri selain diagonalnya adalah nol. Matriks S berukuran mxn dan mempunyai bentuk :

$S = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dengan

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}$$

b. Matriks$V$

Misalkan V = [v_1 v_2 … v_r v_{r+1} … v_n]. V adalah matriks uniter berukuran nxn. Karena V adalah matriks uniter, maka vektor-vektor kolom dari V membentuk himpunan ortonormal. Vektor-vektor kolom dari matriks V adalah vektor-vektor eigen dari matriks A^HA. Agar vektor-vektor kolom matriks V membentuk himpunan ortonormal, maka vektor-vektor eigen dari A^HA tersebut dinormalisasikan, yaitu :

$$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

x_i adalah vector eigen yang bersesuaian dengan nilai eigenλ_i.

Untuksetiap $r+1 \leq i \leq n$, v_i akan membentuk basis ortonormal untuk$N(A)$. Sedangkan untuk setiap $1 \leq i \leq r$,v_i akan membentuk basis ortonormal untuk$R(A^H)$ dan himpunan {v_1, v_2, …, v_n} membentuk basis ortonormal untukC^n.

c. Matriks$U$

Misalkan U = [u_1 u_2 … u_r u_{r+1} … u_m]

U adalah matriks uniter berukuran mxm. Basis ortonormal dari $R(A)$ didefinisikan oleh: [4]

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i ,$$

untuk setiap u_i dengan $1 \leq i \leq r$, akan berada di dalam ruang kolom dari A. Sedangkan untuk setiap u_i dengan $r+1 \leq i \leq m$ akan membentuk basis ortonormal untuk $N(A^H)$ dan himpunan {u_1, u_2, …, u_m} membentuk basis ortonormal untuk C^m.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa $A = USV^HAV$ $= A\ (v_1 \ldots\ v_r\ \ v_{r+1} \ldots\ v_n)$

$U^HAV = U^H A (v_1 \ldots\ v_r\ \ v_{r+1} \ldots\ v_n)$
$= U^H (Av_1 ..\ Av_r\ \ Av_{r+1} \ldots Av_n)$
$= U^H (\sigma_1 u_1 \ldots\ \sigma_r u_r\ \ 0 \ldots\ 0)$
$= (\sigma_1 U^H u_1 \ldots \sigma_r U^H u_r\ \ 0 \ldots\ 0)$
$= (\sigma_1 e_1 \ldots\ \sigma_r e_r\ \ 0 \ldots\ 0)$
$U^H AV = S$
$AV = US$
atau dengan kata lain $A = USV^H$.

Contoh 2.3

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, akan dicari SVD dari matriks A.

Penyelesaian :

$A^H = \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{bmatrix}$, maka $A^HA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Matriks A berukuran 3x2. Nilai eigen dari matriks A^HA adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$, vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut adalah $x_1 = [\ 1\ \ \ 1\ ]^T$dan $x_2 = [\ -1\ \ 1\ ]^T$.

- Menyusun matriks$S$
  Nilai singular dari matris A adalah
  $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$
  $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$
  Matriks $\sum$ yang terbentuk adalah $\sum = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka $S = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Menyusun matriks V
  $v_i = \dfrac{1}{\|x_i\|} x_i$
  maka $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ dan $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
  sehingga $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
- Menyusun matriks U
  $u_i = \dfrac{1}{\sigma_i} Av_i$
  maka$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$ dan$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$,
  sehingga $U^* = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

matriks tersebut mempunyai ukuran 3x2, padahal seharusnya berukuran 3x3. Agar berukuran 3x3, maka matriks U^* harus ditambahkan satu kolom lagi, di mana kolom tersebut saling ortonormal dengan vector kolom lainnya. Misalnyadiambil

$u_3 = \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, sehingga

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Akhirnya didapatkan SVD dari matriks A, yaitu :
$A = USV^H$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{i\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i & i\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

3. MENYELESAIKAN SPL MENGGUNAKAN ANALISIS SVD

Pada bagian ini, akan dijelaskan bagaimana analisis SVD dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu SPL. Seperti yang telah diketahui, suatu SPL mempunyai bentuk umum

$$Ax = b \qquad (3)$$

dimana A merupakan matriks koefisien yang akan dicari bentuk SVD-nya langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan SPL menggunakan analisis SVD adalah :

Langkah 1

Dengan menggunakan analisis SVD dari matriks A : $C^n \rightarrow C^m$, akan didapatkan vektor $\{v_1, v_2, \dots , v_r\}$ dan vektor $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots , v_n\}$ yang masing-masing merupakan basis ortonormal dari $R(A^H)$ dan $N(A)$, serta vektor $\{u_1, u_2, \dots , u_r\}$ danvektor $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots , u_m\}$ yang masing-masing merupakan basis ortonormal dari $R(A)$ dan $N(A^H)$.

Langkah 2

Suatu SPL akan konsisten jika dan hanya jika b berada dalam $R(A)$. Untuk mengetahui bahwa b berada dalam $R(A)$, maka akan diuji apakah b sama dengan proyeksi b pada $R(A)$, di mana $R(A)$ direntang oleh vektor $\{u_1, u_2,\dots , u_r\}$. Proyeksi b pada $R(A)$ diberikan oleh persamaan di bawah ini :

$$proy_{R(A)}b=\sum_{k=1}^{r}\langle b\ ,u_k\rangle\, u_k \qquad (4)$$

Berdasarkan pengujian di atas akan diperoleh dua kasus, yaitu :

(i) Kasus A

Untuk $b\in R(A)$. Pada kasus ini, sistemmempunyai paling sedikitsatusolusi.Karena$b\in R(A)$,maka $b = proy_{R(A)}b$ sehingga menurut persamaan (4) diperoleh persamaan :

$$b=\sum_{k=1}^{r}\langle b\ ,u_k\rangle\, u_k$$

Karena $u_k=\frac{1}{\sigma_k}Av_k$, maka

$$b=\sum_{k=1}^{r}\langle b\ ,u_k\rangle\,\frac{Av_k}{\sigma_k}$$

operasi matriks bersifat linier, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$b=A\sum_{k=1}^{r}\langle b\ ,u_k\rangle\,\frac{v_k}{\sigma_k} \qquad (5)$$

dengan membandingkan persamaan (5) dengan persamaan (3), didapatkan

$$x=\sum_{k=1}^{r}\frac{\langle b\ ,u_k\rangle}{\sigma_k}\,v_k \qquad (6)$$

yang merupakan solusi dari SPL pada persamaan (3). Tetapi, nilai solusi dari sistem linier bergantung pada ruang nol dari matriks A yaitu $N(A)$. Sehinggaadaduasubkasus, yaitu :

a. Jika$N(A) = \{\mathbf{0}\}$, maka sistem linier mempunyai satu solusi (solusitunggal) di mana solusinya diberikan oleh persamaan (6).
   Untuk membuktikan ketunggalan dari solusinya, akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi.
   Misalkan terdapat solusi lain dari persamaan (3) yaitu x^*, maka $Ax = b$ dan $Ax^* = b$ kedua-duanya bernilai benar. Dengan mengurangkan keduanya, akan didapatkan
   $A(x - x^*) = Ax - Ax^* = b - b = 0$
   Karena $N(A) = \{\mathbf{0}\}$, maka berlaku $A0 = 0$. Hal ini berarti $x - x^* = 0$ atau $x = x^*$, dengan kata lain solusinya adalah tunggal.
b. Jika $N(A) \neq \{\mathbf{0}\}$, maka sistem linier mempunyai tak terhingga banyaknya solusi dan solusinya diberikan oleh :

$$x_{\inf} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b , u_k \rangle}{\sigma_k} v_k + \sum_{k=r+1}^{n} \mu_k v_k \qquad (7)$$

yang diperoleh dari :

Setiap solusi umum dari SPL dapat dinyatakan dengan $X = x + x_N$, di mana $x_N \in N(A)$. Pada subkasus a, $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ sehingga $X = x$. Namun karena pada kasus ini $N(A) \neq \{\mathbf{0}\}$, maka terdapat titik $x_N \in N(A)$ sedemikian sehingga $Ax_N = 0$. Jadi, solusi umum untuk kasus ini adalah $X = x + x_N$, atau di sini dinotasikan dengan

$$x_{inf} = x + x_N. \qquad (8)$$

Dengan demikian, untuk setiap titik-titiknyaberlaku

$A(x_{inf}) = A(x + x_N) = Ax + Ax_N = b + 0 = b$.

Setiap titik-titik x_N dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor basis.Karena $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots ,v_n\}$ merupakan basis untuk $N(A)$, maka x_N dapat dinyatakan dengan

$$x_N = \sum_{k=r+1}^{n} \mu_k v_k \qquad (9)$$

sebelumnya telah diketahui bahwa

$$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b , u_k \rangle}{\sigma_k} v_k$$

sehingga $x_{inf} = x + x_N$ dapat dinyatakan dengan

$$x_{\inf} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b , u_k \rangle}{\sigma_k} v_k + \sum_{k=r+1}^{n} \mu_k v_k ,$$ untuk suatu $\mu_k \in C$

(ii) Kasus B

Untuk $b \notin R(A)$. Pada kasus ini system tidak mempunyai solusi, sehingga hanya bisa dihitung pendekatan terbaik dari solusinya. Dalam hal ini, solusi pendekatan terbaik tersebut adalah vekor x_r sehingga

$$Ax_r = b_r ,$$

Dimana $b_r$di dalam$R(A)$, dan b_r adalah vektor yang terdekat dengan b. Solusi pendekatan terbaik pada kasus ini diberikan juga oleh persamaan (6), yaitu

$$x_r = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b , u_k \rangle}{\sigma_k} v_k \qquad (10)$$

x_r disebut sebagai solusi pendekatan terbaik, artinya jika $Ax_r = b_r$, maka b_r adalah vektor di $R(A)$ yang terdekat dengan b. Sehingga vektor $(b - b_r)$ akan tegak lurus dengan setiap vektor di $R(A)$ termasuk vektor yang merentang $R(A)$ yaitu vektor-vektor u_i dengan $1 \leq i \leq r$, u_i adalah vektor yang ortonormal, maka berlaku:

$$\langle (b-b_r), u_i \rangle = \langle (b - Ax_r), u_i \rangle$$

$$= \left\langle \left(b - A\left(\sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b , u_k \rangle}{\sigma_k} v_k \right) \right), u_i \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(b - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b , u_k \rangle}{\sigma_k} Av_k \right), u_i \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(b - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle b , u_k \rangle}{\sigma_k} \sigma_k u_k \right), u_i \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(b - \sum_{k=1}^{r} \langle b , u_k \rangle u_k \right), u_i \right\rangle$$

$$= \langle b , u_i \rangle - \sum_{k=1}^{r} \langle b , u_k \rangle \langle u_k , u_i \rangle$$

$$= \langle b , u_i \rangle - \langle b , u_i \rangle = 0$$

Hal ini menunjukkan bahwa $(b - Ax_r)$ adalah tegaklurus dengan setiap vektor di $R(A)$ danpersamaan (10) merupakan solusi pendekatan terbaik.

Contoh 3.1

Diketahuisuatu SPL $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

SPL tersebut akan dicari solusinya.

Penyelesaian :

Dari SPL tersebut, dapat disusun menjadi $Ax = b$, yaitu ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriks$U$, S, dan$V$ yang terbentuk adalah

$$U = \begin{bmatrix} 0.0243 & -0.8243 & -0.5657 \\ 0.8657 & -0.2657 & 0.4243 \\ -0.5 & -0.5 & 0.7071 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 4.1317 & 0 \\ 0 & 1.7114 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.6552 & -0.7555 \\ 0.7555 & -0.6552 \end{bmatrix}$$

Dari matriks-matriks di atas, dapat ditentukan basis-basis ortonormal untuk *R(A)*, *R(A*^{H}*)*, *N(A)*, dan *N(A*^{H}*)*, yaitu :

Basis dari *R(A)* : $\{u_1, u_2\}$ = $\left\{ \begin{pmatrix} 0.0243 \\ 0.8657 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.8243 \\ -0.2657 \\ -0.5 \end{pmatrix} \right\}$

Basis dari *R(A*^{H}*)* : $\{v_1, v_2\}$ = $\left\{ \begin{pmatrix} -0.6552 \\ 0.7555 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.7555 \\ -0.6552 \end{pmatrix} \right\}$

Basis dari *N(A)* : $\{v_3\}$ = { }

Basis dari *N(A*^{H}*)* : $\{u_3\}$ = $\left\{ \begin{pmatrix} -0.5657 \\ 0.4243 \\ 0.7071 \end{pmatrix} \right\}$

Sekarang akan ditentukan apakah *b* sama dengan proyeksi *b* pada *R(A)*.

$$\begin{aligned} proy_{R(A)} b &= \sum_{k=1}^{2} \langle b, u_k \rangle u_k \\ &= \langle b, u_1 \rangle u_1 + \langle b, u_2 \rangle u_2 \\ &= \begin{bmatrix} -0.0015 \\ -0.0533 \\ 0.0308 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.08159 \\ 0.9933 \\ 1.8692 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.08 \\ 0.94 \\ 1.9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh $proy_{R(A)} b \neq b = (3, 1, 2)$

Karena $proy_{R(A)} b \neq b$, berarti $b \notin R(A)$. Hal tersebut menandakan SPL ini tidak mempunyai solusi. Akan tetapi solusi pendekatan terbaiknya dapat dicari, yaitu :

$$\begin{aligned} x = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle b, u_k \rangle}{\sigma_k} v_k &= \frac{\langle b, u_1 \rangle}{\sigma_1} v_1 + \frac{\langle b, u_2 \rangle}{\sigma_2} v_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0098 \\ -0.0112 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.6502 \\ 1.4312 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.66 \\ 1.42 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi solusi pendekatan terbaik dari SPL ini adalah : x_1 = 1.66 dan x_2 = 1.42.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan ini dapat disimpulkan bahwa suatu SPL *Ax = b* akan konsisten jika dan hanya jika proyeksi *b* pada *R(A)* sama dengan *b*. Selain itu, berdasarkan SVD dari matriks *A*, dapat diketahui basis-basis untuk *R(A)*, *R(A*^{H}*)*, *N(A)*, dan *N(A*^{H}*)* sehingga setiap SPL dapat dicari solusinya dengan menggunakan analisis SVD dengan mudah.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Akritas, A. G., G. I. Malaschonok, and P. S. Vigklas, (2006), *The SVD-Fundamental Theorem of Linear Algebra*, Nonlinear Analysis :Modelling and Control. (www.lana.lt, diakses tanggal 14 Februari2009).

[2] Clark, David, (2007), *A Note On The Pseudoinverse*. (www.farinhansford.com, diaksestanggal 13 April 2009).

[3] http://himatika.fmipa.ugm.ac.id, *Dekomposisi Matriks*. (diakses tanggal 14 Februari 2009).

[4] Kalman, Dan, (2002), *A Singularly Valuable Decomposition : The SVD of a Matrix*, The American University, Washington, DC. (www.math.umn.edu, diakses tanggal 28 Februari 2009).

[5] Leon, Steven J., (2005). *Aljabar Linear dan Aplikasinya, edisi kelima*, Erlangga, Jakarta.

[6] Nicholson, W. Keith, (2001), *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill, Singapore.