



SISTEM KENDALI PROPORSIONAL, INTEGRAL, DAN DERIVATIF (PID) PADA PERSAMAAN PANAS*

Muhammad Ikhwan*, Said Munzir, dan Nurmaulidar

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Syiah Kuala, Darussalam - Banda Aceh
*Email: muhammad.ikhwan10@gmail.com

Abstract. *This research showed the application of Proportional, Integral, and Derivative (PID) control system on heat equations that has non-integer ordered solutions on Laplace domain. Zala tuning method and Ziegler-Nichols method; which is ultimate cycle and process reaction method, are used to determine the value of K_p , T_i and T_d as constants in PID to maintain the temperature of 1°C on the position of $x = 3$ m from the heat source with $k = 0,042 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ diffusivity. Based on the results, there were ten systems that were closest in the desired criteria. With regards to overshoot and the time taken to reach the stable position, therefore the ten systems that are produced have not many differences in strengths and weaknesses.*

Keywords: *PID, Persamaan Panas, Ziegler-Nichols, Ultimate Cycle, Process Reaction.*

I. PENDAHULUAN

Persamaan panas dapat didefinisikan sebagai persamaan yang menggambarkan proses merambatnya panas, pengaruh fluks panas, atau temperatur terhadap medium. Persamaan panas dapat dipahami pada perambatan panas pada batang logam homogen, perambatan panas pada benda yang berupa luasan, misalnya lempeng logam, dan perambatan panas pada medium yang tidak berbentuk seperti air dan udara. Sebagian besar perlengkapan rumah tangga dengan sistem otomatis menggunakan energi listrik yang diubah menjadi panas. Selain hasil utama, panas juga berupa hasil sampingan dari aktivitas mesin.

Difusi panas diatur oleh persamaan diferensial parsial linear dalam bentuk [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Dimana k adalah difusivitas, t adalah waktu, u adalah suhu dan x adalah posisi dalam koordinat Cartesian. Sistem ini melibatkan solusi persamaan

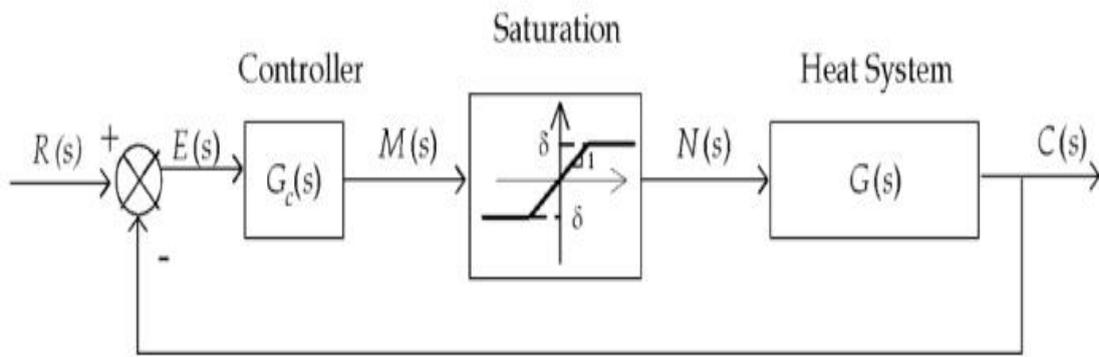
diferensial parsial (PDP) tipe parabola yang berdasarkan teori menjamin adanya solusi yang unik [2]:

$$U(x, s) = \frac{U_0}{s} G(s), \quad G(s) = e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}} \quad (2)$$

dengan menerapkan invers transformasi Laplace, diperoleh solusi [3]:

$$u(x, t) = \frac{U_0}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \quad (3)$$

Pengendalian persamaan panas memiliki karakteristik tersendiri yang disebabkan oleh solusi berorde tidak bulat pada domain Laplace [2]. Solusi persamaan panas didekati dengan metode Crank-Nicholson, sedangkan sistem kendali yang digunakan adalah *proportional plus integral plus derivative* (PID) pada posisi $x = 3$ dari sumber panas dan difusivitas $k=0,042 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ untuk mencapai suhu 1°C . Komponen yang menjadi pengontrol adalah konstanta proporsional K_p , *integral time constant* T_i , dan *derivative time*



Gambar 1. Strategi sistem kendali persamaan panas dengan sistem kendali PID [4]:

constant T_d . Strategi sistem kendali persamaan panas dapat dilihat pada Gambar 1, dimana

$$G_c = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right) \quad (4)$$

dengan

$$T_i = \frac{\kappa_p}{\kappa_i} \text{ dan } T_d = \frac{\kappa_d}{\kappa_p} \quad (5)$$

persamaan (4) diubah dalam domain Laplace, pengontrol memiliki fungsi transfer:

$$G_c(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \quad (6)$$

Bolton [5] mengatakan bahwa metode empiris yang sering digunakan untuk penalaan adalah metode Ziegler dan Nichols. Metode ini beranggapan bahwa fungsi transfer siklus terbuka dapat didekati dengan sistem orde satu dengan waktu tunda dan dapat dikembangkan dua prosedur tala. Metode yang pertama disebut metode *ultimate cycle* berdasarkan pada hasil dari tes *loop* tertutup, dan yang kedua disebut metode *process reaction* berdasarkan pada hasil dari tes *loop* terbuka. Keduanya dirancang untuk memberikan pengaturan yang mengakibatkan teredam sementara berdasarkan respon/tanggapan dengan rasio peluruhan $\frac{1}{4}$.

II. METODOLOGI PENELITIAN

Ultimate cycle

Prosedur tala dengan metode *ultimate cycle* [5] adalah sebagai berikut:

1. Pengontrol diatur ke operasi manual dekat dengan kondisi operasi normalnya.

2. Semua kontrol dimatikan kecuali proporsional.
3. K_p diatur ke nilai yang kecil terlebih dahulu.
4. Pengontrol diatur kembali ke operasi otomatis, kemudian diperoleh *set point* yang berubah 5 s.d. 10%.
5. Respon diteliti.
6. K_p diatur ke nilai yang lebih besar.
7. *Set point* yang diperoleh berubah 5 s.d. 10%.
8. Respon diteliti.
9. Prosedur 6, 7, dan 8 diulangi sampai respon menunjukkan osilasi berkelanjutan yang tidak tumbuh atau meluruh. Perhatikan nilai K_p yang memberikan kondisi ini disebut K_{pu} dan periode dari osilasi disebut T_u .
10. Tabel berikut digunakan untuk menentukan pengontrol yang optimal.

Tabel 1. Pengaturan berdasarkan metode *ultimate cycle*

| Tipe pengontrol | K_p | T_i | T_d |
|-----------------|---------------|-----------|---------|
| P | $0,5 K_{pu}$ | | |
| PI | $0,45 K_{pu}$ | $T_u/1,2$ | |
| PID | $0,6 K_{pu}$ | $T_u/2$ | $T_u/8$ |

Process reaction

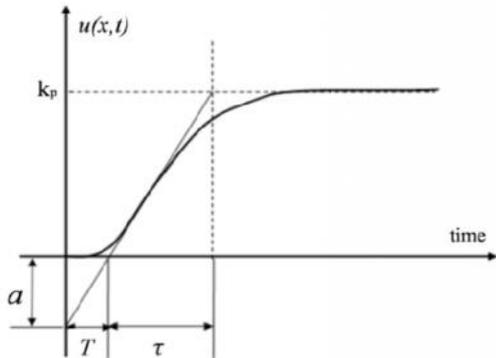
Prosedur tala dengan metode *process reaction* [2] adalah sebagai berikut:

1. *Loop* kontrol dibuka, elemen kontrol dan elemen koreksi dibentuk dalam bentuk umum.
2. Pengontrol diatur ke operasi manual dan *plant* dekat dengan kondisi operasi normalnya.
3. Perubahan *step* yang kecil digunakan untuk elemen koreksi dan catat respon sistem (Gambar 2).

Penentuan K_p , T_i , dan T_d yang Optimal

K_p , T_i , dan T_d yang diperoleh dari pengendalian menggunakan PID dengan metode tala *ultimate cycle* dan metode tala *process reaction* selanjutnya di analisa. Kriteria pengendalian yang

ingin dicapai adalah waktu *delay* yang cepat, *overshoot* < 30%, waktu yang dibutuhkan naik dari 10% ke 90% yang cepat, waktu yang dibutuhkan untuk mencapai puncak pertama yang cepat, dan waktu yang dibutuhkan respon sistem stabil di *steady state* yang cepat (Tabel 2).



Gambar 2. Step respon system orde pertamadengan waktu tunda

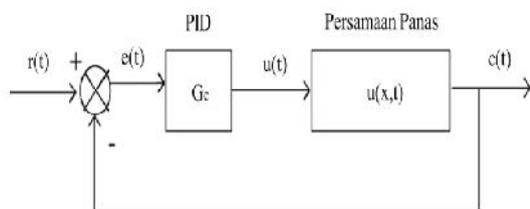
Tabel 2. Pengaturan berdasarkan metode *process reaction* [6]

| Tipe pengontrol | K_p | T_i | T_d |
|-----------------|---------|-------|-------|
| P | $1/a$ | | |
| PI | $9/a$ | $3T$ | |
| PID | $1,2/a$ | $2T$ | $T/2$ |

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Modifikasi strategi sistem kendali

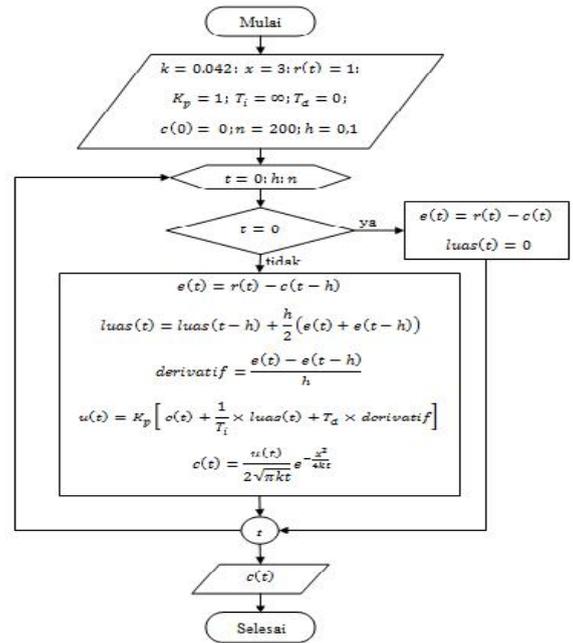
Modifikasi strategi sistem kendali persamaan panas berupa modifikasi domain frekuensi ke domain waktu. Berdasarkan modifikasi strategi diperoleh kerangka strategi sistem kendali persamaan panas dalam domain waktu dapat dilihat pada Gambar 3 dengan diagram alir penyelesaian pada Gambar 4.



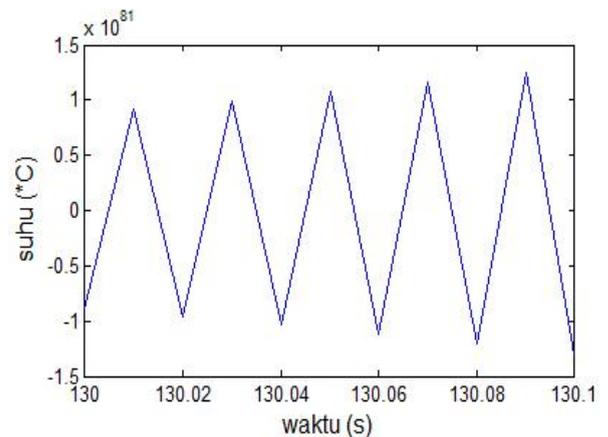
Gambar 3. Strategi sistem kendali PID pada persamaan panas hasil modifikasi

Metode tala ultimate cycle

Pada metode ini, penggunaan pengontrol proporsional dimulai dengan nilai yang kecil pada awal pengontrolan. Pada proses pengontrolan dengan $K_p = 13$ diperoleh hasil yang memiliki osilasi berkelanjutan dan berpotensi menghasilkan nilai K_{pu} dan T_u .



Gambar 4. Diagram alir pengendalian persamaan panas



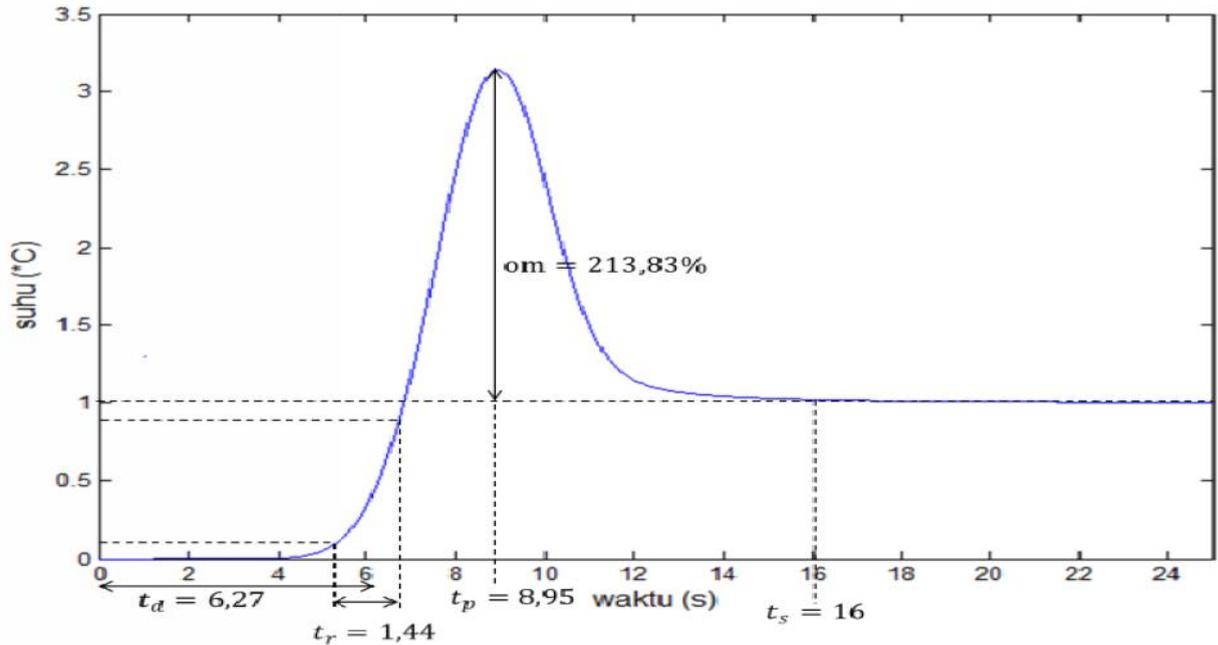
Gambar 5. Metode ultimate cycle, $K_p = 13$

Pada tahap ini dapat diambil nilai K_{pu} yaitu $K_{pu} = K_p = 13$. Nilai T_u ditentukan dengan mengamati periode osilasi respon yaitu periode osilasi $T_u = 0,02$ (Gambar 5).

Tabel 3. Proses tala metode ultimate cycle

| Tipe pengontrol | K_p | T_i | T_d |
|-----------------|--------------------|-------------------------|---------------------------|
| PID | $0,6 K_{pu} = 7,8$ | $T_u/2 = 0,02/2 = 0,01$ | $T_u/8 = 0,02/8 = 0,0025$ |

Berdasarkan hasil dari Tabel 3, sistem kendali PID pada persamaan panas menggunakan metode ultimate cycle menghasilkan kendali seperti Gambar 6. Gambar tersebut menunjukkan sistem membutuhkan waktu *delay* $t_d = 6,27$ detik untuk naik 50% atau $0,5$ °C. Waktu yang dibutuhkan sistem untuk naik dari 10% ($0,1$ °C) ke 90% ($0,9$ °C) adalah $t_r = 1,44$ detik.



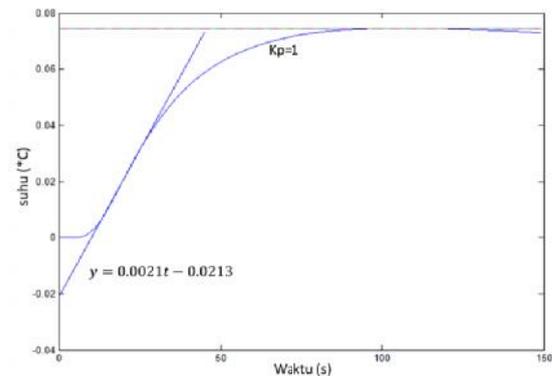
Gambar 6. Hasil sistem kendali menggunakan metode ultimate cycle

Ditinjau dari grafik hubungan waktu dan suhu, sistem persamaan panas hanya mengalami satu kali *overshoot*. Sistem ini mengalami suhu tertinggi pada waktu $t_p = 8,95$ detik yaitu sebesar $3,138^\circ\text{C}$. Prosentase *overshoot* maksimum adalah $213,83\%$. Sistem persamaan panas dengan konstanta proporsional $K_p = 7,8$, waktu konstan integral $T_i = 0,01$, dan waktu konstan derivatif $T_d = 0,0025$ menunjukkan respon yang menuju posisi yang stabil yaitu *steady state* 1°C saat waktu $t_s = 16$ detik.

Metode tala process reaction

Metode ini dimulai dengan membentuk elemen general untuk mendapatkan nilai pengontrol pada sistem kendali PID. Pembentukan dimulai dengan menggambarkan grafik persamaan panas pada kondisi normalnya seperti Gambar 7. Suhu tertinggi yang dapat dicapai persamaan panas ini adalah $0,0746$ yang selanjutnya disebut $k_p = 0,0746$. Proses selanjutnya adalah menentukan garis yang menyinggung gambar operasi normalnya. Titik yang diambil adalah $A(45,0.0746)$ dan $B(10,0)$. Selanjutnya dibuat garis dari titik A dan B yang menghasilkan persamaan garis. Gambar 7 menunjukkan persamaan garis tersebut dan dapat bersinggungan dengan respon operasi normalnya, dimana $T = 10$, $\tau = 35$ dan $\alpha = 0.0213$ yang menghasilkan:

$$\bar{G}(s) = \frac{0.0746}{35s + 1} e^{-10T} \quad (7)$$

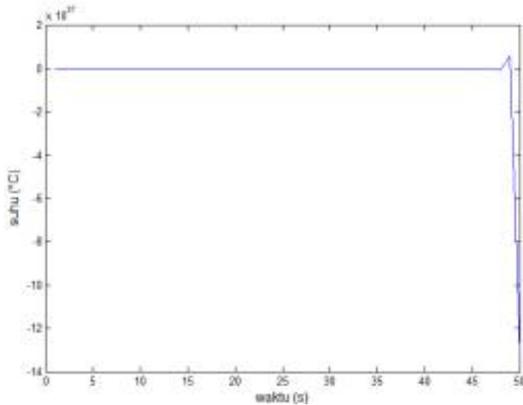


Gambar 7. Grafik pembentukan elemen general

Tabel 4. Proses tala metode process reaction

| Tipe pengontrol | K_p | T_i | T_d |
|-----------------|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------|
| PID | $\frac{1.2/a}{=1.2/0.0213}$ | $\frac{2T}{=2 \times 10} = 20$ | $\frac{T/2}{=10/2=5}$ |

Berdasarkan hasil dari Tabel 4, sistem kendali PID pada persamaan panas menggunakan metode ultimate cycle menghasilkan kendali seperti Gambar 8. Berdasarkan gambar tersebut maka sistem persamaan panas memiliki *delay* dan *overshoot*. Suhu yang terus meningkat menunjukkan sistem tidak mampu mempertahankan suhu yang diinginkan. Sistem ini menunjukkan respon yang tidak stabil dan tidak sesuai dengan posisi yang diinginkan yaitu *steady state* $= 1^\circ\text{C}$.



Gambar 8. Hasil sistem kendali menggunakan metode *process reaction*

Konstanta proporsional K_p optimum

Metode tala *ultimate cycle* mampu mengendalikan persamaan panas menuju posisi masukan yang diinginkan yaitu *steady state* sebesar 1°C . Perubahan konstanta proporsional K_p dilakukan hingga puncak *overshoot* mendekati *set point* seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 5. Tabel tersebut menunjukkan bahwa penurunan nilai konstanta proporsional menyebabkan penurunan prosentase *overshoot*, namun berbanding terbalik dengan parameter lain yang menunjukkan peningkatan nilai. Waktu yang dibutuhkan untuk mencapai 50% *steady state*, mencapai puncak pertama, dan mencapai kestabilan di *steady state* semakin meningkat. Hal yang sama juga ditunjukkan oleh rasio penurunan, namun berbeda dengan jumlah osilasi sebelum *steady state*. Parameter sistem pada $K_p = 7$ menunjukkan waktu *delay* yang cepat, waktu naik yang pendek, waktu saat puncak pertama yang cepat dan waktu stabil yang cepat. Kelebihan yang terlihat dari waktu tidak dapat menjamin K_p ini menjadi K_p optimum, karena *overshoot* yang terbentuk masih sangat besar. *Overshoot* menunjukkan suhu tertinggi yang terjadi pada sistem. Hal ini juga dialami oleh sistem dengan $K_p = 5$, $K_p = 1$, $K_p = 0,5$, $K_p = 0,1$, dan $K_p = 0,05$.

Sistem persamaan panas pada $K_p = 0,01$ telah menunjukkan hasil yang baik. Hal ini telah memenuhi kriteria pengendalian yaitu *overshoot* < 30% dan waktu parameter yang cepat. Sistem persamaan panas pada $K_p = 0,0075$, $K_p = 0,005$, dan $K_p = 0,0035$ memiliki prosentase *overshoot* kurang dari 30%, namun sistem-sistem ini memiliki kelemahan pada parameter lain. Waktu *delay* yang melambat, waktu naik yang panjang, waktu mencapai puncak pertama yang lama, dan waktu stabil yang sangat lama merupakan kelemahan sistem ini. Kelemahan sistem dengan nilai parameter tersebut dapat diselesaikan dengan perubahan waktu integral T_i dan perubahan waktu

derivatif T_d , sehingga sistem dapat berjalan dengan baik.

Konstanta integral K_i optimum

Sistem persamaan panas menggunakan proporsional, integral, dan derivatif (PID) yang telah diselesaikan dengan metode sebelumnya memiliki kelemahan pada prosentase *overshoot*. Waktu integral mampu mereduksi waktu yang panjang pada parameter sistem sehingga menunjukkan hasil yang optimal. Sepuluh sistem yang memenuhi kriteria penelitian berdasarkan Tabel 6, kemudian dipilih sebagai sistem yang dapat dilanjutkan prosesnya. Sistem-sistem tersebut di pilih dengan memperhatikan *overshoot* dan waktu yang dibutuhkan menuju ke posisi stabil. Sistem-sistem tersebut disajikan pada Tabel 7. Sepuluh sistem yang terbentuk dapat dikategorikan ke dalam dua kategori keunggulan yaitu prosentase *overshoot* dan waktu mencapai posisi stabil. Kedua kategori ini saling bertolak belakang, dimana hasil yang dianggap paling baik berdasarkan *overshoot* belum tentu hasil terbaik pada waktu mencapai posisi stabil. Dengan memperhatikan kedua kategori tersebut, maka kesepuluh sistem yang dihasilkan memiliki keunggulan dan kelemahan yang tidak jauh berbeda.

KESIMPULAN

Metode *ultimate cycle* memberikan nilai $K_p = 7,8$, $T_i = 0,02$, dan $T_d = 0,005$ yang menyebabkan sistem kendali PID berhasil mengendalikan persamaan panas sehingga suhu dapat dipertahankan 1 satuan suhu. Metode *process reaction* memberikan nilai $K_p = 56,338$, $T_i = 20$, dan $T_d = 5$ yang menyebabkan sistem kendali PID tidak berhasil mengendalikan persamaan panas. Proses penentuan konstanta proporsional K_p optimum dan waktu integral T_i optimum menunjukkan sistem dengan $K_p = 0,01$, $T_i = 0,01$, $K_p = 0,0075$, $T_i = 0,009$, $K_p = 0,0075$, $T_i = 0,008$, $K_p = 0,0075$, $T_i = 0,007$, $K_p = 0,0075$, $T_i = 0,006$, $K_p = 0,005$, $T_i = 0,006$, $K_p = 0,005$, $T_i = 0,005$, $K_p = 0,005$, $T_i = 0,004$, $K_p = 0,0035$, $T_i = 0,004$, dan $K_p = 0,0035$, $T_i = 0,003$ mampu mengendalikan sistem persamaan panas dengan *overshoot* kurang dari 30% dan waktu mencapai posisi stabil kurang dari 120 detik. Sepuluh sistem persamaan panas yang terbentuk, merupakan hasil yang optimal untuk mempertahankan suhu sebesar 1°C pada posisi $x = 3$ m dari sumber panas dengan difusivitas benda $k = 0,042 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Tabel 5. Perubahan parameter sistem berdasarkan perubahan konstanta proporsional

| K_p | om (%) | $t_d(s)$ | $t_r(s)$ | $t_p(s)$ | sr | $t_s(s)$ | Nos |
|--------|--------|----------|----------|----------|---------|----------|-----|
| 7 | 210,45 | 6,34 | 1,48 | 9,08 | 0,32211 | 16,35 | 1 |
| 5 | 199,97 | 6,59 | 1,59 | 9,53 | 0,33337 | 17,53 | 1 |
| 1 | 150,78 | 8,11 | 2,36 | 12,37 | 0,39876 | 25,56 | 1 |
| 0,5 | 130,14 | 8,99 | 2,87 | 14,12 | 0,43452 | 30,81 | 1 |
| 0,1 | 83,94 | 11,97 | 4,94 | 20,56 | 0,54366 | 49,80 | 1 |
| 0,05 | 64,99 | 13,92 | 6,59 | 25,21 | 0,6061 | 61,88 | 1 |
| 0,01 | 24,30 | 22 | 15,99 | 48,12 | 0,80451 | 103,76 | 1 |
| 0,0075 | 17,70 | 24,45 | 19,76 | 56,35 | 0,84962 | 407,06 | 1 |
| 0,005 | 8,92 | 28,89 | 28,01 | 73,18 | 0,91811 | 1188,30 | 1 |
| 0,0035 | 1,83 | 34,21 | 40,90 | 97,49 | 0,98203 | 2564,71 | 1 |

Tabel 6. Perubahan parameter sistem berdasarkan perubahan konstanta integral.

| T_i | K_p | om (%) | $t_d(s)$ | $t_r(s)$ | $t_p(s)$ | Sr | $t_s(s)$ | Nos |
|-------|--------|--------|----------|----------|----------|---------|----------|-----|
| 0,009 | 0,0075 | 20,09 | 23,50 | 18,24 | 53,07 | 0,83271 | 109,56 | 1 |
| 0,008 | 0,0075 | 22,80 | 22,51 | 16,72 | 49,78 | 0,81433 | 105,82 | 1 |
| 0,007 | 0,0075 | 25,92 | 21,48 | 15,24 | 46,46 | 0,79416 | 101,54 | 1 |
| 0,006 | 0,0075 | 29,59 | 20,40 | 13,76 | 43,08 | 0,77166 | 96,65 | 1 |
| 0,009 | 0,005 | 11,14 | 27,61 | 25,41 | 68,01 | 0,89977 | 933,21 | 1 |
| 0,008 | 0,005 | 13,68 | 26,28 | 22,92 | 62,96 | 0,87966 | 700,36 | 1 |
| 0,007 | 0,005 | 16,62 | 24,92 | 20,54 | 58,00 | 0,85749 | 482,30 | 1 |
| 0,006 | 0,005 | 20,09 | 23,50 | 18,24 | 53,07 | 0,83271 | 109,55 | 1 |
| 0,005 | 0,005 | 24,30 | 22,01 | 15,98 | 48,12 | 0,80451 | 103,75 | 1 |
| 0,004 | 0,005 | 29,59 | 20,40 | 13,76 | 43,08 | 0,77166 | 96,65 | 1 |
| 0,009 | 0,0035 | 3,85 | 32,46 | 36,22 | 88,90 | 0,96293 | 2053,61 | 1 |
| 0,008 | 0,0035 | 6,19 | 30,70 | 31,95 | 80,83 | 0,94171 | 1595,10 | 1 |
| 0,007 | 0,0035 | 8,92 | 28,90 | 28,01 | 73,18 | 0,91811 | 1188,30 | 1 |
| 0,006 | 0,0035 | 12,19 | 27,04 | 24,33 | 65,83 | 0,89135 | 830,90 | 1 |
| 0,005 | 0,0035 | 16,17 | 25,12 | 20,87 | 58,70 | 0,86081 | 513,36 | 1 |
| 0,004 | 0,0035 | 21,21 | 23,08 | 17,59 | 51,66 | 0,82501 | 108,01 | 1 |
| 0,003 | 0,0035 | 27,94 | 20,87 | 14,39 | 44,53 | 0,78162 | 98,82 | 1 |

Tabel 7. Sistem-sistem yang memenuhi kriteria penelitian

| No | K_p | T_i | om (%) | $t_d(s)$ | $t_r(s)$ | $t_p(s)$ | sr | $t_s(s)$ | Nos |
|----|--------|-------|--------|----------|----------|----------|---------|----------|-----|
| 1 | 0,01 | 0,01 | 24,30 | 22 | 15,99 | 48,12 | 0,80451 | 103,76 | 1 |
| 2 | 0,0075 | 0,009 | 20,09 | 23,50 | 18,24 | 53,07 | 0,83271 | 109,56 | 1 |
| 3 | 0,0075 | 0,008 | 22,80 | 22,51 | 16,72 | 49,78 | 0,81433 | 105,82 | 1 |
| 4 | 0,0075 | 0,007 | 25,92 | 21,48 | 15,24 | 46,46 | 0,79416 | 101,54 | 1 |
| 5 | 0,0075 | 0,006 | 29,59 | 20,40 | 13,76 | 43,08 | 0,77166 | 96,65 | 1 |
| 6 | 0,005 | 0,006 | 20,09 | 23,50 | 18,24 | 53,07 | 0,83271 | 109,55 | 1 |
| 7 | 0,005 | 0,005 | 24,30 | 22,01 | 15,98 | 48,12 | 0,80451 | 103,75 | 1 |
| 8 | 0,005 | 0,004 | 29,59 | 20,40 | 13,76 | 43,08 | 0,77166 | 96,65 | 1 |
| 9 | 0,0035 | 0,004 | 21,21 | 23,08 | 17,59 | 51,66 | 0,82501 | 108,01 | 1 |
| 10 | 0,0035 | 0,003 | 27,94 | 20,87 | 14,39 | 44,53 | 0,78162 | 98,82 | 1 |

REFERENSI

1. Crank, J. 1975. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press, London.
2. Jesus, IS, dan Machado, JAT. 2007. Application of Fractional Calculus in the Control of Heat Systems. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics* 11 (9) : p. 1086-1091.
3. Polyani, AD. 2002. *Linear Partial Equations for Engineers and Scientists*. CRC Press, USA.
4. Canete, JF, Galindo, C, dan Moral, IG. 2011. *System Engineering and Automation*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg.
5. Bolton, W. 2002. *Control Systems*. Newnes Elsevier, UK.
6. Forrai, Alexandru. 2013. *Embedded Control System Design*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg.