APLIKASI INVERS GRUP
PADA KARAKTERISASI INVERS MOORE PENROSE

TitiUdjiani SRRM
Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang, 50275

Abstract. Let R be a ring with identity and equipped with involution "$*$". If a is element of R and has the Moore Penrose inverse, then a^*a and aa^* also have the Moore Penrose inverse. This paper found thatMoore Penrose inverse of $a^*a$is the same with the group inverse of a^*a. Also the Moore Penrose inverse ofaa^* is the same with the group inverse of aa^*.Then the results of this investigation are used to discusse the characteristic of the Moore Penrose inverse of elements in R through the group inverse .

Keywords: : inverse, Moore, Penrose, Group

1. PENDAHULUAN

Konsep involusi "$*$" pada Roleh[1] didefinisikan sebagai fungsi $a \in R \mapsto a^* \in R$ yang memenuhi $(a^*)^* = a$, $(a+b)^* = a^* + b^*$ dan $(ab)^* = b^*a^*$ untuk setiap $a, b \in R$.

Pada [2] telah dijelaskan motivasi dari definisi invers Moore Penrose suatu elemen anggota ring R yang dilengkapi involusi "$*$" yang sebelumnya telah disampaikan oleh [3].

Definisi 1.1 *Diketahui R ring dengan elemen satuan yang dilengkapi involusi "$*$". Invers Moore Penrose dari $a \in R$ adalah elemen $b \in R$ yang memenuhi*

1. $aba = a$
2. $bab = b$
3. $(ab)^* = ab$
4. $(ba)^* = ba$

Selanjutnya invers Moore Penrose dari $a \in R$ diberi simbol a^+.

Tidak setiap elemen di R memiliki invers Moore Penrose. Elemen di R yang memiliki invers Moore Penrose dihimpun dan himpunannya dinotasikan R^+.

Pada [4] dikatakan bahwa elemen $a \in R$disebut elemen reguler jika terdapat $b \in R$ yang memenuhi $aba = a$. Selanjutnya b disebut invers dalam dari a. Invers dalam b dari a dikatakan ternormalisasi jika $bab = b$.

Definisi 1.1, khususnya Aksioma 1. menjelaskan bahwa syarat $a \in R$ memiliki invers Moore Penrose adalah a elemen reguler dengan invers dalam b. Sementara Aksioma 2. Menjelaskan bahwa invers dalam b dari a merupakan invers dalam yang ternormalisasi.

Konsep invers pada R yang lainnya yang juga dibangun melalui invers dalam yang ternormalisasi adalah invers grup. Oleh [5] invers grup dari $a \in R$ didefinisikan sebagai elemen $b \in R$ yang memenuhi $aba = a$, $bab = b$ dan $ab = ba$.

Invers grup dari $a \in R$ diberi symbol $a^\#$ dan $R^\#$ adalah simbol dari himpunan elemen di R yang memiliki invers grup.

Menurut [2] jika $a \in R^+$ maka $a^*a,\ aa^* \in R^+$ dengan $(a^*a)^+ = a^+(a^+)^*$ dan $(aa^*)^+ = (a^+)^*a^+$.

Dilain pihak diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} a^*aa^+(a^+)^* &= a^*(aa^+)^*(a^+)^* \\ &= (a^+aa^+a)^* \\ &= a^+aa^+a \\ &= a^+(aa^+)^*a \\ &= a^+(a^+)^*a^*a. \end{aligned}$$

Demikian juga

$$\begin{aligned} aa^*(a^+)^*a^+ &= a(a^+a)^*a^+ \\ &= aa^+aa^+ \\ &= (aa^+aa^+)^* \\ &= (a^+)^*(a^+a)^*a^* \\ &= (a^+)^*a^+aa^*. \end{aligned}$$

Dari uraian diatas diperoleh bahwa jika $a \in R^+$ diperoleh juga $a^*a,\ aa^* \in R^\#$, dan ternyata $(a^*a)^+ = (a^*a)^\#$dan $(aa^*)^+ = (aa^*)^\#$. Hasil ini memberikan ide untuk membangun sifat dari invers Moore Penrose dari elemen $a \in R^+$ melalui invers grup dari a^*a dan aa^*.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Jika $a \in R^+$maka $a^*a,\ aa^* \in R^+$. Tetapi tidak berlaku sebaliknya. Hal ini disebabkan karena jika a^*a dan aa^* reguler maka a belum tentu reguler. Sebagai contoh pada Z_4 dengan involusi identitas, diperoleh bahwa $\overline{2}\overline{2}^* = \overline{2}^*\overline{2} = \overline{0} \in {Z_4}^+$tetapi $\overline{2}$ tidak mempunyai invers Moore Penrose. Selanjutnya jika $a^*a \in R$ reguler, maka terdapat $x \in R$ yang memenuhi $a^*axa^*a = a^*a$. Sehingga

$$a^*a(1 - xa^*a) = 0. \qquad (2.1)$$

Demikian juga jika $aa^* \in R$ reguler maka terdapat $x \in R$ yang memenuhi aa^*xaa^*= aa^*. Sehingga

$$(1 - aa^*x)aa^* = 0. \qquad (2.2)$$

Pada [3] didefinisikan pengertian"$*$"-kanselatif pada elemen di R. Elemen $a \in R$ dikatakan "$*$"-kanselatif jika $a^*ax = 0$ berakibat ax = 0 dan jika memenuhi xaa^* = 0 makaxa = 0 untuk sebarang $x \in R$. Jika sifat"$*$"-kanselatif ditambahkan pada a, maka Persamaan (2.1) menjadi

$$axa^*a = a \qquad (2.3)$$

DanPersamaan (2.2) menjadi

$$axa^*a = a \qquad (2.4)$$

Persamaan (2.3) dan (2.4) menunjukkan bahwa a reguler.

Berdasarkan alasan ini selanjutnya pada [6] telah ditunjukkan bahwa $a \in R^+$ jika dan hanya jika $a^*a \in R^+$. Demikian juga $a \in R^+$jika dan hanya jika $aa^* \in R^+$.

Sementara pada pendahuluan telah dijelaskan bahwa jika $a \in R^+$ maka $(a^*a)^+ = (a^*a)^\#$ dan $(aa^*)^+= (aa^*)^\#$. Kondisi ini melatarbelakangi ide untuk memperoleh sifat dari invers Moore Penrose dari elemen $a \in R^+$ melalui invers grup dari a^*a dan aa^*. Hasilnya dapat dilihat padaTeorema 2.3.

Teorema 2.3 pada tulisan ini melengkapi Teorema 5 pada [6] yang telah disampaikan oleh Koliha [3].

Sebelum membahas Teorema2.3 terlebih dahulu disampaikan beberapa sifat dari $a \in R^+$sebagai berikut :

Teorema 2.2 *Diberikan ring R dengan involusi "$*$". Jika $a \in R^+$maka :*

1. $(a^*)^+ = (a^+)^*$.

2. $(a^*a)^+ = a^+(a^+)^*$ *dan* $(aa^*)^+ = (a^+)^*a^+$.

Bukti :

1. $a^*(a^+)^*a^* = (aa^+a)^*$
   $= a^*$,
   $(a^+)^*a^*(a^+)^* = (a^+aa^+)^*$
   $= (a^+)^*$,
   $(a^*(a^+)^*)^* = ((a^+a)^*)^* = (a^+a)^*$
   $= a^*(a^+)^*$,
   $((a^+)^*a^*)^* = ((aa^+)^*)^* = (aa^+)^*$
   $= (a^+)^*a^*$.
2. $a^*aa^+(a^+)^*a^*a = a^*(aa^+)^*(a^+)^*a^*a$
   $=(aa^+aa^+a)^*a$
   $= a^*a$,
   $a^+(a^+)^*a^*aa^+(a^+)^*$
   $= a^+(a^+)^*a^*(aa^+)^*(a^+)^*$
   $= a^+(a^+aa^+aa^+)^*$
   $= a^+(a^+)^*$,
   $(a^*aa^+(a^+)^*)^* = (a^*(aa^+)^*(a^+)^*)^*$
   $= ((a^+aa^+a)^*)^*$
   $= a^+a = (a^+a)^*$
   $= (a^+aa^+a)^*$
   $= a^*(aa^+)^*(a^+)^*$
   $= a^*aa^+(a^+)^*$,
   $(a^+(a^+)^*a^*a)^* = (a^+(aa^+)^*a)^*$
   $= (a^+aa^+a)^* = a^+a$
   $= a^+aa^+a$
   $= a^+(aa^+)^*a$
   $= a^+(a^+)^*a^*a$
   dan
   $aa^*(a^+)^*a^+aa^* = aa^*(a^+)^*(a^+a)^*a^*$
   $= a(aa^+aa^+a)^*$
   $= aa^*$,
   $(a^+)^*a^+aa^*(a^+)^*a^+$
   $= (a^+)^*(a^+a)^*a^*(a^+)^*a^+$
   $= (a^+aa^+aa^+)^*a^+$
   $= (a^+)^*a^+$,
   $(aa^*(a^+)^*a^+)^* = (a(a^+a)^*a^+)^*$
   $= (aa^+aa^+)^* = aa^+$
   $= (aa^+)^* = a(a^+a)^*a^+$
   $= aa^*(a^+)^*a^+$,
   $((a^+)^*a^+aa^*)^* = ((a^+)^*(a^+a)^*a^*)^*$
   $= ((aa^+aa^+)^*)^* = aa^+$

$= (aa^+)^* = (aa^+aa^+)^*$
$= (a^+)^*(a^+a)^*a^*$
$= (a^+)^*a^+aa^*$.■

Teorema 2.3. *Diberikan ring R dengan involusi "$*$". Jika $a \in R$, maka pernyataan - pernyataan berikut ini ekuivalen :*

1. $a \in R^+$.
2. $a^* \in R^+$.
3. a *$*$-kanselatif dan* $a^*a \in R^+$.
4. a *$*$-kanselatif dan* $aa^* \in R^+$.
5. a *$*$-kanselatif dan* $a^*a \in R^\#$.
6. a *$*$-kanselatif dan* $aa^* \in R^\#$.
7. a *$*$-kanselatif dan* a^*a *serta* aa^* *regular.*
8. $a \in aa^*R \cap Ra^*a$.
9. a *$*$-kanselatif dan* a^*aa^* *regular.*

Bukti:

(1)⇔(2) Jika $a \in R^+$, maka $a^* = (aa^+a)^* = a^*(a^+)^*a^*$ Selanjutnya $(a^*(a^+)^*)^* = a^+a = (a^+a)^* = a^*(a^+)^*$dan $((a^+)^*a^*)^* = aa^+ = (aa^+)^* = (a^+)^*a^*$. Terbukti $a^* \in R^+$dengan $(a^*)^+ = (a^+)^*$
Sebaliknya jika $a^* \in R^+$, maka $a = (a^*)^* = (a^*(a^*)^+a^*)^* = a((a^*)^+)^*a$. Demikian juga $(a((a^*)^+)^*)^* = (a^*)^+a^* = (a^+)^*a^* = aa^+ = a((a^+)^*)^* = a((a^*)^+)^*$ dan $(((a^*)^+)^*a)^* = a^*(a^*)^+ = a^*(a^+)^* = a^+a = ((a^+)^*)^*a = ((a^*)^+)^*a$.
Terbukti $a \in R^+$dengan $a^+ = ((a^*)^+)^*$

(1) ⇒(3) Diketahui $a \in R^+$, sehingga $a^*a = (aa^+aa^+a)^*a = a^*aa^+(a^+)^*a^*\,a$. Berikutnya $(a^*aa^+(a^+)^*)^* = (a^*(aa^+)^*(a^+)^*)^* = ((a^+a)^*)^* = a^+a = (a^+a)^* = a^*(aa^+)^*(a^+)^*$ dan $(a^+(a^+)^*a^*a)^* = (a^+(a^+)^*a^*a)^* = (a^+(aa^+)^*a)^* = (a^+aa^+a)^* = (a^+a)^* = a^+a = a^+(a^+)^*a^*a = a^+(a^+)^*a^*a$.Terbukti$a^*a \in R^+$.
Selanjutnya jika $a \in R^+$ dan $a^*ax = 0$ untuk sebarang $x \in R$, maka $ax = aa^+ax = (aa^+)^*\,ax = (a^+)^*a^*ax = 0$. Demikian juga jika $a \in R^+$ dan $xaa^* = 0$ untuk sebarang $x \in R$, maka $xa = xaa^+a = xa(a^+a)^* = xaa^*(a^+)^* = 0$.

(3)⇒(5) Pada bagian ini cukup dibuktikan bahwa jika $a^*a \in R^+$, maka $a^*a \in R^\#$. Oleh karena $a^*a \in R^+$ maka terdapat $(a^*a)^+ \in R$ sehingga $a^*a(a^*a)^+a^*a = a^*a$, $(a^*a)^+a^*a(a^*a)^+ = (a^*a)^+$, $(a^*a\,(a^*a)^+)^* = a^*a(a^*a)^+$ dan $((a^*a)^+a^*a)^* = (a^*a)^+a^*a$. Selanjutnya menggunakan $(aa^*)^+ = (a^+)^*a^+$ diperoleh bahwa $a^*a(aa^*)^+ = a^*aa^+(a^+)^*$
$= a^*(aa^+)^*(a^+)^*$
$= (a^+aa^+a)^*$
$= a^+aa^+a$
$= a^+(aa^+)^*a$
$= a^+(a^+)^*a^*a$
$= (aa^*)^+a^*a$

(5) ⇒ (1) Diketahui $a^*a \in R^\#$, sehingga $a^*a(a^*a)^\#a^*a = a^*a$:
Karena$a$ $*$-kanselatif, maka $a(a^*a)^\#a^*a = a$. Selanjutnya $(a(a^*a)^\#a^*)^* = (aa^+(a^+)^*a^*)^* = aa^+ = aa^+(a^+)^*a^* = a(a^*a)^\#a^*$ dan $((a^*a)^\#a^*a)^* = (a^+(a^+)^*a^*a)^* = a^+a = a^+(a^+)^*a^*a = (a^*a)^\#a^*a$. Terbukti $a \in R^+$ dengan $a^+ = (a^*a)^\#a^*$
Telah dibuktikan bahwa (1) ⇒ (3) ⇒ (5) ⇒ (1).Dengan menggunakan sifat " $a \in R^+$ jika dan hanya jika $a^* \in R^+$", maka implikasi (1) ⇒ (3) ⇒ (5) ⇒ (1) menghasilkan implikasi (2) ⇒ (4) ⇒ (6) ⇒ (2). Akibatnya ekuivalensi (1)-(6) dipenuhi.

(6) ⇒ (7) Jika $aa^* \in R^\#$, maka aa^* reguler. Telah ditunjukkan bahwa jika a $*$-kanselatif dan $aa^* \in R^\#$, maka $a \in R^+$. Selanjutnya dengan menggunakan implikasi (1) ⇒ (3) diperoleh bahwa a^*a reguler.

(7) ⇒ (8) Diketahui aa^* reguler. Artinya terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $aa^*xaa^* = aa^*$. Jadi $(aa^*x - 1)\,aa^* = 0$. Karena a $*$-kanselatif maka $aa^*xa = a$. Jika a^*a reguler, maka terdapat $y \in R$ yang memenuhi $a^*aya^*a = a^*a$ atau $a^*a\,(ya^*a - 1) = 0$. Karena a $*$-kanselatif, maka $aya^*a = a$. Diperoleh bahwa $aa^*xa = a = a^*a$. Akibatnya $\in aa^*R \cap Ra^*a$.

(8) ⇒ (1) Diketahui $a \in aa^*R \cap Ra^*a$, sehingga terdapat $u, v \in R$ yang memenuhi $aa^*u = a = va^*a$. Selanjutnya $u^*a = u^*aa^*u = (aa^*u)^*u = a^*u = (u^*a)^*$ dan $av^* = va^*av^* = v(va^*a)^* = va^* = (av^*)^*$. Berikutnya $au^*a = au^*aa^*u = a(u^*a)^*a^*u = aa^*ua^*u = aa^*u = a$ dan

$av^*a = va^*av^*a = va^*(av^*)^*a = va^*\ va^*a = va^*a = a$.

Jika $b = u^*av^*$, maka berikut ini dapat ditunjukkan bahwa $a \in R^+$.

$aba = au^*a\ v^*a = a(u^*a)^*v^*a$
$= aa^*uv^*a = av^*a = a$,
$(ab)^* = (au^*av^*)^* = (a(u^*a)^*v^*)^*$
$= (aa^*uv^*)^* = (av^*)^*. = va^*$
$= v(va^*a)^* = va^*av^* = av^*$
$= au^*av^* = ab$,
$(ba)^* = (u^*av^*a)^* = (u^*(av^*)^*a)^*$
$= (u^*va^*a)^* = (u^*a)^*. = a^*u$
$= (aa^*u)^*u = u^*aa^*u = u^*a$
$= u^*av^*a = ba$.

(1) $\Rightarrow$ (9). Pada bagian ini cukup ditunjukkan bahwa jika $a \in R^+$, maka $a^*aa^* = a^*aa^+aa^+aa^*$
$= a^*a(a^+a)^*a^+aa^*$
$= a^*aa^*(a^+)^*a^+aa^*$
$= a^*aa^*(a^+)^*a^+aa^+aa^*$
$= a^*aa^*(a^+)^*a^+(aa^+)^*aa^*$
$= a^*aa^*(a^+)^*a^+(a^+)^*a^*aa^*$.

Diperoleh bahwa a^*aa^* reguler dengan invers dalam $(a^+)^*a^*aa^*$.

(9) $\Rightarrow$ (8) Diketahui a^*aa^* reguler, sehingga $a^*aa^*xa^*aa^* = a^*aa^*$ untuk suatu $x \in R$. Oleh karena a $*$-kanselatif, maka $aa^*xa^*aa^* = aa^*$. Selanjutnya berdasarkan sifat $*$-kanselatif, maka untuk suatu $x \in R$ berlaku $aa^*xa^*a = a$. Dapat disimpulkan bahwa $a \in aa^*R \cap Ra^*a$.

3. PENUTUP

Pada tulisan ini dibahas sifat-sifat invers Moore Penrose dari$a \in R^+$ yang diperoleh melalui invers grup dari aa^*dan a^*a. Pada ring R yang dilengkapi involusi involusi "$*$" dikenal istilah elemen simetris yaitu elemen $a \in R$ yang mempunyai sifat $a^* = a$. Himpunan elemen simetris pada R disimbolkan dengan R^{sym} Berdasarkan definisi invers grup diperoleh bahwa aa^* dan a^*a adalah elemen simetris, karena dengan menggunakan sifat involusi diperoleh bahawa $(aa^*)^* = aa^*$ dan $(a^*a)^* = a^*a$. Oleh karenanya diperoleh bahwa jika $a \in R^+$maka $aa^*, a^*a \in R^+ \cap R^{sym}$. Muncul pertanyaan jika $a \in R^+$ apakah dapat dibangun sifat-sifat dari sebarang elemen di $R^+ \cap R^{sym}$.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Mosic D. danD.S.Djordjevic, (2009), Partial Isometries and EP Elements in Rings with Involution, *Electronic Journal of Linear Algebra*, ISSN 1081-3810, A publication of the International Linear Algebra Society, 18 : 761-772.

[2]. Titi, (2016), MotivasiDefinisi Invers Moore Penrose pada Ring dengan elemen satuan yang dilengkapi involusi, *JurnalMatematika*, 19(1) :13-15

[3]. Koliha J.J. dan P. Patricio, (2002), Elements of Rings with Equal Spectral Idempotents, *J. Australian Mathematical Society*, 72: 137-152.

[4]. Harte R. dan M.Mbekhta, (1992), On Generalized Inverse in C* Algebras, *Mathematica*, 103(1) : 71-77.

[5]. Koliha J.J., (1999), The Drazin and Moore penrose Inverse in C* Algebras, *MathematicalProceedings of the Royal Irish Academy*, 99A(1): 17-27.

[6]. Titi, (2016), Syarat Perlu Dan Cukup Elemen suatu Ring Mempunyai Invers Moore Penrose, *Prosiding Seminar Nasional UPGRIS2016* .