METODE SIMPLEKS PRIMAL-DUAL PADA PROGRAM LINIER FUZZY PENUH DENGAN BILANGAN TRAPEZOIDAL

Bambang Irawanto[1],Djuwandi[2], Suryoto[3], Rizky Handayani[4][1,2,3]Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Matematika Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 50275
[4]Mahasiswa S2 matematika Universitas Gadjah Mada
[1]b_irawanto@yahoo.co.id, [4]rizkyhandayani93@yahoo.co.id

Abstract. Program linier dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *trapezoidal fuzzy* (FNLP) dan program linier dengan variabel *trapezoidal fuzzy* (FVLP) merupakan bentuk dari program linier *fuzzy* tidak penuh. FNLP memiliki bentuk bilangan *trapezoidal fuzzy* hanya pada koefisien fungsi tujuannya saja, sedangkan FVLP memiliki bentuk bilangan *trapezoidal fuzzy* pada variabel keputusan dan konstanta ruas kanannya. Kasus minimasi dari FNLP dan FVLP dapat diselesaikan dengan metode simpleks dual. Bentuk bilangan *trapezoidal fuzzy* harus diubah ke bentuk bilangan *crisp* terlebih dahulu dengan menggunakan fungsi peringkat untuk menentukan *entering variable* dan *leaving variable*nya.Nilai fungsi tujuan optimalyang dihasilkan berupa bilangan *trapezoidal fuzzy* dan bilangan *crisp.*

Kata kunci : Program Linier Fuzzy Tidak Penuh, Bilangan Trapezoidal Fuzzy, Metode Simpleks Dual.

1. PENDAHULUAN

Teori himpunan *fuzzy*merupakan pendekatan untuk menyelesaikan masalah ketidakpastian tersebut dengan memperkenalkan himpunan yang dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan yang memetakan setiap domain pada himpunan *fuzzy* ke tepat satu bilangan real pada interval tertutup [0,1] [1]. Teori himpunan *fuzzy* banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu seperti dalam program linier.[2,3] meneliti mengenai dualitas pada program linier dengan variabel *trapezoidal fuzzy* (FVLP) selanjutnya membahas Metode Simpleks Dual untuk menyelesaikan masalah program linier dengan variabel *trapezoidal fuzzy* (FVLP).Tulisan ini akan membahas Metode Simpleks Dual untuk menyelesaikan masalah program linier *fuzzy* tidak penuh dengan bilangan *trapezoidal fuzzy* non simetris khususnya pada bentuk program linier dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *trapezoidal fuzzy* (FNLP) dan program linier dengan variabel *trapezoidal fuzzy* (FVLP)..

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini di berikan beberapa pengertian yang mendukung

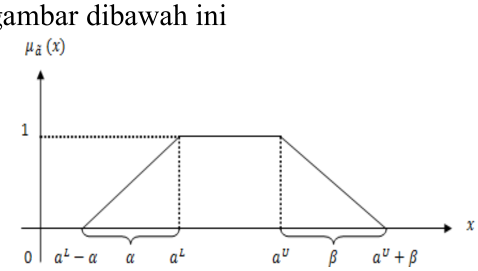
2.1. Bilangan *Trapezoidal Fuzzy*

Dalam himpunan fuzzy dikenal dengan suatu bilangan fuzzy yang di definisikan sebagai

Definisi 2.1 [4] *Bilangan fuzzy disebut bilangan trapezoidal fuzzy apabila memiliki fungsi keanggotaan sebagai berikut:*

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1-\frac{a^L-x}{\alpha}, & a^L-\alpha \le x < a^L \\ 1, & a^L \le x \le a^U \\ 1-\frac{x-a^U}{\beta}, & a^U < x \le a^U+\beta \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

Secara geometris digambarkan seperti gambar dibawah ini



Gambar 2.1 Fungsi Keanggotaan Bilangan*Fuzzy*

Definisi 2.2[4]*Bilangan trapezoidal fuzzy dapat dinyatakan dengan* $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ *dengan* $a^L < a^U (a^L \neq a^U), \alpha > 0, \beta > 0$ *dan* $a^L, a^U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Core dari bilangan trapezoidal fuzzy* $\tilde{a}$ *adalah* $[a^L, a^U]$ *dan support dari bilangan trapezoidal fuzzy* $\tilde{a}$ *adalah* $(a^L - \alpha, a^U + \beta)$.

Operasi operasi antara bilangan bilangan fuzzy di definisikan sebagai

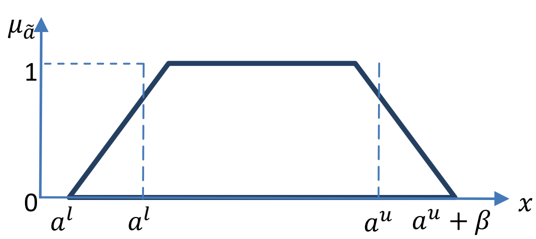
Definisi 2.3. [4] *Diberikan dua bilangan trapezoidal fuzzy yaitu* $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ *dan* $\tilde{b} = (b^L, b^U, \gamma, \theta)$, *dengan* $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ *dan* $a^L, a^U, \alpha, \beta, b^L, b^U, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$. *Operasi dari bilangan trapezoidal fuzzy didefinisikan sebagai berikut:*

1. *Negasi:* $(-\tilde{a}) = (-a^U, -a^L, \beta, \alpha)$
2. *Penjumlahan:* $\tilde{a} + \tilde{b} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha + \gamma, \beta + \theta)$
3. *Pengurangan:* $\tilde{a} - \tilde{b} = (a^L - b^U, a^U - b^L, \alpha + \theta, \beta + \gamma)$
4. *Perkalian dengan skalar:*
   untuk $k \geq 0,\ k \in \mathbb{R}$ *maka* $k\tilde{a} = (ka^L, ka^U, k\alpha, k\beta)$
   untuk $k < 0,\ k \in \mathbb{R}$ *maka* $k\tilde{a} = (ka^U, ka^L, -k\beta, -k\alpha)$.

Teorema2.1 [4]*Diberikan bilangan trapezoidal fuzzy* $\tilde{a} = (a^l, a^u, \alpha, \beta)$ *dengan* $a^l, a^u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Fungsi Peringkat (Ranking Function)dari bilangan trapezoidal fuzzy*$\tilde{a}$ *adalah*$\Re(\tilde{a}) = \frac{a^l + a^u}{2} + \frac{\beta - \alpha}{4}$.

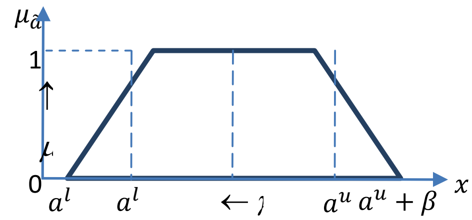
Bukti :

Diberikan bilangan*trapezoidal fuzzy* $\tilde{a} = (a^l, a^u, \alpha, \beta)$ dengan $a^l, a^u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dalam fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ dapat di gambarkan sebagaiberikut :



Gambar 2.2

Dengan memandang bahwa bilangan *crips* yang diharapkan adalah terletak disekitar titik tengah antara dua titik $((a^l - \alpha), 0)$ dan $((a^u + \beta), 0)$ dengan maksud bahwa mencari suatu titik γ yang mempunyai μ mendekati 1 yang akan di ilustrasikan di gambarberikut :



Gambar 2.3 IlustrasiTitik γ PadaFungsiKeanggotaanBilangan*Fuzzy*

Untuk mencari suatu titik di sekitar titik tengah antara dua titik $((a^l - \alpha), 0)$ dan $((a^u + \beta), 0)$, maka akan dicari dengan cara mencari rata-rata dari keempat titik adalah sebagai berikut :

Didefinisikan$\Re(\tilde{a})$ adalah rata-rata dari keempat titik $((a^l - \alpha), 0)$, $(a^l, 0)$, $(a^u, 0)$, $((a^u + \beta), 0)$ padasumbu x maka

$$\Re(\tilde{a}) = \frac{(a^l - \alpha) + a^l + a^l + (a^u + \beta)}{4}$$

$$= \frac{2(a^l + a^u) + \beta - \alpha}{4}$$

$$= \frac{a^l + a^u}{2} + \frac{\beta - \alpha}{4}$$

■

Diberikan $F(\mathbb{R})$ adalah himpunan dari bilangan trapezoidal fuzzy dan $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ dengan $\Re(\tilde{a})$dan $\Re(\tilde{b})$ nilaicrips$\tilde{a}\ dan\ \tilde{b}$,

Definisi 2.5. [4] *Sifat-sifat relasi yang digunakan untuk mengurutkan setiap bilangan trapezoidal fuzzy $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$dan skalar $k \in \mathbb{R}$didefinisikan sebagai berikut: $\tilde{a} > \tilde{b} jika$ $\Re(\tilde{a}) > \Re(\tilde{b})$, $\tilde{a} < \tilde{b} jika$ $\Re(\tilde{a}) < R(\tilde{b})$, dan $\tilde{a} = \tilde{b} jika$ $\Re(\tilde{a}) = \Re(\tilde{b})$.*

2.2. Program Linier *Fuzzy* Tidak Penuh

Secara umum bentuk kasus minimasi masalah program linier dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *trapezoidal fuzzy* (FNLP) dirumuskan sebagai berikut [5]:

Meminimalkan $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j$

terhadap $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, (i = 1,2, \dots, m)$

$x_j \geq 0, (j = 1,2, \dots, n)$. (2.1)

sedangkan secara umum bentuk kasus minimasi masalah program linier dengan variabel *trapezoidalfuzzy* (FVLP) dirumuskan sebagai berikut [3]:

Meminimalkan $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j \tilde{x}_j$

terhadap $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j \leq \tilde{b}_i$, $(i = 1,2, \dots, m) \tilde{x}_j \geq \tilde{0}, (j = 1,2, \dots, n)$ (2.2)

Langkah-langkah metode simpleks dual untuk menyelesaikan kasus minimasi masalah FNLP atau FVLP dirumuskan sebagai berikut [2,3]:

1. Mengubah tanda pertidaksamaan $\geq$ menjadi $\leq$ pada setiap kendala dengan cara mengalikan kedua ruas kendala dengan -1 pada bentuk umum kasus minimasi FNLP atau FVLP.
2. Mengubah bentuk umum kasus minimasi FNLP atau FVLP yang baru ke dalam bentuk standar kasus minimasi FNLP atau FVLP, yaitu dengan menambah variabel tambahan atau variabel semu.
3. Menyusun tabel simpleks awal kasus minimasi FNLP atau FVLP dalam bentuk standar dengan syarat bahwa kendala utama sudah tersusun Gauss-Jordan.
4. Memperbaiki tabel simpleks awal sehingga nilai $b_i \geq 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, m$dengan mengganti satu variabel basis. Jika semua basis pada $b_i \geq 0$ maka solusi sudah fisibel dan jika $y_{0j} \leq 0$ untuk semua j maka tabel dikatakan optimal. Mengganti variabel basis dilakukan dengan dua aturan, yaitu:
   KUNCI I (*Leaving Variable*)
   Pilih s, sehingga $y_{s0} = \min\{y_{i0}\}$.
   dengany_{i0} adalah kolom RHS yaitu $y_{i0} = \Re(-\tilde{b}_i)$ pada kasus FVLP dan s adalah variabel basis yang keluar.
   KUNCI II (*Entering Variable*)
   Pilih kolom ke-r yang memenuhi $R_i = \frac{y_{0r}}{y_{sr}} = \min\left\{\frac{y_{0j}}{y_{sj}} | y_{sj} < 0\right\}$, dengan $y_{0j} = \Re(\tilde{z}_j - \tilde{c}_j)$ pada kasus FNLP. Abaikan $y_{sj} \geq 0$, apabila nilai $y_{sj} \geq 0$maka masalah tidak memiliki solusi fisibel.
5. Memilih y_{sr} sebagai unsur kunci dan memperbarui tabel simpleks *fuzzy*. Apabila tabel simpleks baru masih terdapat nilai $b_i < 0$, maka dilakukan langkah keempat dan seterusnya hingga diperoleh solusi fisibel dengan nilai $b_i \geq 0$ untuk semua i.

Contoh 2.1 Diberikan kasus minimasi FNLP seperti di bawah ini:

Min $\tilde{z} = (-1,3,2,6)x_1 + (-2,4,3,3)x_2$

s.t $3x_1 + x_2 \geq 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Ubah tanda pertidaksamaan $\geq$ menjadi $\leq$ pada setiap kendala dengan cara mengalikan kedua ruas kendala dengan -1 pada bentuk umum kasus minimasi FNLP di atas sebagai berikut:

s.t $3x_1 + x_2 \geq 3 \Rightarrow -3x_1 - x_2 \leq -3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6 \Rightarrow -4x_1 - 3x_2 \leq -6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3.$

Ubah bentuk umum kasus minimasi FNLP yang baru ke dalam bentuk standar kasus minimasi FNLP, yaitu dengan menambah variabel tambahan atau variabel semu sebagai berikut:

$$\tilde{z} - (-1,3,2,6)x_1 - (-2,4,3,3)x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0$$
$$-3x_1 - x_2 + x_3 = -3$$
$$-4x_1 - 3x_2 + x_4 = -6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Susunlah bentuk standar kasus minimasi FNLP di atas ke dalam tabel simpleks awal:

Tabel 2.1 Tabel Simpleks Iterasi 0

BV	$\tilde{z}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
$\tilde{z}$	$\tilde{1}$	$(-3,1,6,2)$	$(-4,2,3,3)$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
x_3	$\tilde{0}$	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	$\tilde{0}$	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	$\tilde{0}$	1	2	0	0	1	3

dengan,

$$y_{01} = \Re(-3,1,6,2) = \frac{-3+1}{2} + \frac{(2-6)}{4} = \frac{-2}{2} + \frac{-4}{4} = -1 - 1 = -2$$

$$y_{02} = \Re(-4,2,3,3) = \frac{-4+2}{2} + \frac{(3-3)}{4} = \frac{-2}{2} + \frac{0}{4} = -1 + 0 = -1$$

Memperbaiki tabel simpleks awal sehingga nilai $b_i \geq 0$ untuk semua $i = 1,2,\dots,m$dengan mengganti satu variabel basis. Pilih $\min(y_{10}, y_{20},) = (-3,-6) = -6$, sehingga x_4 terpilih sebagai *leaving variable* dan pilih $\min\left\{\frac{y_{01}}{y_{21}} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \frac{y_{02}}{y_{22}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$, sehingga x_2 terpilih sebagai variabel basis yang baru (*entering variable*) dengan demikian $y_{22} = -3$ terpilih sebagai unsur kunci.

Memperbarui tabel simpleks di atas dengan menjadikan unsur kunci bernilai 1 sedangkan entri kolom y_{22} yang lainnya bernilai 0 dengan melakukan operasi baris elementer. Iterasi terus dilakukan sampai diperoleh tabel simpleks optimal.

Diperoleh nilai solusi penyelesaian *crisp* optimalnya adalah$(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$, nilai fungsi tujuan *fuzzy* optimalnya adalah $\tilde{z} = \left(-3, \frac{33}{5}, \frac{48}{5}, 12\right)$, dan nilai fungsi tujuan *crisp* optimalnya adalah $z = \Re\left(-3, \frac{33}{5}, \frac{48}{5}, 12\right) = \frac{-3+\frac{33}{5}}{2} + \frac{12-\frac{48}{5}}{4} = \frac{18}{10} + \frac{12}{20} = \frac{36+12}{20} = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$.

Contoh 2.2 Diberikan kasus minimasi FVLP seperti di bawah ini:

Min $\quad \tilde{z} = 48\tilde{x}_1 + 20\tilde{x}_2 + 8\tilde{x}_3$

s.t $\quad 8\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3 \geq (20,80,20,60)$

$$6\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \frac{3}{2}\tilde{x}_3 \geq (20,34,10,22)$$
$$\tilde{x}_1 + \frac{3}{2}\tilde{x}_2 + \frac{1}{2}\tilde{x}_3 \geq (10,26,2,10)$$
$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \geq \tilde{0}$$

Dengan cara yang sama seperti pada Contoh 1, maka diperoleh nilai solusi penyelesaian *fuzzy* optimalnya adalah $(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \big((-20,42,34,30), (-74,80,70,98)\big)$, nilai solusi penyelesaian c*risp* optimalnya adalah $(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (\Re(-20,42,34,30), \Re(-74,80,70,98)) = (10,10)$, nilai fungsi tujuan *fuzzy* optimalnya adalah $\tilde{z} = (0,488,216,360)$, dan nilai fungsi tujuan *crisp* optimalnya adalah $z = \Re(0,488,216,360) = \frac{0+488}{2} + \frac{360-216}{4} = \frac{488}{2} + \frac{144}{4} = \frac{976+144}{4} = \frac{1120}{4} = 280$.

3. PENUTUP

Metode Simpleks Dual dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus minimasi masalah program linier dengan koefisien fungsi tujuan bilangan *trapezoidal fuzzy* (FNLP) dan program linier dengan variabel *trapezoidal fuzzy* (FVLP).Nilai fungsi tujuan optimal *fuzzy* yang dihasilkan kemudian dicrispkan dengan menggunakan fungsi ranking sehingga diperoleh nilai fungsi tujuan optimal *crisp* nya.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur*. Yogyakarta: Graha Ilmu

[2] Nezam Mahdavi-Amiri, Seyed Hadi Nasseri, (2005), Duality in Fuzzy Variable Linear Programming,*World Academy of Science, Engineering, and Techonology*,6: 115-117.

[3] Nezam Mahdavi-Amiri, Seyed Hadi Nasseri, (2007), Duality Results and A Dual Simplex Method for Linear Programming Problems with Trapezoidal Fuzzy Variable, *Fuzzy Sets and Systems*, 158 : 1961-1978.

[4] Nezam Mahdavi-Amiri, Seyed Hadi Nasseri, Alahbakhsh Yazdani,(2009),Fuzzy Primal Simplex Algorithms for Solving Fuzzy Linear Programming Problems, *Iranian Journal of Operation Research.*2:68-84.

[5] Ebrahimnejad, Ali, (2011), A Primal-Dual Algorithm for Solving Linear Programming Problems with Symmetric Trapezoidal Fuzzy Number, *Applied Mathematical,* 2 : 676-684.