Jurnal MIPA 36 (2): 193-200 (2013)

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

APLIKASI METODE NEWTON-RAPHSON UNTUK MENGHAMPIRI SOLUSI PERSAMAAN NON LINEAR

Rochmad ✉

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2013
Disetujui September 2013
Dipublikasikan Oktober 2013

Keywords:
Newton-Raphson
Non linear;
Roots approximation

Abstrak

Mencari solusi suatu masalah merupakan bagian dari kegiatan pemecahan masalah matematika baik masalah yang berkaitan dengan bidang matematika sendiri maupun bidang ilmu lainnya. Sering dijumpai seseorang kesulitan dalam mencari akar-akar eksak persamaan non linear. Salah satu cara dengan mencari hampiran akar-akar eksak tersebut dengan menggunakan metode Newton-Raphson. Artikel ini sebagai hasil studi kasus yang mengkaji konsep-konsep dasar dalam memecahkan masalah persamaan non linear dengan menggunakan metode Newton-Raphson secara tradisional, berbantuan program komputer Excel, Winplot, dan Turbo Pascal.

Abstract

Searching solution of a problem represent the part of mathematics problem solving activity which is there are in the field of mathematics itself and also in the field of other sciences. Someone is often met difficulty look for the roots of nonlinear equation. One of the way of with searching approximation of the exact roots by using Newton-Raphson method. This article as result of case study relating the basic concepts in solving problem nonlinear equations using Newton-Raphson method: traditional, using of computer Excel program, Winplot, and Turbo Pascal.

✉ Alamat korespondensi:
Gd. D7 Lnt. 1 Jurusan Matematika FMIPA Unnes
E-mail: rachmad_manden@yahoo.com

ISSN 0215-9945

Pendahuluan

Salah satu pertanyaan awal yang muncul di pemikiran ketika akan mencari solusi suatu persamaan adalah "apakah persamaan tersebut miliki solusi atau tidak? Apakah solusinya merupakan akar eksak atau tidak?" Berdasar pemikiran awal ini, mengindikasikan bahwa tidak semua permasalahan mencari akar-akar suatu persamaan dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan perhitungan secara tradisional, misalnya dengan menggunakan cara pemfaktoran atau menggunakan rumus. Dalam mencari hampiran akar-akar persamaan yang berkaitan dengan persamaan non linear yang sulit jika diselesaikan secara tradisional, dapat digunakan alat bantu komputer untuk memproses perhitungannya.

Berkaitan dengan penerapan matematika pada ilmu lain, misalnya dalam ilmu rekayasa sipil, seseorang dalam menyelesaikan masalah teknik perlu mencari nilai variabel dalam model matematikanya, model matematika yang diperoleh dari persoalan nyata sering solusi yang dicari berupa variabel x atau variabel t sehingga terpenuhi persamaan $f(x) = 0$ atau $f(t) = 0$ yang digunakan dalam model (Nasution & Zakaria, 2001). Metode pencarian akar suatu persamaan pada dasarnya mencari nilai-nilai x untuk $f(x) = 0$, pada prinsipnya mencari titik potong grafik $y = f(x)$ dengan sumbu-X (Susila 1994).

Permasalahan mencari akar-akar persamaan kadang merupakan kegiatan yang mudah dan bukan lagi menjadi masalah, misalnya dalam mencari akar-akar persamaan $x^2 + 5x - 12 = 0$; dengan mudah ditemukan dengan metode pemfaktoran atau menggunakan rumus, dan diperoleh akar eksak $x = -7$ atau $x = 2$. Namun tidak semua akar eksak persamaan dapat dicari dengan cara tradisional, misalnya dalam mencari akar-akar persamaan non linear $xe^{-x} + \cos\ (2x) = 0$; akar-akarnya tidak dapat dicari dengan cara memfaktorkan atau menggunakan rumus; bagaimanakah cara mencari hampiran akar-akar persamaan ini?

Permasalahan mencari akar-akar persamaan non linear biasanya tidak diselesaikan dengan cara tradisional, tetapi dengan metode numerik tertentu dan dalam proses perhitungannya kadang memerlukan bantuan komputer; misalnya dengan melakukan serangkaian langkah yang disebut iterasi sebagai aplikasi teori kekonvergenan bilangan real. Pada prinsipnya metode numerik merupakan suatu teknik mengubah masalah matematika ke formulasi yang dapat diselesaikan dengan menggunakan operasi aritmetika dalam melakukan perhitungannya (Chapra & Canale 1991).

Kemampuan menyusun ide, urutan operasi atau langkah-langkah pemecahan yang sesuai dengan karakteristik komputer menjadi bagian yang utama dalam merancang pemecahan masalah dengan metode numerik. Dalam menyusun program di komputer diperlukan algoritma yang sesuai yang dapat mengantarkan pada pemecahan masalah (Conte & Boor 1993). Menurut Prawirosusanto (1997) algoritma adalah urutan operasi atau langkah-langkah yang dapat dikerjakan memakai komputer. Kesulitan dalam menyelesaikan persamaan dengan bantuan komputer biasanya terletak pada pemikiran untuk memperoleh ide dan algoritma yang berkaitan dengan diagram alur dan langkah-langkah pemrograman. Dalam menyusun algoritma ini diperlukan kecerdikan dalam mengaitkan konsep-konsep dasar teoretis berbagai bidang; misalnya analisis real, persamaan diferensial, teknik, statistika, dan karakteristik komputer serta bahasa pemrograman yang digunakan.

Terdapat beberapa metode untuk mencari akar-akar persamaan non-linear, misalnya metode: grafik, bagi dua, posisi palsu, iterasi, Newton-Raphson, *Secant* dan lainnya (Chapra & Canale 1991; Munir 2003). Dari beberapa metode tersebut ada yang terkenal. Menurut Ben-Israel (1996) metode Newton-Raphson merupakan salah satu metode yang paling dikenal dalam menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$.

Isaac Newton terkenal dengan karyanya berbahasa Latin: "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica,*" dan dalam bahasa Ingrisnya: "*Mathematical Principles of Natural Philosophy*," yang sering disebut secara singkat *Principia*, dipublikasikan pertama 5 Juli 1687. *Principia* memuat teori hukum Newton tentang gerak, fondasi mekanika klasik, hukum Newton tentang grafitasi, dan hukum Kepler tentang gerak planet (Newton 2012). Tahun 1720 Joseph Raphson menterjemahkan *Aritmetica Universalis* karya Isaac Newton dalam bahasa Inggris yang didalamnya memuat cara mencari akar-akar persamaan secara aritmetika (Raphson 1720).

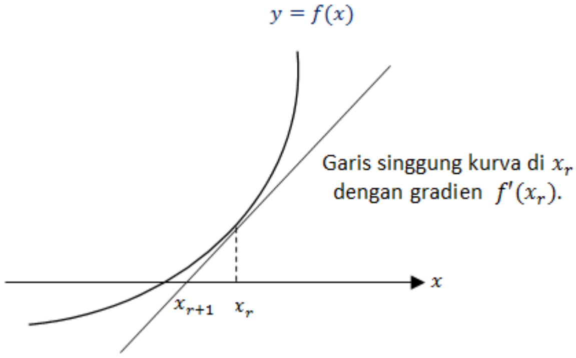
Isaac Newton tahun 1669 menemukan suatu metode untuk mencari akar dari sebarang fungsi yang memiliki turunan pertama. John Wallis mempublikasikan metode Newton pada tahun 1685. Joseph Raphson pada tahun 1690 memodifikasi dan mempublikasikan dengan versi yang lebih menarik, yang sampai sekarang dikenal dengan sebutan metode Newton-Raphson (Bressoud 2006). Sebutan metode Newton–Raphson merupakan gabungan dan keterkaitan dua nama panggilan Newton dan Raphson, awalnya merupakan metode untuk mencari hampiran akar-akar untuk nilai nol suatu fungsi bernilai real.

Sampai sekarang, beberapa peneliti menggunakan metode Newton-Raphson dalam memecahkan masalah mencari akar-akar persamaan non linear, misalnya penelitian yang dilakukan Qudeiri *et al.* (2013) berkaitan dengan lembaran metal (*metal sheet*) memilih metode Newton-Raphson untuk menyelesaikan model persamaan non linear berbasis rumus Lagrange.

Pembahasan

Secara umum, dalam mencari akar-akar persamaan non linear, tidak terdapat metode penyelesaian yang terbaik. Metode Newton-Raphson menggunakan satu titik awal (*initial value*) sebagai tebakan awal; memerlukan *slope* atau gradien pada titik tersebut, dan barisan titik potong garis singgungnya dengan sumbu-X. Karena itu metode gagal digunakan jika pemilihan titik awal memberikan nilai turunannya nol. Metode ini menggunakan konsep kekonvergenan barisan; dan iterasi kekonvergensiannya dipandang cepat dan berefek galat kecil. Konsep dasar teoretis metode Newton-Raphson secara geometri diperoleh dari kekonvergenan barisan titik-titik potong antara garis singgung kurva dan sumbu-X; dan secara analisis melakukan pemotongan (*truncation*) fungsi pada deret Taylor.

1. Konsep dasar Penurunan Rumus Newton-Raphson Secara Geometri dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Gradien garis singgung kurva

Berdasar pada Gambar 1, gradien garis singgung di x_r adalah

$$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_r)-0}{x_r - x_{r+1}}$$

atau

$$f'(x_r) = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}}$$

diperoleh rumus

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \ ; f'(x_r) \neq 0.$$

Ini mengindikasikan adanya barisan titik-titik potong antara garis singgung kurva dititik x_r dan sumbu-X.

2. Konsep Dasar Penurunan Rumus Newton-Raphson dengan Deret Taylor

Uraikan $f(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor,

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!}f''(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^3}{3!}f'''(x_r) + \cdots$$

Hampiran akar persamaan diperoleh dengan memotong suku-suku deret mulai ssuku ke-3, menjadi

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r).$$

Untuk $f(x_{r+1}) = 0$, diperoleh

$$0 \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r)$$

atau

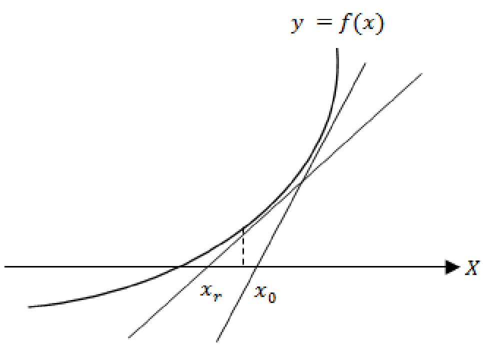
$$x_{r+1} \approx x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}; f'(x_r) \neq 0.$$

Dalam praktik mencari hampiran akar-akar $f(x) = 0$ dengan komputer pertama-tama diperlukan titik awal (*initial value*) sebagai tebakan awal, dan kemudian untuk iterasi menggunakan rumus

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}; f'(x_r) \neq 0$$

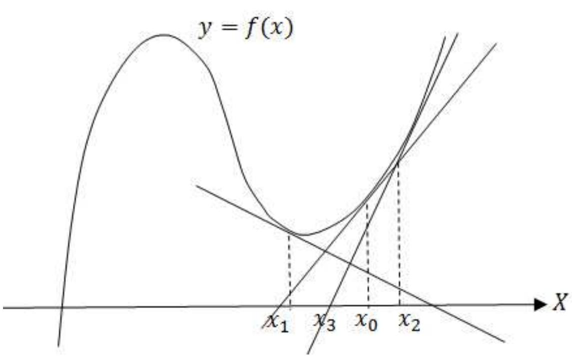
untuk menghentikan iterasi dengan cara melakukan pembatasan pada banyaknya iterasi atau dengan cara mensyaratkan kedua titik apit hampiran akarnya berjarak amat dekat, yakni jarak tersebut kurang dari $\varepsilon > 0$; nilai ε positif yang cukup kecil ini sering diistilahkan dengan toleransi kesalahan.

Secara umum barisan bilangan x_r untuk r yang cukup besar dapat konvergen atau divergen. Secara geometri kekonvergenannya itu dapat berlangsung cepat, seperti yang dilukiskan pada Gambar 2. Titik-titik potong garis singgung grafik fungsi dengan sumbu-X semakin lama mendekati akar eksak, meskipun akar eksak tersebut sulit dan bahkan tidak dapat ditentukan.



Gambar 2. Barisan x_r konvergen ke akar eksak

Karena metode Newton-Raphson tergolong metode terbuka, maka dalam beberapa kasus iterasinya mungkin tidak konvergen ke akar eksaknya. Jika kurvanya seperti diilustrasikan pada Gambar 3 dengan pemilihan tebakan awal x_0 yang jauh dari akar eksaknya, iterasinya kemungkinan berisolasi tidak di sekitar akar eksak dan menyebabkan tidak konvergen ke akar eksak.



Gambar 3. Barisan x_r tidak konvergen ke akar eksak

Untuk mengatasi kemungkinan ketidakkonvergenan akibat dari kekurangtepatan pemilihan tebakan awal, dapat diatasi dengan membuat sketsa grafik fungsi, misalnya dengan bantuan program aplikasi Winplot atau lainnya. Grafik fungsi ini sangat membantu dalam menentukan tebakan awal untuk mencari hampiran akar dengan metode Newton-Raphson. Grafik fungsi dapat memperlihatkan secara visual lokasi akar eksaknya. Dengan demikian tebakan awal yang "baik" untuk hampiran akar dapat ditentukan. Pemilihan tebakan awal sebaiknya cukup dekat dengan akar eksak. Selain itu, melalui pengamatan pada sketsa grafik dapat diprediksi letak titik baliknya; dan apakah fungsi tersebut mempunyai akar atau tidak, akarnya tunggal atau lebih dari satu.

Analisis Kekonvergenan

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ merupakan barisan hampiran-hampiran akar yang diperoleh melalui iterasi berturut-turut dengan menggunakan metode Newton-Raphson. Misalkan r adalah akar eksaknya dan e_n menyatakan galat pada iterasi ke-n. Maka $e_n = x_n - r$, dan diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - r \\ &= \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) - r \\ &= (x_n - r) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \frac{(e_n f'(x_n) - f(x_n))}{f'(x_n)}. \quad \ldots\ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengekspansi $f(x_n - e_n)$ dalam bentuk deret Taylor, didapat

$$f(x_n - e_n) = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(c_n)}{2} e^2{}_n + \cdots$$

$$f(r) = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(c_n)}{2} e^2{}_n + \ldots$$

$$0 = f(x_n) - f'(x_n)e_n + \frac{f''(c_n)}{2} e^2{}_n + \cdots$$

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{f''(c_n)}{2} e^2{}_n. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Dengan c_n adalah suatu bilangan antara r dan x_n. Dari (1) dan (2) diperoleh

$$e_{n+1} = \frac{f''(c_n) e^2{}_n}{2f'(x_n)}.$$

Sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{e^2{}_n}=\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

Apabila $f'(r)\neq 0$, dan $f'(x)$, $f"(x)$ keduanya kontinu pada interval yang memuat x_n. untuk setiap bilangan asli n, maka metode Newton-Raphson konvergen ke akar eksak secara kuadratik. Jika r adalah akar berderajat $m>1$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x)=(x-r)^m h(x)$, dengan h adalah fungsi kontinu yang bersifat $h(r)\neq 0$; dan didapat

$$f'(x)=(x-r)^{m-1}[mh(x)+(x-r)h'(x)].$$

Oleh karena itu, fungsi g yang didefinisikan sebagai $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ memenuhi

$$g(x_n)=x_n-\frac{(x_n-r)h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-r)h'(x_n)}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x-r)h(x)}{mh(x_n)+(x_n-r)h'(x_n)}.$$

Sehingga

$$e_{n+1}=e_n-\frac{e_nh(x_n)}{mh(x_n)+e_nh'(x_n)}$$

$$=e_n\left\{\frac{m-1h(x_n)+e_nh'(x_n)}{mh(x_n)+e_nh'(x_n)}\right\}$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{(m-1)h(x_n)+e_nh'(x_n)}{mh(x_n)+e_nh'(x_n)}.$$

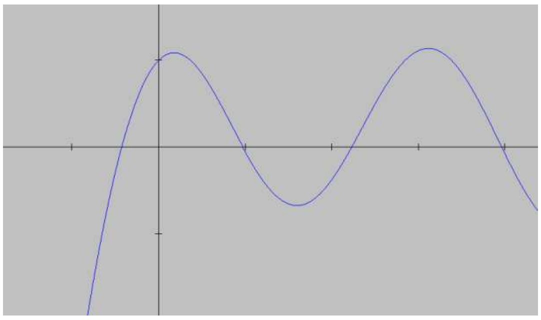
Oleh karena

$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{e_n}=\frac{(m-1)h(r)+0h'(r)}{mh(r)+0h'(r)}=\frac{m-1}{m}$, dan $h(r)\neq 0$. Jadi, iterasi Newton-Raphson konvergen secara linear ke akar ganda r yang berderajat $m>1$.

Untuk memperoleh gambaran lebih jelas tentang konsep dasar teoretis yang telah diuraikan di atas. Berikut ini disajikan contoh aplikasi metode Newton-Raphson untuk mencari salah satu akar dari perssamaan

$$xe^{-x}+\cos(2x)=0$$

dengan tebakan awal $x_0=0{,}176281$. Untuk menyelesaikan masalah ini pertama-tama dibuat sketsa fungsi f dengan aturan $f(x)=xe^{-x}+\cos(2x)$, dalam kasus ini sketsa grafik fungsi menggunakan program aplikasi Winplot dan hasilnya sebagaimana disajikan dalam Gambar 4.



Gambar 4. Sketsa grafik $y = xe^{-x}+\cos(2x)$ menggunakan Winplot

Berdasar pada hasil pengamatan grafik pada Gambar 4, diperoleh pemahaman bahwa $xe^{-x}+\cos(2x)=0$ memiliki banyak akar eksak, terletak pada interval [-1,0], [0,1], [2,3], [3,4], dan seterusnya. Tebakan awal $x_0=0{,}176281$ terletak pada interval [0,1], karena itu memenuhi syarat sebagai tebakan awal. Turunan pertama dari $f(x)=xe^{-x}+\cos(2x)$ adalah $f'(x)=(1-x)e^{-x}-2\sin(2x)$. Dengan menggunakan pendekatan awal $x_0=0{,}176281$. Diperoleh nilai $f(x_0)=1{,}086282$ dan $f'(x_0)=-0{,}000015$. Dengan menggunakan bantuan program Excel, diperoleh hasil hampiran akar disajikan dengan Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Hasil iterasi $f(x)=xe^{-x}+\cos(2x)$ tebakan awal $x_0=0{,}176281$

x	$f(x)$	$f'(x)$
0,17628	1,086282	-1,52216E-05
71364,89	0,594134	-1,608732696
71365,26	-0,10227	-1,989513691
71365,2	0,00036	-1,99999987
71365,2	-2,9E-11	-2
71365,2	3,13E-13	-2
71365,2	3,13E-13	-2

Hampiran akar adalah $x=71365{,}2$ jauh lebih besar dari akar eksaknya, yakni semestinya kurang dari 1; sebagaimana tampak pada Gambar 4 dalam interval [0,1] akar eksaknya mendekati 1. Jadi tebakan awal $x_0=0{,}176281$ ini kurang baik, ini disebabkan tebakan awal berada dekat dengan absis titik balik kurva. Karena itu perlu diganti, misalnya $x_0=0{,}5$. Bila digunakan tebakan awal $x=0{,}5$; maka hasil iterasi dari metode Newton-

Raphson sebagaimana diilustrasikan dengan Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Hasil iterasi $f(x) = xe^{-x} + \cos(2x)$ tebakan awal $x_0 = 0{,}5$

x	$f(x)$	$f'(x)$
0,5	0,843568	-1,37967664
1,111424	-0,24106	1,626349133
0,963203	0,019463	-1,86082504
0,973662	5,61E-05	1,849946271
0,973692	4,9E-10	1,849913417
0,973692	0	1,849913417
0,973692	0	1,849913417

Diperoleh hampiran akar x = 0,973692, hampir sama dengan hasil pengamatan sketsa grafiknya dengan Winplot; yaitu dengan cara "klik" *mouse* ketika ujung anak panah *cursor* pada titik akar eksak yang terlihat di *monitor*, diperoleh informasi di *monitor* koordinatnya (0,96633; 0,00000), dan ini berarti hampiran akar yang diperoleh dengan menggunakan Winplot adalah x = 0,96633.

Untuk dapat memberikan langkah-langkah menyusun diagram alur, pemrograman, atau menyelesaikan secara skematik diperlukan algoritma. Dalam artikel ini disajikan algoritma metode Newton-Raphson untuk keperluan menyusun algoritma dan pemrograman menggunakan komputer; algoritma mencari akar-akar $f(x) = 0$ sebagai berikut.

1. Didefinisikan fungsi f dengan $f(x)$ dan $f'(x)$.
2. Ditentukan epsilon (ε) sebagai toleransi kesalahan; dan iterasi maksimum.
3. Dipilih tebakan awal x_0.
4. Dihitung $f(x_0)$ dan $f'(x_0)$.
5. Dihitung $x_b = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$; $f'(x_0) \neq 0$. Jika $f'(x_0) = 0$ kembali ke langkah-3.
6. Jika $|x_b - x_0| < \varepsilon$, atau itersasi lebih dari iterasi maksimum tulis $x_{hampiran} = x_b$ sebagai hasil hampiran akar; jika tidak, lanjutkan ke langkah berikutnya.
7. Ganti nilai x_0 dengan $x_0 = x_b$, dan kembali ke langkah-4.

Sebagai contoh, tentukan akar dari persamaan $f(x) = 0$ untuk $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan metode Newton-Raphson; untuk tebakan awal $x_0 = 1$ dan toleransi kesalahan 0,00001. Penyelesaian dengan menggunakan bantuan program Excel sebagai berikut. Untuk $f(x) = e^x - 5x^2$, diperoleh $f'(x) = e^x - 10$. Prosedur iterasi dengan metode Newton-Raphson untuk $f(x) = 0$ dengan rumus

$$x_{r+1} = x_r - \frac{e^x - 5x^2}{e^x - 10x}.$$

Dengan menggunakan tebakan awal $x_0 = 1$, dan mengikuti algoritma sebagaimana tertulis di atas, diperoleh hasil iterasi pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Hasil iterasi $f(x) = e^x - 5x^2$ tebakan awal $x_0 = 1$

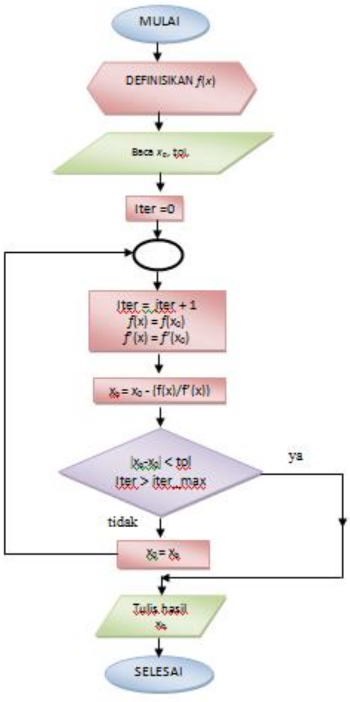
x	$f(x)$	$f'(x)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$	$x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
1,000000	-2,281718	-7,281718	0,313349	0,686651
0,686651	-0,370399	-4,879461	0,075910	0,610741
0,610741	-0,023229	-4,265617	0,005446	0,605296
0,605296	-0,000121	-4,221164	0,000029	0,605267
0,605267	0,000000	-4,220930	0,000000	0,605267

Pada Tabel 3 menyatakan iterasi ke-5 diperoleh hampiran akar x = 0,605267. Hampiran akar ini hampir sama dengan hasil pemeriksaan berdasar pengamatan dan analisis dengan program Winplot pada perpotongan grafik $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan sumbu-X; ujung anak panah *cursor* diimpitkan dengan titik akar eksak dan muncul informasi di layar (0,60761; 0,00000). Jadi diperoleh nilai x = 0,60761 sebagai hampiran akar.

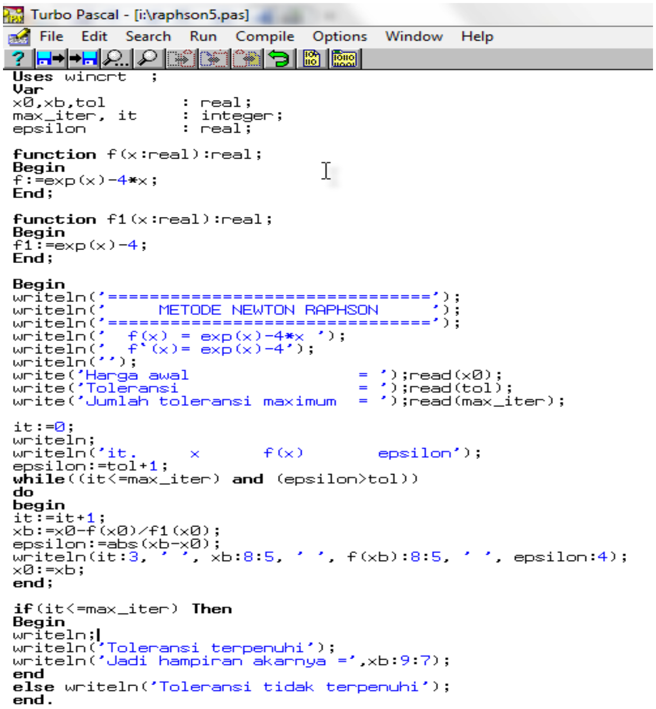
Pemrograman Metode Newton-Raphson dengan Turbo Pascal

Dipandang dari segi kepraktisan dan efisiensi kadang diperlukan progam komputer untuk memecahkan masalah. Diagram alur mencari akar persamaan $f(x)$ = 0 dengan metode Newton-Raphson disajikan pada gambar 5.

Berikut ini disajikan contoh program Turbo Pascal dengan metode Newton-Raphson, mengacu diagram alur Gambar 5, untuk menyelesaikan persamaan $f(x)$ = 0 untuk $f(x) = e^x - 4x$, tebakan awal $x_0 = 0$ dan toleransi kesalahan $\varepsilon = 0{,}00001$. Program Turbo Pascal untuk kasus menentukan hampiran akar persaman tersebut dapat dilihat pada gambar 6.



Gambar 5. Diagram alur metode Newton-Raphson hampiran akar $f(x) = 0$



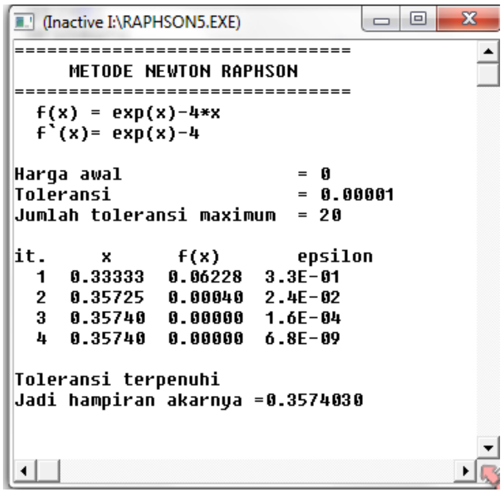
Turbo Pascal - [i:\raphson5.pas]

File Edit Search Run Compile Options Window Help

```
Uses wincrt   ;
Var
x0,xb,tol          : real;
max_iter, it       : integer;
epsilon            : real;

function f(x:real):real;
Begin
f:=exp(x)-4*x;
End;

function f1(x:real):real;
Begin
f1:=exp(x)-4;
End;

Begin
writeln('===============================');
writeln('      METODE NEWTON RAPHSON     ');
writeln('===============================');
writeln('  f(x)  = exp(x)-4*x ');
writeln('  f`(x)= exp(x)-4');
writeln('');
write('Harga awal                  = ');read(x0);
write('Toleransi                   = ');read(tol);
write('Jumlah toleransi maximum    = ');read(max_iter);

it:=0;
writeln;
writeln('it.     x       f(x)        epsilon');
epsilon:=tol+1;
while((it<=max_iter) and (epsilon>tol))
do
begin
it:=it+1;
xb:=x0-f(x0)/f1(x0);
epsilon:=abs(xb-x0);
writeln(it:3, ' ', xb:8:5, ' ', f(xb):8:5, ' ', epsilon:4);
x0:=xb;
end;

if(it<=max_iter) Then
Begin
writeln;
writeln('Toleransi terpenuhi');
writeln('Jadi hampiran akarnya =',xb:9:7);
end
else writeln('Toleransi tidak terpenuhi');
end.
```

Gambar 6. Penyelesaian dengan menggunakan Turbo Pascal

Hail eksekusi dari program tersebut Sebagaimana terlihat pada gambar 7.



(Inactive I:\RAPHSON5.EXE)

```
===============================
    METODE NEWTON RAPHSON
===============================
  f(x) = exp(x)-4*x
  f`(x)= exp(x)-4

Harga awal                 = 0
Toleransi                  = 0.00001
Jumlah toleransi maximum   = 20

it.     x       f(x)      epsilon
  1   0.33333  0.06228   3.3E-01
  2   0.35725  0.00040   2.4E-02
  3   0.35740  0.00000   1.6E-04
  4   0.35740  0.00000   6.8E-09

Toleransi terpenuhi
Jadi hampiran akarnya =0.3574030
```

Gambar 7. Hasil eksekusi hampiran$f(x) = e^x - 4x$

Berdasar pada Gambar 7, disimpulkan hampiran akarnya adalah 0,3574030. Untuk sekadar pemeriksaan kebenaran dari program dan eksekusinya; hampiran akar ini jika cocokkan dengan hampiran akar yang diperoleh dengan perhitungan analitik adalah sama untuk iterasi ke-4 sebagai berikut. Untuk $f(x) = e^x - 4x$ maka $f'(x) = e^x - 4$, diperoleh

$$x_1 = 0 - \frac{e^0 - 4.0}{e^0 - 4} = 0,3333333$$

$$x_2 = 0,3572465$$

$$x_3 = 0,357403$$

$$x_4 = 0,357403.$$

Hampiran akar ini sama dengan hampiran akar yang diperoleh menggunakan program Turbo Pascal yang hasil eksekusinya sebagaimana ditampilkan pada Gambar 5. Dengan demikian, pemrograman dengan Turbo Pascal tersebut dipandang valid dan dapat digunakan untuk mencari akar-akar persamaan lainnya dengan metode Newton-Raphson.

Metode Newton-Raphson merupakan metode untuk mencari hampiran akar-akar persamaan $f(x) = 0$. Cara ini efektif digunakan untuk memecahkan masalah persamaan non linear. Langkah-langkah perhitungannya dapat dilakukan dengan iterasi, yakni melakukan perhitungan berulang sampai hampiran solusi persamaan memberikan galat yang relatif kecil terhadap akar eksaknya. Untuk keperluan praktis dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan komputer, misalnya dengan program Excel, program Turbo Pascal, atau program lainnya.

Meskipun metode Newton-Raphson merupakan metode yang sering digunakan dalam memecahkan masalah kontekstual, tetapi metode ini memiliki kelemahan yang kadang menyulitkan pengguna. Salah satu kelemahannya adalah memerlukan turunan pertama untuk rumus iterasinya. Apabila turunan pertama tidak ditemukan, maka menjadi kendala dalam melakukan perhitungan dengan iterasi. Di samping itu pemilihan tebakan awal yang kurang tepat dapat menjadikan ketidaksesuaian antara hampiran akar yang diperoleh dengan akar eksaknya, atau bahkan menjadikan barisan bilangannya divergen. Karena itu pengguna metode Newton-Raphson perlu hati-hati dalam memilih tebakan awal dan juga mempertimbangkan apakah fungsinya dapat dicari turunan pertamanya.

Daftar Pustaka

Ben-Israel A. 1996. A Newton-Raphson Method for the Solution of System of Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Application*. 15(12): 243-252.

Bressoud DM. 2006. Newton-Raphson Method. Appendix to *A Radical Approach to Real Analysis*. 2nd edition. Tersedia di http://www.futuretg.com/FTHumanEvolutionCourse/FTFreeLearningKits/01-MA-Mathematics.

Chapra SC & RP Canale. 1991. *Metode Numerik untuk Teknik: dengan Penerapan pada Komputasi Pribadi*. Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia.

Conte SD & CD Boor. 1993. *Dasar-Dasar Analisis Numerik*: *Suatu Pendekatan Algoritma.* Edisi Ketiga*.* Jakarta: Erlangga.

Munir R. 2003. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Nasution A & H Zakaria. 2001. *Metode Numerik dalam Ilmu Rekayasa Sipil.* Bandung: ITB Bandung.

Newton I 2012. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. *Cambridge University Digital Library*. Tersedia di http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001. Diunduh 25 Januari 2014.

Prawirosusanto S. 1997. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: FMIPA UGM.

Qudeiri JA, FA Khadra, A Al-Ahmari & U Umar. 2013. Effect of Material and Geometrical Parameters on the Springback of Metallic Sheets. *Life Science Journal*. 10(2): 1531-1536.

Raphson J. 2013. *Universal Arithmetick or Treatise of Arithmetical Compofition and Refolution*. Tersedia di www.center.edu/web/library.

Susila IN. 1994. *Dasar-Dasar Metode Numerik.* Bandung: Depdikbud Dirjen Dikti.