

PELABELAN AKAR RATA-RATA KUADRAT PADA GRAF *LADDER L* DAN GRAF *CORONA* $\odot$

Azhar Mubarak¹, Lucia Ratnasari², Djuwandi³
^{1,2,3} Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika
 Universitas Diponegoro Semarang
 Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang

Abstract. A graph G with p vertices and q edges. A Root Square Mean Labeling of graph G is an injective function from the set of vertices G to the set $1, 2, \dots, 1$ with edge is the number of side on the graph G such that when each edges uv is labeled by a function that defines as ceiling function or floor function from root square mean u and v , then the edge labels are distinct. For each of graphs G that uses root square mean labeling is called as Root Square Mean graph. In this paper, the study is about root square mean labeling on Ladder graph, Corona graph $\odot$. Then, we prove that $\odot \cup$ and $\odot$ graph are included as the root square mean graph.

Keywords : Graph labeing, root square mean labeling, Ladder graph, Corona graph.

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf sudah banyak dikaji mulai tahun 1960-an. Pelabelan pada suatu graf adalah suatu pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari pemetaan adalah himpunan titik, maka pelabelannya disebut pelabelan titik. Jika domainnya adalah sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Jika domainnya titik dan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total [1].

Saat ini sudah mulai banyak jenis pelabelan graf yang dikembangkan. Salah satunya yaitu pelabelan rata-rata (*mean labeling*). Dalam artikel ini, penulis tertarik untuk membahas tentang pelabelan akar rata-rata kuadrat pada graf (*Root Mean Square Labeling*). Pelabelan akar rata-rata kuadrat diperkenalkan oleh [2]. Dalam artikel ini dibahas tentang pelabelan akar rata-rata kuadrat pada graf, yang terkait dengan graf path yaitu graf *Ladder* dan graf *Corona* $\odot$. Pengertian dan definisi-definisi yang berkaitan dengan graf menggunakan referensi [3].

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1 [2] Misalkan G adalah suatu graf dengan p banyaknya titik (vertice) dan q banyaknya sisi (edge). Pelabelan akar rata-rata kuadrat pada G adalah pemetaan injektif $f: G \rightarrow 1, 2, \dots, 1$ sedemikian sehingga jika untuk setiap sisi uv diberi label dengan uv atau uv , maka menghasilkan label sisi yang semuanya berbeda.

Definisi 2.2 [4] Cartesian product dari dua graf G dan G , dinotasikan $G \times G$ adalah graf dengan $G \times G$ dan dua titik u dan v adjacent di $G \times G$ jika (u dan v adjacent dengan u atau v dan v adjacent dengan u).

Definisi 2.3 [5] Cartesian product dari dinamakan graf *Ladder* dan dinotasikan dengan L_n .

Teorema 2.4 [5] Graf *Ladder* merupakan graf akar rata-rata kuadrat.

Bukti :

Didefinisikan fungsi $f: G \rightarrow 1, 2, \dots, 1$ dengan

$v \quad 3 - 1, 1 \leq \leq , \quad u \quad 3 - 2, 1 \leq \leq$
Selanjutnya diselidiki pelabelan sisi untuk graf dengan Definisi 2.1 sebagai berikut:

$$u \quad v \quad \frac{3 - 2 \quad 3 - 1}{2} \\ 9 - 9 \quad \frac{5}{2}$$

karena

$$3 - 2 \quad 9 - 9 \quad \frac{5}{2} \leq 3 - 1 ,$$

maka

$$u \quad v \quad \frac{3 - 2 \quad 3 - 1}{2} \\ 3 - 2 \quad \frac{3 - 2 \quad 3 \quad 1}{2} \\ 9 - 3 \quad \frac{5}{2}$$

karena $3 - 1 \quad 9 - 3 \quad \frac{5}{2} \leq 3 ,$
maka

$$u \quad u \quad \frac{3 - 2 \quad 3 \quad 1}{2} \\ 3 - 1 \quad \frac{3 - 1 \quad 3 \quad 2}{2} \\ 9 \quad 3 \quad \frac{5}{2}$$

Oleh karena $3 \quad 9 \quad 3 \quad \frac{5}{2} \leq 3 - 1 ,$ maka

$$v \quad v \quad \frac{3 - 1 \quad 3 \quad 2}{2} \\ 3$$

sedemikian sehingga setiap sisi diberi label dengan cara sebagai berikut :

$$u \quad v \quad 3 - 2 \quad 1 \leq \leq \\ u \quad u \quad 3 - 1 \quad 1 \leq \leq - 1 \\ v \quad v \quad 3 \quad 1 \leq \leq - 1$$

Jadi, diperoleh himpunan hasil label sisi graf yaitu

$$G \quad 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 3 - 4, 3 - 3, 3 - 2 . \quad \blacksquare$$

Definisi 2.5 [5] *Graf corona $G \odot G$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil dari satu graf G dengan n titik dan sebanyak salinan dari G dengan titik ke dari G adjacent ke setiap titik dalam salinan ke i dari G .*

Teorema 2.6 [5] *Graf $\odot$ merupakan graf akar rata-rata kuadrat.*

Bukti :

Didefinisikan fungsi : $\odot \rightarrow 1, 2, \dots , 1$ dengan
 $4 - 3, \quad 1 \leq \leq$
 $4 - 2, \quad 1 \leq \leq$
 $4 - 1, \quad 1 \leq \leq$

Selanjutnya diselidiki pelabelan sisi untuk graf $\odot$ dengan Definisi 2.1 sebagai berikut :

$$\frac{4 - 3 \quad 4 - 2}{2} \\ 16 - 20 \quad \frac{13}{2}$$

Oleh karena $4 - 3 \quad 16 - 20 - 3 \leq 4 - 2 ,$ maka

$$\frac{4 - 4 \quad 4 - 2}{2} \\ 4 - 3 \quad \frac{4 - 3 \quad 4 \quad 1}{2} \\ 16 - 8 \quad 5$$

Oleh Karena

$$4 - 1 \leq 16 - 8 \quad 5 \quad 4 , \text{ maka } \frac{4 - 3 \quad 4 \quad 1}{2}$$

$$\frac{4-3}{2} \quad \frac{4-1}{2}$$

$$\sqrt{16-16} \quad 5$$

Oleh karena

$$4-2 \quad 16-16 \quad 5 \leq 4-1,$$

maka

$$\frac{4-3}{2} \quad \frac{4-1}{2}$$

$$\frac{4-2}{2}$$

$$\frac{4-2}{2} \quad \frac{4-1}{2}$$

$$16-12 \quad \frac{5}{2}$$

Oleh karena

$$4-2 \leq 16-12 \quad \frac{5}{2} \quad 4-1,$$

maka

$$\frac{4-2}{2} \quad \frac{4-1}{2}$$

$$4-1$$

Sedemikian sehingga setiap sisi diberi label dengan cara sebagai berikut :

$$\begin{array}{ll} 4-3 & 1 \leq \leq \\ 4-2 & 1 \leq \leq \\ 4-1 & 1 \leq \leq \\ 4 & 1 \leq \leq -1 \end{array}$$

Jadi, diperoleh himpunan hasil label sisi graf $\odot$ yaitu

$$G \quad 1,2,3, \dots, 4-4, 4-3, 4-2, 4-1.$$

Definisi 2.7 [2] Union (gabungan) dari dua graf G dan G adalah $G \odot G \cup G$, dimana himpunan titiknya U dan himpunan sisinya U

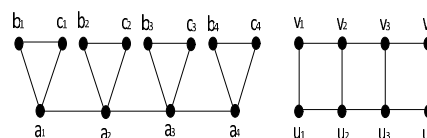
Definisi 2.8 Diberikan graf $\odot$ dan graf Ladder. Union dari kedua graf tersebut menghasilkan graf tidak terhubung. Hasil graf tersebut dinamakan graf $\odot \cup$.

Contoh 2.9 Dibeikan graf $\odot \cup$ dengan himpunan titik $\odot \cup$

, , 3, , , 3, , , 3, ,
 $u, u, u_3, u, v, v, v_3, v$ dan himpunan sisi

$$\odot \cup$$

, 3, 3, , , , 3, 3, ,
 $u, u, u_3, u_3, u, u, v, u, v, u_3, v_3, u, v, v, v, v_3, v_3, v$ yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf $\odot \cup$

Teorema 2.10 Graf $\odot \cup$ merupakan graf akar rata-rata kuadrat.

Bukti :

Didefinisikan fungsi : $G \rightarrow 1,2, \dots, 1$ dengan

$$\begin{array}{ll} 4-3, & 1 \leq \leq \\ 4-2, & 1 \leq \leq \\ 4-1, & 1 \leq \leq \\ u & 4-3-3, \quad 1 \leq \leq \\ v & 4-3-2, \quad 1 \leq \leq \end{array}$$

Selanjutnya diselidiki pelabelan sisi untuk graf $\odot \cup$ dengan Definisi 2.1 sebagai berikut :

$$\frac{4-3}{2} \quad \frac{4-2}{2}$$

$$16-20 \quad \frac{13}{2}$$

Oleh karena

$$4-3 \quad 16-20 \quad -^3 \leq 4-2,$$

maka

$$\frac{4-4}{2} \quad \frac{4-2}{2}$$

$$\frac{4-3}{2}$$

$$\frac{4-3}{2} \quad \frac{4-1}{2}$$

$$16-8 \quad 5$$

Oleh karena

$$4 - 1 \leq 16 - 8 \quad 5 \quad 4, \text{ maka}$$

$$\frac{4 - 3 \quad 4 \quad 1}{2}$$

$$\frac{4}{4 - 3 \quad 4 - 1}$$

$$\sqrt{16 - 16} \quad 5$$

karena

$$4 - 2 \quad 16 - 16 \quad 5 \leq 4 - 1, \text{ maka}$$

$$\frac{4 - 3 \quad 4 - 1}{2}$$

$$\frac{4 - 2}{4 - 2 \quad 4 - 1}$$

$$16 - 12 \quad \frac{5}{2}$$

karena

$$4 - 2 \leq 16 - 12 \quad \frac{5}{2} \quad 4 - 1, \text{ maka}$$

$$\frac{4 - 2 \quad 4 - 1}{2}$$

$$4 - 1$$

$u \quad u$

$$\frac{4 \quad 3 - 3 \quad 4 \quad 3}{2}$$

Misalkan 4 0, maka:

$$\frac{3 - 3 \quad 3}{2}$$

$$9 - 9 \quad \frac{9}{2}$$

karena

$$3 - 2 \quad 9 - 9 \quad - \leq 3 - 1, \text{ maka}$$

$$u \quad u \quad \frac{3 - 3 \quad 3}{2}$$

$$u \quad u \quad \frac{3 - 2}{4 \quad 3 - 3 \quad 4 \quad 3}$$

$$u \quad v \quad \frac{4 \quad 3 - 2}{4 \quad 3 - 3 \quad 4 \quad 3 - 2}$$

Misalkan 4 0, maka:

$$u \quad v \quad \frac{3 - 3 \quad 3 - 2}{2}$$

$$9 - 15 \quad \frac{13}{2}$$

karena

$$3 - 3 \quad 9 - 15 \quad -^3 \leq 3 - 2, \text{ maka}$$

$$u \quad v \quad \frac{3 - 3 \quad 3 - 2}{2}$$

$$u \quad v \quad \frac{3 - 3}{4 \quad 3 - 3 \quad 4 \quad 3 - 2}$$

$$v \quad v \quad \frac{4 \quad 3 - 3}{4 \quad 3 - 2 \quad 4 \quad 3 \quad 1}$$

Misalkan 4 0, maka:

$$v \quad v \quad \frac{3 - 2 \quad 3 \quad 1}{2}$$

$$9 - 3 \quad \frac{5}{2}$$

$$\text{karena } 3 - 1 \quad 9 - 3 \quad \frac{5}{2} \leq 3, \text{ maka}$$

[illegible]

4 3 - 1
sedemikian sehingga setiap sisi diberi label
dengan cara sebagai berikut :

$$\begin{array}{rcl}
4 & - & 3 \quad 1 \leq \leq , \\
4 & - & 2 \quad 1 \leq \leq , \\
4 & - & 1 \quad 1 \leq \leq , \\
4 & & 1 \leq \leq - 1, \\
u \ v & 4 & 3 - 3 \quad 1 \leq \leq , \\
u \ u & 4 & 3 - 2 \quad 1 \leq \leq - 1, \\
v \ v & 4 & 3 - 1 \quad 1 \leq \leq - 1
\end{array}$$

Jadi, diperoleh himpunan hasil label sisi graf $(\odot \cup \cup)$ yaitu

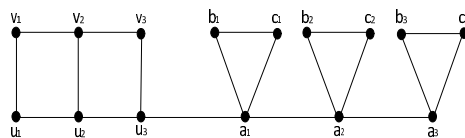
$$\begin{array}{rcl} G & 1,2,3,\dots,4 & - 4,4 - \\ 3,4 & - 2,4 & - 1,4 \quad 3 - 5,4 \\ 3 & - 4,4 & 3 - 3. \end{array}$$

Definisi 2.11 Suatu graf Ladder dihubungkan dengan graf $\odot$ dengan menambahkan satu garis di titik u pada graf Ladder dan titik pada graf $\odot$ akan menghasilkan graf terhubung. Hasil graf tersebut dinamakan graf $\odot$.

Contoh 2.12 Diberikan graf dengan himpunan titik

$u, u, u_3, v, v, v_3,$, , $3,$, , $3,$, , 3
 dan himpunan sisi $3,$ $3 \odot$

yang ditunjukkan pada Gambar 3.37.



Gambar 2.2 Graf $_{3, 3}\odot$

Teorema 2.13 *Graf G , $\odot$ merupakan graf akar rata-rata kuadrat.*

Bukti :

Didefinisikan fungsi

dengan

$$\begin{array}{llll} u & 3 & -2, & 1 \leq \leq, \\ v & 3 & -1, & 1 \leq \leq, \\ & 3 & 4-4, & 1 \leq \leq, \\ & 3 & 4-3, & 1 \leq \leq, \\ & 3 & 4-2, & 1 \leq \leq, \end{array}$$

Selanjutnya diselidiki pelabelan sisi untuk graf $\odot \cup$ dengan Definisi 2.1 sebagai berikut :

$$\begin{array}{r} \hline \hline u \ v \quad \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{array} \\ \hline \qquad \qquad \qquad 2 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \begin{array}{cc} 9 & -9 \end{array} \quad \frac{5}{2} \\ \hline \end{array}$$

karena

$$3 - 2 \quad 9 - 9 \quad \frac{5}{-} \leq 3 - 1 \quad ,$$

maka

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \hline
 3 \quad - \quad 2 \qquad \qquad 3 \quad - \quad 1 \\
 \hline
 2
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \quad - \quad 2 \\
 \hline
 3 \quad - \quad 2 \qquad \qquad 3 \quad 1 \\
 \hline
 2
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 \hline
 9 \quad - \quad 3 \qquad \qquad \frac{5}{2}
 \end{array}
 \end{array}$$

karena $3 - 1 = 9 - 3 = 5 \leq 3$,

maka

$$\begin{array}{r} \mu u \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \hline 3 \quad - \quad 2 \qquad \qquad 3 \quad 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} v v \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \quad - \quad 1 \\ \hline 3 \quad - \quad 1 \qquad \qquad 3 \quad 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 9 \qquad 3 \qquad \frac{5}{2} \end{array}$$

karena

$$3 \quad 9 \quad 3 \quad \frac{5}{-} \leq 3 \quad 1, \text{ maka}$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 - 1 \quad 3 \quad 2 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 4 \quad 3 \quad 4 - 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Misalkan 3 0, maka:

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 4 \quad 4 - 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 16 - 28 \quad \frac{25}{2} \\ \hline \end{array}$$

karena $4 - 2 \quad 16 - 28 \quad -^5 \leq 4 - 3$, maka

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 4 \quad 4 - 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$4 - 4$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 4 \quad 3 \quad 4 - 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \quad 4 - 4$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 4 \quad 3 \quad 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Misalkan 3 0, maka:

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 4 \quad 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 16 - 16 \quad 8 \\ \hline \end{array}$$

karena $4 - 2 \leq 16 - 16 \quad 8 \quad 4 - 1$, maka

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 4 \quad 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$4 - 1$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 4 \quad 3 \quad 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \quad 4 - 1$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 4 \quad 3 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Misalkan 3 0, maka:

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 4 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 16 - 24 \quad 10 \\ \hline \end{array}$$

karena $4 - 3 \quad 16 - 24 \quad 10 \leq 4 - 2$, maka

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 4 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$4 - 3$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 4 \quad 3 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$3 \quad 4 - 3$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 3 \quad 3 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Misalkan 3 0, maka:

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 3 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 16 - 20 \quad \frac{13}{2} \\ \hline \end{array}$$

karena $4 - 3 \leq 16 - 20 \quad -^3 \quad 4 - 2$, maka

$$\begin{array}{r} \hline 4 - 3 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$4 - 2$$

$$\begin{array}{r} \hline 3 \quad 4 - 3 \quad 3 \quad 4 - 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 4 - 2 \\ u \quad \hline 3 - 2 \quad 3 \quad 4.1 - 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

Misalkan 3 , maka didapat :

$$\begin{array}{r} u \quad \hline 3.3 - 2 \quad 3.3 \quad 4.1 - 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 7 \quad 9 \\ \hline 2 \end{array}$$

8,06 $3.3 - 1$ $3 - 1$
sedemikian sehingga setiap sisi diberi label dengan cara sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} u v \quad 3 - 2 \quad 1 \leq \leq \\ u u \quad 3 - 1 \quad 1 \leq \leq - 1 \\ v v \quad 3 \quad 1 \leq \leq - 1 \\ u \quad 3 - 1 \\ \quad 3 \quad 4 \quad 1 \leq \leq - 1 \\ \quad 3 \quad 4 - 1 \quad 1 \leq \leq - 1 \\ \quad 3 \quad 4 - 3 \quad 1 \leq \leq - 1 \\ \quad 3 \quad 4 - 2 \quad 1 \leq \leq - 1 \end{array}$$

Jadi, diperoleh himpunan hasil label sisi graf G , $\odot$ yaitu

$$G \quad 1, 2, 3, \dots, 3 - 4, 3 -$$

$$3, 3 - 2, 3 - 1, 3 - 4 - 5, 3$$

$$4 - 4, 3 - 4 - 3, 3 - 4 - 2 .$$

3. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan, maka pelabelan akar rata-rata kuadrat dapat disimpulkan bahwa *Ladder* . graf

$\odot$ merupakan graf akar rata-rata kuadrat. Demikian juga graf $\odot \cup$, graf , $\odot$ merupakan graf akar rata-rata kuadrat.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gallian, J.A., (2012), A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17.
- [2] Sandhya S., S., Somasundaram S., Anusa S., (2014), Root Square Mean Labeling of Graphs, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 9(14): 667-676.
- [3] Wilson, J. Robin, John J. Watkins, (1990), *Graphs An Introductory Approach*, NewYork : University Course Graphs, Network, and Design
- [4] Sandhya S. S, Somasundaram. S, Anusa S, (2014), Some New Results on Root Square Mean Labeling, *International Journal of Mathematical Archive-5* (12) : 130-135.
- [5] Sandhya S. S, Somasundaram S, Anusa S., (2015), Root Square Mean Labeling of Some More Disconnected Graphs, *International Mathematical Forum*, 10(1) : 25-34.