KONSTRUKSI INTEGRAL MENGGUNAKAN FUNGSI SEDERHANA – δ PADA $[a,b]$

Abdul Aziz[1], YD. Sumanto[2]
[1,2] Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang, 50275

Abstract. In this paper, weconstruct the δ – simple functionusing the δ- fine Perron partition. By this function, we defineintegral, which is called H^o integral.

Keywords : δ- fine Perron partition , δ – simple function, H^o integral.

1. PENDAHULUAN

Di dalam dunia modern saat ini banyak teori matematika yang telah diterapkan untuk membantu umat manusia dalam memenuhi kebutuhannya. Teori – teori ini merupakan landasan dan jaminan akan validnya suatu metode yang diterapkan dalam kehidupan sehari – hari. Di dalam matematika dikenal integral Henstock. Henstock mengkonstruksi integralnya dengan menggunakan partisi Perron $-\delta$ fine. Integral Henstock telah menjadi topik yang menarik bagi para peneliti. Banyak peneliti mengkaji sifat-sifat integral Henstock, baik secara teori maupun aplikasinya. Misalnya [1] telah mengkaji integral Henstock dalam ruang real $\mathbb{R}$ dan digeneralisasi oleh[2] dalam ruang Euclide $\mathbb{R}^n$ dan mengaplikasikannya dalam medan vektor. Penulis akan memanfaatkan partisi Perron $-\delta$ fine untuk membentuk fungsi sederhana$-\delta$. Selanjutnya dari fungsi sederhana$-\delta$ akan dikonstruksi integral baru.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 PartisiPeron$\delta - Fine$

Berikut dibahas definisi daripartisi *Perron* $\delta - fine$ pada $[a,b]$ beserta jaminan eksistensinya.

Definisi 2.1[5] *Diberikan interval* $[a,b]\subset \Re$, *dan* δ *fungsi positif pada* $[a,b]$. *P disebut partisi Perron* $\delta - fine$ pada$[a,b]$ jika $P = \{[x_{i-1},x_i],\xi_i | i = 1,2,3,\dots,n\}$ dengan $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ *dan* $[x_{i-1},x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_{ii}), \xi_i + \delta(\xi_i))$ *dengan* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Berikut ini adalah lemma yang menjamin eksistensi partisi Perron $\delta - fine$.

Lemma 2.2 [1] *Jika* $\delta(\varepsilon) > 0$, *untuk* $\xi \,\epsilon [a,b]$, *maka terdapat partisi Perron* $\delta - fine$ $P = \{[x_{i-1},x_i],\xi_i | i = 1,2,3,\dots,n\}$ *dan* $\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$*sedemikian sehingga berlaku* $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ *dan* $[x_{i-1},x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_{ii}), \xi_i + \delta(\xi_i))$ *untuk i = 1, 2, 3, … , n.*

Bukti :

Diberikan [a,b] $\subset \Re$ dan fungsi positif δ pada [a,b], selanjutnya dibentuk $G = \{(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)) | \xi \epsilon [[a,b]\}$ liput terbuka dari [a,b]. Karena [a,b] kompak maka G mempunyai liput bagian hingga, misalkan $\{(\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k)) |\ 1, 2,$ ...n$\}$

diambil x_0= a dan x_n= b $x_i \epsilon \big(\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)\big) \cap \big(\xi_{i+1} - \delta(\xi_{i+1}), \xi_{i+1} + \delta(\xi_{i+1})\big), \xi_i \leq x_i \leq \xi_{i+1},\ i = 1,2,3,\dots,n-1$

Dari sini diperoleh

$\xi_i \epsilon\ [x_{i-1},x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$■

Lemma 2.3[4] *Diberikan P adalah partisi Perron* $\delta - fine$ *pada* $[a,b]$. $[c,d] \subseteq [a,b]$ *maka terdapat partisi Perron* $\delta - fine$ *pada* $[c,d]$*dengan c dan d sebagai salah satu titik ujungnya*

Bukti :
Diberikan fungsi positif-δ pada interval $[a,b]$. Selanjutnya dipilih $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, di mana $[a,b] \subset \bigcup_1^n \big(\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_{k+1} + \delta(\xi_{k+1})\big)$sehingga dengan mengambil$c \epsilon \big(\xi_r - \delta(\xi_r), \xi_r + \delta(\xi_r)\big) \bigcap \big(\xi_{r+1} - \delta(\xi_{r+1}), \xi_{r+1} + \delta(\xi_{r+1})\big)$ dengan $\xi_r \le c \le \xi_{r+1}$ untuk $1 \le r \le n$ dan mengambil $d \,\epsilon\, (\xi_s - \delta(\xi_s), \xi_s + \delta(\xi_s)) \bigcap (\xi_{s+1} - \delta(\xi_{s+1}), \xi_{s+1} + \delta(\xi_{s+1}))$dengan $\xi_s \le d \le \xi_{s+1}$ untuk suatu r,s dengan 1<r<s<n.

Diambil x_0= a dan x_n= b

$$x_i \epsilon \big(\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)\big) \bigcap \big(\xi_{i+1} - \delta(\xi_{i+1}), \xi_{i+1} + \delta(\xi_{i+1})\big), \xi_i \le x_i \le \xi_{i+1}$$

dengan $i = 1,2,3,\ldots,n-1$, $x_r = c$ dan $x_s = d$

Dari sini diperoleh partisi Perron $\delta - fine$ pada [a,b]

$$P = \{([x_0 = a, x_1], \xi_1), \ldots, ([x_{r-1}, x_r = c], \xi_r), ([x_r = c, x_{r+1}], \xi_{r+1}), \ldots, ([x_{s-1}, x_s], \xi_s), ([x_s = d, x_{s+1}], \xi_{s+1}), \ldots, ([x_{n-1}, x_n = b])\}$$

dimana c dan d sebagai titik ujung.■

Teorema 2.4 [3] *Jika P dan Q masing – masing partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b]$ dan $[c,d]$ maka $P \bigcup Q$ adalah partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b] \bigcup [c,d]$.*

Bukti :
Diberikan fungsi positif δ, P = $\{[x_{i-1}, x_i], \xi_i |\ i = 1,2,3,\ldots,m\}$partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b]$, dan Q = $\{[Y_{k-1}, Y_k], \xi_k | k = 1,2,3,\ldots,m\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[c,d]$. Karena δ fungsi positif pada $[a,b]$ dan $[c,d]$, akibatnya δ juga merupakan fungsi positif pada $[a,b] \bigcup [c,d]$.Dari sini diperoleh $P \bigcup Q = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1,2,3,\ldots,m\} \cup \{[Y_{k-1}, Y_k], \xi_k | k = 1,2,3,\ldots,m\}$ merupakan partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b] \bigcup [c,d]$.■

2.2 Integral pada Fungsi Sederhana–δ

Pada bagian ini dibahas tentang integral pada fungsi sederhana – δ yang erat kaitannya dengan integral yang diuraikan penulis setelah bagian ini. Selain itu, juga dibahas tentang sifat – sifat sederhana yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.5 [13]*Jika $\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ fungsi sederhana – δ pada interval $[a,b] \subset \Re$ dengan $E_i = [x_{i-1}, x_i)$ i = 1, 2, 3, ..., n-1, $E_n = [x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, dan $x_n = b$ maka integral ϕ pada interval $[a,b]$ terhadap x adalah*

$$\int_a^b \phi\, dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

Teorema berikut merupakan sifat dasar integral fungsi sederhana – δ.

Teorema 2.6 [13] *Jika ϕ dan ψ fungsi – fungsi sederhana $-\delta$ pada interval $[a,b] \subseteq \Re$ dan $k \,\epsilon\, \Re$ maka*

a.$\int_a^b k\phi\, dx = k \int_a^b \phi\, dx$

$$b. \int_a^b (\phi + \varphi) dx = \int_a^b \phi\, dx + \int_a^b \varphi\, dx$$

Bukti :
a.$\phi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ dan $\varphi = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{D_j}$

maka$\int_a^b k\phi\, dx = \sum_{i=1}^n (kc_i)(x_i - x_{i-1})$

$$= k \sum_{i=1}^n (c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= k \int_a^b \phi\, dx$$

b. $\phi + \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\sum_{k=1}^{r_{ij}} (c_i + d_j) \chi_{H_k})$ merupakan fungsi sederhana – δ dengan $\{[z_{ijk-1}, z_{ijk}], \xi_{ijk} | k = 1,2,3,\ldots,r_{ij}\}$partisi Perron $\delta - fine$ pada $P_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \bigcap [y_{j-1}, y_j]$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$.

Jadi diperoleh $\int_a^b (\phi + \varphi) dx$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_{ij}} (c_i + d_j)(z_k - z_{k-1})$$

$=\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_{ij}} c_i (z_k - z_{k-1})) + \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_{ij}} d_j (z_k - z_{k-1}))$

$=\sum_{i=1}^n (c_i \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_{ij}} (z_k - z_{k-1})) + \sum_{j=1}^m (d_j \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{r_{ij}} (z_k - z_{k-1}))$

$=\sum_{i=1}^n (c_i \sum_{j=1}^m |P_{ij}|) + \sum_{j=1}^m (d_j \sum_{i=1}^n |P_{ij}|)$

$=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{m} d_j (y_j - y_{j-1})$
$=\int_a^b \phi\, dx + \int_a^b \varphi\, dx$■

2.3 Integral H^0

Pada bab ini dibahas tentang integral H^0 beserta sifat – sifat sederhana yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.7 *Fungsi f : $[a,b] \to \Re$ dikatakan terintegral H^0 pada $[a,b]$ jika terdapat bilangan $I \in \Re$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif –δ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga P = $\{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b]$ maka terdapat $\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ merupakan fungsi sederhana –δ atas P dengan f berelasi dengan ϕ dan memenuhi $|I - \int \phi| < \varepsilon$.*

Selanjutnya I disebut nilai integral H^0 pada $[a,b]$ dan ditulis

$$I = (H^0)\int_a^b f(x)\, dx$$

Teorema 2.8 *Jika $f \in H^0([a,b])$ maka nilai integral H^0 pada [a,b] tunggal.*

Bukti :

Misalkan $(H^0)\int_a^b f(x)\, dx = I_1$ dan $(H^0)\int_a^b f(x)\, dx = I_2$

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif –δ pada $[a,b]$. Karena $(H^0)\int_a^b f(x)\, dx = I_1$maka dapat ditemukan fungsi positif δ_1 pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta_1 - fine$ pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi sederhana - $\delta_1 \phi_1$ atas P_1 pada $[a,b]$ dengan f berealsi denganϕ_1 dan $|I_1 - \int \phi_1| < \frac{\varepsilon}{2}$.Selanjutnya karena $(H^0)\int_a^b f(x)\, dx = I_2$ maka dapat ditemukan fungsi positif δ_2 pada $[a,b]$ sehingga jika $P_2 = \{[y_{k-1}, y_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \dots, m\}$ adalah partisi Perron $\delta_2 - fine$ pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi sederhana - $\delta_2 \phi_2$ atas P_2 pada $[a,b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_2 dan $|I_2 - \int \phi_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya dibentuk fungsi positif $\delta(x) = \min(\delta_1(x), \delta_2(x))$ untuk setiap x ϵ $[a,b]$ dan P = $\{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b]$ dan $\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ merupakan fungsi sederhana –δ atas P pada $[a,b]$ dengan f berelasi denganϕ. Karena $\delta(x) \le \delta_1(x)$ dan $\delta(x) \le \delta_2(x)$ maka P juga merupakan partisi Perron $\delta_1 - fine$ dan partisi Perron $\delta_2 - fine$ pada $[a,b]$. Akibatnya ϕ merupakan fungsi sederhana - δ_1 sekaligus fungsi sederhana - δ_2 pada $[a,b]$. Dari sini diperoleh $|I_1 - \int \phi_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|I_2 - \int \phi_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.Selanjutnya

$$\begin{aligned} |I_1 - I_2| &= \left| I_1 - \int \phi + \int \phi - I_2 \right| \\ &\le |I_1 - \int \phi| + |\int \phi - I_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $I_1 = I_2$.■

Teorema 2.9 *Misalkan f.g : $[a,b] \to \Re$ dan f.g ϵ $H^0([a,b])$ berlaku :*

a. $kf \epsilon H^0([a,b])$ dan
$(H^0)\int_a^b kf(x)\, dx = k(H^0)\int_a^b f(x)\, dx$

b. $f + g \epsilon H^0([a,b])$

Selanjutnya ditulis $(H^0)\int_a^b (f+g)\, dx = (H^0)\int_a^b f(x)\, dx + (H^0)\int_a^b g(x)\, dx$

Bukti :

a. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena f(x) terintegral H^0 pada $[a,b]$, misal $I = (H^0)\int f(x)\, dx$ akibatnya untuk bilangan ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi sederhana - $\delta_1 \phi_1$ atas P_1 pada $[a,b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_1 dan $\left| I - \int_a^b \phi_1 \right| < \frac{\varepsilon}{|k|+1}$.

Selanjutnya dibentuk $\phi^* = k\phi_1$ fungsi sederhana - δ_1 atas P_1 pada $[a,b]$.

Karena f berelasi dengan ϕ_1, maka

$$\begin{aligned} |kf(\xi) - k\phi(\xi)| &= |k||f(\xi) - \phi(\xi)| \\ &< |k|\varepsilon \end{aligned}$$

Akibatnya kf berelasi dengan ϕ^*.

Dari sini diperoleh

$$\left|kI - \int_a^b \phi^*\right| = \left|kI - \int_a^b k\phi_1\right|$$
$= \left|\left|kI - k\int_a^b \phi_1\right|\right|$
$= |k|\left|I - \int_a^b \phi_1\right|$
$< \frac{|k|\varepsilon}{|k|+1}$
$< \varepsilon$

Terbukti bahwa *kf* terintegral H^0.

Karena $\int_a^b k\phi_1 = k\int_a^b \phi_1$ akibatnya $(H^0)\int_a^b kf = (H^0)k\int_a^b f$

b. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena f(x) terintegral H^0 pada $[a, b]$, misalkan $I_1 = (H^0)\int f\,dx$ akibatnya untuk bilangan ε yang diberikan,terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana - $\delta_1\phi_1$ atas P_1 pada $[a, b]$ dengan f <>ϕ_1 dan $\left|I_1 - \int_a^b \phi_1\right| < \varepsilon$.

Karena g(x) terintegral H^0 pada $[a, b]$, misalkan $(H^0)\int_a^b g(x)\,dx = I_2$ akibatnya untuk bilangan ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga jika $P_2 = \{[y_{k-1}, y_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \dots, m\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a, b]$ maka terdapat fungsi sederhana - $\delta_2\phi_2$ atas P_2 dengan g <>ϕ_2 dan $\left|I_2 - \int_a^b \phi_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dibentuk fungsi positif $\delta^* = min\{\delta_1, \delta_2\}$, selanjutnya dibentuk pula $P^* = P_1 \cap P_2$ partisi Perron -$\delta\ fine$ pada $[a, b]$.

Lalu dibentuk $\phi^* = \phi_1 + \phi_2$ fungsi sederhana -δ^* atas P^*. Oleh karena f <>ϕ_1 dan g<>ϕ_2 akibatnya $|f(\xi) + g(\xi) - \phi_1(\xi) - \phi_2(\xi)| \le |f(\xi) - \phi_1(\xi)| + |g(\xi) - \phi_2(\xi)| = \varepsilon + \varepsilon$

Dari sini diperoleh f + g berelasi dengan $+\phi_2$.

Selanjutnya
$\left|(I_1 + I_2) - \int_a^b \phi^*\right|$
$= \left|(I_1 + I_2) - \int_a^b(\phi_1 + \phi_2)\right|$
$= \left|I_1 + I_2 - \int_a^b \phi_1 - \int_a^b \phi_2\right|$
$\le \left|I_1 - \int_a^b \phi_1\right| + \left|I_2 - \int_a^b \phi_2\right|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Diperoleh
$\int (f + g)(x)dx = I_1 + I_2$
$= (H^0)\int f(x)dx + (H^0)\int g(x)dx$ ■

Teorema 2.10 *Jika fungsi* $f \in H^0([a, b])$ *dan* $f \in H^0([b, c])$, *maka* $f \in H^0([a, b])$ *dan dapat ditulis* $(H^0)\int_a^c f = (H^0)\int_a^b f + (H^0)\int_b^c f$.

Bukti :

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena f(x) terintegral H^0 pada $[a, b]$ maka terdapat $I_1 \in \Re$ dan untuk sebarang ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_1 > 0$ sehingga jika $P_1 = \{([x_0, x_1], \xi_1) \dots ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)\}$ adalah partisi Perron $\delta_1 - fine$ pada $[a, b]$ dengan x_0 =a maka terdapat $\phi_1 = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{E_i}$ yang merupakan fungsi sederhana -δ_1 atas P_1 pada $[a, b]$ dengan f berelasi dengan ϕ_1 dan $\left|I_1 - \int_a^b \phi_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena f(x) terintegral H^0 pada $[b, c]$ maka terdapat $I_2 \in \Re$ dan untuk sebarang ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga jika

$P_2 = \{([y_0, y_1], \xi_1) \dots ([y_{n-1}, y_n], \xi_n)\}$

adalah partisi Perron $\delta_2 - fine$ pada $[b, c]$ dengan $y_0 =$ b, $y_n = c$ maka terdapat $\phi_2 = \sum_{j=1}^n c_i\chi_{F_j}$ fungsi sederhana -δ_2 atas P_2 pada $[b, c]$ dengan g berelasi dengan ϕ_2 dan $\left|I_2 - \int_b^c \phi_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Diambil fungsi positif

$$\delta^* = \begin{cases} \delta_1(x) & x \in [a, b) \\ \delta_2(x) & x \in [b, c) \end{cases}$$

Selanjutnya dibentuk $P^* = P_1 \cup P_2 = \{([x_0, x_1], \xi_1) \dots ([x_k, x_{k+1}], \xi_k), \dots, ([x_{k+n-1}, x_{k+n})\}$ partisi Perron $\delta\ fine$ pada $[a, b) \cup [b, c]$, dengan $x_k = b$,

$x_{k+1} = y_i$,
$\xi_{k+1} = \xi_i$ untuk i = 1, 2, 3, ..., n.

Dari partisi ini dapat dibentuk fungsi sederhana – δ

$$\phi^* = \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{E_i} + \sum_{j=k+1}^{n} c_i\chi_{F_j}$$

atas P^*dengan$E_i = [x_{i-1}, x_i)$ untuk i = 1, 2, 3, ..., k, $E_k = [x_{k-1}, x_k)$ dengan $x_k = b$, $F_j = [x_{j-1}, x_j)$ untuk j=k+1, k+2, ..., n-1, dan $E_n = [x_{n-1}, x_n)$ dengan $x_{k+n} = c$, di mana *f* berelasi denganϕ^*.

Selanjutnya diperoleh

$\left|I_1 + I_2 - \int_a^b \phi^*\right|$

$= |I_1 + I_2 - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})|$

$= \left|I_1 + I_2 - \sum_{i=1}^{k} c_i(x_i - x_{i-1})\right|$

$- \sum_{i=k+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$

$\leq \left|I_1 - \sum_{i=1}^{k} c_i(x_i - x_{i-1})\right| +$

$|I_2 - \sum_{i=k+1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})|$

$= \left|I_1 - \int_a^b \phi_1\right| + \left|I_2 - \int_b^c \phi_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Selanjutnya

$(H^0)\int_a^c f(x)dx = I_1 + I_2 = (H^0)\int_a^b f + (H^0)\int_b^c f$ ■

Teorema 2.11 (Kriteria Cauchy)

Suatu fungsi $f \in H^0([a,b])$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *sehingga jika* $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$ *dan* $P_2 = \{[y_{j-1}, y_j], \xi_j | j = 1, 2, 3, \ldots, n\}$ *adalah partisi – partisi Perron* $\delta - fine$ *pada* $[a,b]$ *maka terdapat* $\phi_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ *yang merupakan fungsi sederhana –*δ *atas* P_1 *pada* $[a,b]$ *dimana f berelasi dengan* ϕ_1 *dan* $\phi_2 = \sum_{j=1}^{n} c_i \chi_{F_j}$*adalah fungsi sederhana -*δ *atas* P_2 *pada* $[a,b]$ *dengan f berelasi dengan* ϕ_2 *dan memenuhi*$\left|\int_a^b \phi_1 - \int_a^b \phi_2\right| < \varepsilon$.

Bukti :

⟹Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena f(x) terintegral H^0 maka terdapat bilangan $I \in \mathfrak{R}$ dan untuk ε yang diberikan terdapat fungsi $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika sedemikian sehingga jika $P_1 = \{[x_{i-1}, x_i], \xi_i | i = 1, 2, 3, \ldots, k\}$ partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi sederhana - δ ϕ_1 atas P_1 pada $[a,b]$ dengan *f* berelasi denganϕ_1 dan $\left|I_1 - \int_a^b \phi_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya jika $P_2 = \{[y_{k-1}, x_k], \xi_k | k = 1, 2, 3, \ldots, n\}$ adalah partisi Perron $\delta - fine$ pada $[a,b]$ maka terdapat fungsi sederhana - δ ϕ_2 atas P_2 pada $[a,b]$ dengan *f* berelasidenganϕ_2 dan $\left|I_2 - \int_a^b \phi_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dari sini diperoleh $\left|\int_a^b \phi_1 - \int_a^b \phi_2\right| = \left|\int_a^b \phi_1 - I + I - \int_a^b \phi_2\right|$

$$\leq \left|\int_a^b \phi_1 - I_1\right| + \left|I_2 - \int_a^b \phi_2\right|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

⟸Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif $\delta_1 > 0$ pada $[a,b]$. Selanjutnya jika P_1 dan P_2 merupakan partisi Perron $\delta_1 - fine$ maka terdapat fungsi sederhana δ_1 ϕ_1 atas P_1 dan fungsi sederhana δ_1 ϕ_1 atas P_1' dengan $|\int \phi_1 - \int \phi_1'| < \varepsilon$. Selanjutnya diambil fungsi positif δ_2, dengan $0 < \delta_2 < \delta_1$. Akibatnya, jika P_2 dan P_2' merupakan partisi – partisi Perron $\delta_2 - fine$ maka terdapat fungsi sederhana - $\delta_2\phi_2$ atas P_2 dan fungsi sederhana $\delta_2\phi_2$ atas P_2' dengan $|\int \phi_2 - \int \phi_2'| < \varepsilon$.

Selanjutnya diambil fungsi positif δ_3 dimana $0 < \delta_3 < \delta_2 < \delta_1$. Akibatnya, jika P_3 dan P_3' merupakan partisi – partisi Perron $\delta_3 - fine$ maka terdapat fungsi sederhana - $\delta_3\phi_3$ atas P_3 dan fungsi sederhana $\delta_3\phi_3$ atas P_3' dengan $|\int \phi_3 - \int \phi_3'| < \varepsilon$. Proses ini dilakukan terus menerus hingga diperoleh suatu barisan bilangan $A = \{\int \phi_k | k = 1, 2, 3, \ldots\}$. Karena untuk setiap P_k partisi Perron $\delta - fine$ maka untuk i,j = 1, 2, 3, ... berlaku $\left|\int \phi_i - \int \phi_j\right| < \varepsilon$. Dari sini diperoleh A terbatas. Selanjutnya berdasarkan teorema Bolzano Weirstrass A mempunyai titik limit yang dimisalkan I. Dengan kata lain A mempunyai barisan bagian yang konvergen ke I, dimisalkan $\int \phi_N$. Hal ini berarti untuk setiap bilangan ε yang diberikan terdapat bilangan asli N sehingga $|\int \phi_N - I| < \varepsilon$. Dari sini untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat fungsi positif δ_N sedemikian sehingga jika P_N adalah partisi Perron $\delta_N - fine$maka terdapat fungsi sederhana– δ_N atas P_N dengan *f* berelasi dengan ϕ_N dan

$|\int \phi_N - I| < \varepsilon.$■

Teorema 2.12*Jika f(x) fungsi yang terintegral Riemann pada* $[a, b]$ *maka f(x) terintegral* H^0 *pada* $[a, b]$.

Bukti :

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, karena f(x) terintegral Riemann akibatnya terdapat $I \in \Re$ dan untuk ε yang diberikan, terdapat δ^* konstan di mana $\delta^* > 0$ sedemikian sehingga jika p adalah partisi pada $[a, b]$ di mana $|P| = |x_i - x_{i-1}| < \delta^*$ dan untuk $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$ maka $|S(p, f) - I| < \varepsilon$,

Dengan S(p,f) = $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

Diambil fungsi $\delta = \delta^* > 0$.

Karena $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$ maka $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}] \subset (\xi_i - \delta, \xi_i + \delta)$

Oleh karena itu partisi Riemann di atas juga merupakan partisi Perron $\delta - fine$.

Selanjutnya dengan mengambil $c_i = f(\xi_i)$, dibentuk fungsi sederhana – δ atas P yaitu :

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\chi_{E_i}$$

karena

$$|f(\xi) - \phi(\xi)| = \left| f(\xi) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\chi_{E_i} \right|$$
$$= 0 < \varepsilon.$$

Akibatnya f berelasi dengan ϕ,

Dari sini diperoleh $\int_a^b \phi = S(p, f)$

Selanjutnya $\left|\int_a^b \phi\, dx - I\right| = |S(p, f) - I| < \varepsilon.$ ■

3. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa Partisi Perron $-\delta\ fine$ dapat digunakan untuk membentuk fungsi sederhana- δ yang digunakan untuk membentuk integral baru yang disebut H^0 dan eksistensi dari nilai integral H^0 dijamin oleh sifat ketunggalan dan sifat – sifat linier yang berlaku di dalamnya.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Lee P.Y. (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.

[2] Indrati, Ch.R., Surodjo, Budi. (2000), *Aplikasi Integral Henstock-Kurzweil pada Medan Vektor*, Lembaga Penelitian UGM, Yogyakarta.

[3] Gordon, R.A. (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.

[4] Lee P.Y. &Vyborny, R. (2000), *Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, Cambridge

[5] Sumanto, Y.D. (2002), *Jenis – jenis integral Henstock – Bochner pada ruang Eucild*$\Re^n$, Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.