

MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK DENGAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN DEMAM BERDARAH DENGUE

Kartono¹, Widowati², R.Heri Soelistyo Utomo³, R. Heru Tjahjana⁴
^{1,2,3,4}Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro Semarang
Jl.Prof. H.Soedarto,SH, Tembalang, Semarang
¹kartonoundip@gmail.com

Abstract. Controlling of spread of dengue fever was sought by the government together with the people by, among others, campaigning “3M controlling” and eradicating of the vector population using insecticide and threatening the infected people. The aim of this research is constructing the optimal control dynamic model by applying several strategies to control the spread of dengue fever. In this paper, the optimal control is constructed by using host logistic growth population model approach and then it is solved by using maximum Pontryagin principle. The results show that in the equilibrium condition, the effect of the control variable u_1 (“3M campaigning” and eradicating of the mosquito by using insecticide) is strongly affected by the rate of the direct contact between host population and the infected and susceptible vector whereas the control variable u_2 is strongly affected by the number of the infected host population.

Keywords: DBD, infection, control, optimal, Pontryagin

1. PENDAHULUAN

Berbagai upaya telah dilakukan dalam pengendalian penyebaran penyakit DBD, yang mengarah pada pembatasan gerak dan populasi nyamuk sebagai vektor DBD, diantaranya program 3M (menguras, menutup dan mengubur), pengobatan pada individu terinfeksi, dan pemberantasan populasi vektor dengan insektisida, namun jumlah penderitanya meningkat. Sarang nyamuk ada di mana-mana, fakta ini dapat menjelaskan bahwa tingkat kontak langsung (interaksi) antara manusia rentan dengan nyamuk terinfeksi dan manusia terinfeksi dengan nyamuk rentan semakin besar. Penjelasan ini dikuatkan dengan hasil penelitian bahwa banyaknya penduduk usia 15-25 tahun dan banyaknya sekolah SD berkontribusi dalam penentuan endemisitas suatu wilayah. [1].

Pemerintah telah menyusun berbagai strategi pengendalian dengan kegiatan pencegahan dan pengendalian agar dapat mengurangi kesakitan, kematian dan dampak sosio-ekonomik. Artikel ini menampilkan kajian secara matematis melalui pemodelan kontrol optimal

penyebaran DBD pada populasi manusia dan nyamuk.

Model epidemik Kermack-McKendrick merupakan model dasar memakai asumsi sederhana tentang laju penyebaran dan penyembuhan penyakit [2]. Dalam modelnya, Kermack-McKendrick membagi populasi total (N) menjadi empat kelas yaitu *Susceptible* ($S(t)$) merupakan jumlah individu yang mudah terinfeksi dan mudah ditulari penyakit, *Exposed* ($E(t)$) yang artinya individu yang terpapar virus, *Infectious* ($I(t)$) adalah jumlah individu yang terinfeksi dan *Recovered* ($R(t)$) menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit. Model matematika ini kemudian disingkat dengan model *SEIR*

Bentuk model dinamika penyebaran penyakit menular sering berupa sistem persamaan diferensial yang disesuaikan dengan jenis penyakit dan strategi pengendaliannya, antara lain model dinamika penyebaran penyakit menular secara umum, penyakit SARS, model strategi pengendalian SARS dan influenza, model pengendalian penyebaran virus dengue di Singapura, dinamika

penyebaran virus flu burung, dan studi kasus penyebaran flu burung di Propinsi Jawa Tengah ([3]. [4], [5], [6], [7],[8])

Model-model tersebut diperbarui berdasarkan karakteristik penyakit dan dinamika penyebarannya, misalkan model matematika strategi pengendalian epidemik DBD dengan mempertimbangkan beberapa strategi pengendalian penyebaran penyakitnya pada populasi manusia. Pemodelan dilakukan dengan membagi populasi manusia menjadi 3 klas (*Susceptible, Infected, Removed*), sedangkan populasi vektor diasumsikan sebagai vektor *Infected* [9]. Selanjutnya berdasarkan kasus DBD di Kecamatan Tembalang Semarang, *SIR* itu kemudian dikembangkan menjadi model *SEIR* dan diselesaikan secara numerik [10]. Artikel ini memuat model kontrol optimal pengembangannya dengan memperlakukan strategi pengendalian penyebaran DBD dan pertumbuhan populasi logistik.

Pengembangan model kontrol optimal ini didasarkan pada skema kompartemen $S_M E_M I_M R_M S_P I_P$ penyebaran DBD pada Gambar 2.1. Modifikasi model dengan memperhatikan realita bahwa pertumbuhan populasi host mengikuti model pertumbuhan logistik bukan Malthus dan memberlakukan dua perlakuan pengendalian yakni pencegahan (penerapan 3M dan pembasmian nyamuk) dan pengobatan pada *host* yang terinfeksi.

Tabel 1.1 Definisi parameter

| Nama Parameter | Notasi |
|---|--------|
| Konstanta laju kematian alami populasi manusia | |
| Konstanta laju kelahiran populasi manusia | l |
| Tingkat kontak langsung nyamuk yang terinfeksi dengan manusia yang rentan terinfeksi / peluang transmisi per kontak dengan nyamuk yang terinfeksi | |

| | |
|--|--|
| Konstanta laju dimana individu <i>exposed</i> menjadi individu <i>infected</i> | |
| Konstanta laju kesembuhan penyakit | |
| Konstanta laju kesembuhan dari individu bergejala | |
| Konstanta laju dari removed menjadi rentan kembali | |
| Tingkat kontak langsung manusia yang terinfeksi dengan nyamuk yang rentan terinfeksi / peluang transmisi per kontak dengan manusia yang terinfeksi | |

2. PEMBAHASAN

Hasil analisis pengaruh tingkat kontak langsung menunjukkan bahwa semakin besar tingkat kontak langsung antara nyamuk yang terinfeksi dengan manusia rentan dan tingkat kontak langsung antara manusia terinfeksi dengan nyamuk yang rentan terinfeksi mengakibatkan proporsi jumlah manusia yang terinfeksi menjadi semakin banyak. Begitu juga sebaliknya, semakin kecil tingkat kontak langsung antara nyamuk yang terinfeksi dengan manusia rentan dan tingkat kontak langsung antara manusia terinfeksi dengan nyamuk yang rentan terinfeksi mengakibatkan proporsi jumlah manusia yang terinfeksi menjadi semakin sedikit [10].

Pernyataan ini menjelaskan bahwa pemusnahan populasi nyamuk (perantara) bisa menjadi salah satu strategi pengendalian penyebaran DBD. Oleh karena itu model kontrol optimal dikonstruksi berdasarkan pada dua perlakuan kontrol yaitu $0 \leq u_1 \leq 1$: kontrol pencegahan (kampanye pengendalian 3M dan pemberantasan populasi perantara dengan insektisida), dan $0 \leq u_2 \leq 1$: pengobatan pada individu terinfeksi. Dalam mengkonstruksi model kontrol ini, pertumbuhan populasi *host* direalistikan mengikuti model pertumbuhan logistik, sedangkan

pertumbuhan populasi perantara mengikuti Berdasarkan skema kompartemen dinamika penyebaran DBD pada populasi *host* dan populasi perantara pada Gambar 2.1 dan dengan menerapkan kedua kontrol

model pertumbuhan Malthus tersebut, maka model matematika kontrol optimal yang berhasil dikonstruksi berbentuk sistem persamaan diferensial orde satu nonlinier yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (\lambda - \mu)S - \beta SI - \beta SI + \beta SI + \beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - (\lambda + \mu)I - \beta SI - \beta SI \\ \dot{R} &= \beta SI - (\lambda + \mu)R \\ \dot{S}_M &= \lambda S_M - \mu S_M - \beta S_M I \\ \dot{I}_M &= \beta S_M I - (\lambda + \mu)I_M \\ \dot{R}_M &= \beta S_M I - (\lambda + \mu)R_M \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan kondisi awal:

$$\begin{aligned} S(0) &= 1, & I(0) &= 0, & I_M(0) &= 0, & R_M(0) &= 0 \\ \text{dan } S_M(0) &= 1, & I_M(0) &= 0, & R_M(0) &= 0 \\ \text{dan } S(0) &= 1, & I(0) &= 0, & I_M(0) &= 0, & R_M(0) &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (\lambda - \mu)S - \beta SI - \beta SI + \beta SI + \beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - (\lambda + \mu)I - \beta SI - \beta SI \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan kondisi awal:

$$\begin{aligned} S(0) &= 1, & I(0) &= 0 \text{ dan } S_M(0) &= 1, \\ S(0) &= 1. \end{aligned}$$

Sistemik yang digunakan untuk penerapan kontrol tersebut. Di samping itu harus meminimumkan efek-efek samping dari parameter-parameter kontrol selama berlangsungnya proses penerapan teknik kontrol optimal tersebut.

Untuk mengetahui tingkatan optimal dari upaya-upaya yang diperlukan untuk mengendalikan penyebaran penyakit, formulasi fungsi obyektif J , yang meminimalkan jumlah manusia terinfeksi dan biaya penerapan kontrol u_1, u_2 , yaitu

$$J = \min_{u_1, u_2} \int_0^{t_1} (B_1 i_M + B_2 u_1^2 + B_3 u_2^2) dt \tag{2.3}$$

di mana B_1 adalah konstanta bobot yang bersesuaian dengan manusia terinfeksi. Kuadrat biaya dari variabel kontrol dipilih untuk memperhatikan kerugian yang

diakibatkan oleh efek samping atau over dosis dari variabel kontrol itu dan B_2, B_3 , masing-masing konstanta positif yang disesuaikan dengan kuadrat kontrol untuk menyeimbangkan ukuran suku-sukunya.

Fungsi obyektif $J(u_1, u_2)$ ini bertujuan meminimalkan jumlah manusia yang terinfeksi $i_M(t)$ sekaligus meminimalkan biaya penerapan kontrol $u_1(t)$, dan $u_2(t)$. Kontrol optimal u_1, u_2 dicari sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*) = \min_{u_1, u_2} J(u_1, u_2; u_1, u_2 \in U) \tag{2.4}$$

di mana $U = \{(u_1, u_2) \text{ sedemikian sehingga } u_1, u_2 \text{ terukur dengan } 0 \leq u_1 \leq 1 \text{ dan } 0 \leq u_2 \leq 1 \text{ untuk } t \in [0, t_1]\}$ adalah himpunan kontrol. Syarat perlu bahwa optimalisasi ini terpenuhi berasal dari Prinsip Maximum Pontryagin's [11].

Selanjutnya masalah kontrol optimal (2.3) diselesaikan berdasarkan sistem (2.1) dan (2.2) dengan mengawali membentuk fungsi Lagrange

$$L = B_1 i_M + B_2 u_1^2 + B_3 u_2^2 \quad (2.5)$$

dan bentuk Hamilton H dari masalah tersebut

$$H = L + \lambda_1(t) \frac{ds_M}{dt} + \lambda_2(t) \frac{de_M}{dt} + \lambda_3(t) \frac{di_M}{dt} + \lambda_4(t) \frac{dr_M}{dt} + \lambda_5(t) \frac{ds_P}{dt} + \lambda_6(t) \frac{di_P}{dt}$$

dimana $\lambda_i(t)$, untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dikenal sebagai variabel adjoint yang ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan diferensial:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial s_M} = -\lambda_1(1 - 2s_M) - ((\lambda_1 + \lambda_2)(1 - u_1) + \lambda_1 \mu_M)'$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial e_M} = \lambda_2 (\alpha_M + \gamma_M) - \lambda_3 \alpha_M - \lambda_4 \gamma_M$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial i_M} = -B_1 - (\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4) \eta_M u_2 + \lambda_3 \mu_M + (\lambda_5 - \lambda_6)(1 - u_1) \beta_{MP} s_P$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial r_M} = -\lambda_1 \delta + \lambda_4 (\mu_M - \gamma_M + \delta) \quad (2.6)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H}{\partial s_P} = \lambda_5 (\mu_P - r) + (\lambda_5 - \lambda_6)(1 - u_1) \beta_{MP} i_M$$

$$\dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial H}{\partial i_P} = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \beta_{PM} s_M + \lambda_6 \mu_P$$

yang memenuhi kondisi transversalitas

$$\dot{\lambda}_i(t) = 0, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.7)$$

Dengan menyelesaikan sistem (2.6) maka diperoleh solusi $\lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t), \lambda_3^*(t)$

$\lambda_4^*(t), \lambda_5^*(t), \lambda_6^*(t)$, dan nilai optimal

$$s_M^*, e_M^*(t), i_M^*(t), r_M^*(t), s_P^*(t), i_P^*(t)$$

Berdasarkan nilai-nilai optimal tersebut, terdapat kontrol optimal $\{u_1^*(t), u_2^*(t)\}$ untuk $t \in [0, t_1]$ sedemikian sehingga

$$J(i_M(t), u_1^*(t), u_2^*(t)) = \min_{u_1, u_2} J(i_M(t), u_1(t), u_2(t))$$

yang bergantung pada sistem (2.1) dan (2.2) [12].

Di sini semua variabel kontrol $\{u_1(t), u_2(t)\}$ konvek karena semua variabel kontrol dan keadaan non negatif, sehingga kontrol optimal terbatas dan karenanya menjamin eksistensi kontrol optimal $\{u_1^*(t), u_2^*(t)\}$ yang meminimalkan (2.3) untuk $t \in [0, t_1]$ berdasarkan sistem (2.1) dan (2.2).

Selanjutnya dicari kontrol optimal yang meminimalkan J dengan prinsip maximal Pontryagin sebagai berikut:

Kondisi optimal diperoleh melalui

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow$$

$$2B_2 u_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \beta_{PM} i_P s_M + (\lambda_6 - \lambda_5) \beta_{MP} i_M s_P = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow 2B_3 u_2 + (\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4) \eta_M i_M = 0$$

= 0

Dari sini didapatkan solusi optimal

$$u_1^* =$$

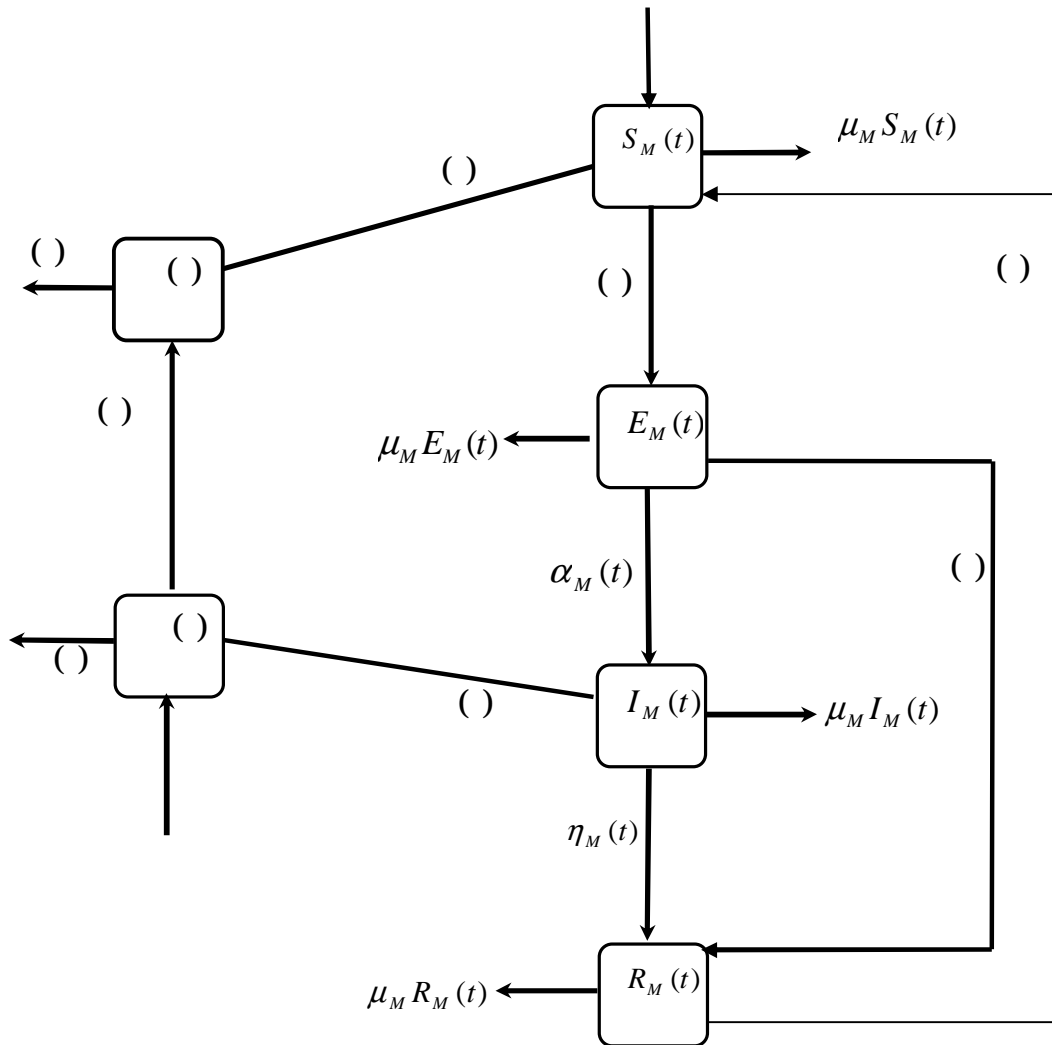
$$\frac{(\lambda_2^* - \lambda_1^*) \beta_{PM} i_P s_M + (\lambda_6^* - \lambda_5^*) \beta_{MP} i_M s_P}{2B_2}$$

$$u_2^* = \frac{(\lambda_4^* - \lambda_1^* - \lambda_3^*) \eta_M i_M}{2B_3}$$

Kedua kontrol optimal ini meminimalkan fungsi J yang diberikan (2.3). Kontrol u_1 (kampanye 3M dan pemberantasan populasi nyamuk dengan insektisida) linier terhadap interaksi antara populasi *host* rentan dengan populasi nyamuk terinfeksi dan interaksi antara populasi *host* terinfeksi dengan populasi nyamuk rentan, artinya semakin besar tingkat kontak langsung antar kedua populasi itu membutuhkan kontrol u_1 yang semakin besar juga, begitu juga sebaliknya. Kontrol u_2 (pengobatan) linier terhadap ukuran populasi klas populasi *host* terinfeksi.

Artinya, semakin besar populasi host terinfeksi maka semakin besar kontrol u_2

ditentukan oleh tingkat kontak langsung antara populasi host dan vektor yang



Gambar 2.1 Transfer dinamik antar kelas pada populasi manusia dan perantara

3. PENUTUP

Dalam penelitian ini telah berhasil dikonstruksi dan dianalisis model kontrol optimal untuk epidemik DBD yang didasarkan model pertumbuhan populasi host logistik dan model pertumbuhan populasi perantara Malthus dengan memperhatikan dua kontrol (pencegahan dan pengobatan). Model tersebut memperlihatkan satu ekuilibrium bebas penyakit. Dalam kondisi kesetimbangan, peran kontrol pencegahan sangat

terinfeksi dan rentan. Peran kontrol u_2 sangat ditentukan oleh besarnya populasi *host* yang terinfeksi.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Dekan FSM UNDIP yang telah mendukung dana dan fasilitas, sehingga penelitian ini dapat dilakukan tahun anggaran 2014

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kartono, Rita R, Heri.S, Beta. N, Asep Y W, Eko A.S, (2012), *Pengembangan Sistem Informasi Deteksi Dini Kejadian Luar Biasa DBD berbasis Karakteristik Wilayah di Kota Semarang*, Laporan Penelitian Tematik FSM UNDIP Semarang tahun 2012 (unpublished)
- [2] Brauer, F., (2005), *Modelling Epidemics*, Canada: MITACS.
- [3] Kapur, J. N., (2000), *Mathematical Models in Biologi and Medicine*, New Delhi: Affiliated East-West PressPrivate Limited.
- [4] Gumel, AB, S Ruan, Troy Day, (2004), *Modelling strategies for controlling SARS Outbreaks*, Canada: The Royal Society, 272:2223-2232.
- [5] Handel.A, Ira.M. Longini, Rustom Antia, (2007), What is the Best Control Strategy for Multiple Infectious Disease Outbreaks?, *Proceeding of the Royal Society*, 274 : 833-837
- [6] Burattini, M.N, M.Chen, A.Chow, F.A.B.Coutino, K.T.Goh, L.F.Lopez, S.Ma, E.Massad, (2008), *Modelling the Control Strategies Against Dengue in Singapore*, *Epidemiol. Infect*, 136, the United Kingdom: Cambridge University Press, 309-319
- [7] Derouich.M, A. Boutayeb, (2008), An Avian Influenza Mathematical Model, *Applied Mathematical Sciences*, 2 (36) : 1749-1760
- [8] Kartono, Widowati, R.Heri SU, (2010), Study the Dynamics of Human Infection by Avian influenza: Case Study in the Central Java Province of Indonesia, *Proceeding of IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications* pp.391-396
- [9] Kartono, Djuwandi, Farikhin, (2013), *Kontrol Optimal untuk Epidemik DBD*, Laporan Penelitian DIPA FSM UNDIP tahun 2013, unpublised
- [10] Mentari D A, Kartono, Siti K, (2014), *Solusi Numerik Model Matematika Penyebaran Virus Dengue pada Populasi Manusia dan Populasi Perantara*, Skripsi S1 Matematika FSM Undip (unpublished).
- [11] Okosun, K O, Makinde, O D, (2013), *Optimal Control Analysis of Malaria in the Presence of Non-Linear Incidence Rate*.
- [12] Kar.T.K, Jana.S, (2013), Application of three control optimally in a vector-borne disease- a mathematical study, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 18 : 2868-2884.
-