

# BILANGAN DOMINASI PERSEKITARAN PADA GRAF LENGKAP DAN GRAF BIPARTIT LENGKAP

Lucia Ratnasari<sup>1</sup>, Bayu Surarso<sup>2</sup>, Harjito<sup>3</sup>, Uun Maunah<sup>4</sup>

<sup>1,2,3</sup>Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro

<sup>4</sup>Program Studi S1 Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang

**Abstract.** Given graph  $G$  with set of vertex  $V$  and set of edge  $E$ . Set  $D$  subset of  $V$  is called domination set if every point in  $V - D$  is adjacent with at least one point in  $D$  in graph  $G$ . The minimum cardinality of all set of domination graph  $G$  is called domination number. Let  $S$  be a subset of  $V$ , set  $S$  is called a neighborhood set if  $G = \bigcup_{v \in S} \langle N(v) \rangle$  with  $\langle N(v) \rangle$  induced subgraph  $G$  of  $N(v)$ . The minimum cardinality of all the neighborhood set of graph  $G$  is called the neighborhood number. There are several types of neighborhood domination number depending on the parameters. In this paper we examine the transversal neighborhood domination number and global neighborhood domination number in complete graph and complete bipartite graph.

**Keywords:** neighborhood domination number, transversal neighborhood domination number, global neighborhood domination number global.

## 1. PENDAHULUAN

Salah satu topik dari teori graf adalah himpunan dominasi. Secara historis, masalah dominasi mulai dipelajari dari tahun 1950 oleh Hedetniemi dan Laskar, kemudian Haynes dkk menuliskan dalam bukunya lebih dari 75 jenis dominasi dan topik-topik lanjutan dalam dominasi yang telah didefinisikan dan diselidiki oleh beberapa penulis [1]. Himpunan dominasi dari sebuah graf  $G = (V, E)$  merupakan himpunan  $S$  subset dari  $V$  dimana setiap titik di  $V - S$  bertetangga setidaknya dengan satu titik di  $S$ , sedangkan bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi dari suatu graf  $G$ .

Berbagai jenis parameter dari dominasi telah didefinisikan dan dipelajari oleh beberapa penulis. Untuk suatu himpunan dominasi  $S$  dari graf  $G$  juga ingin diketahui bagaimana perilaku dari himpunan persekitaran  $S$ . Beberapa kajian dengan parameter dominasi persekitaran diantaranya adalah dominasi persekitaran total, dominasi persekitaran terhubung, dominasi persekitaran terhubung *equitable*, dominasi persekitaran *global* dan dominasi

persekitaran *transversal*. Pada tulisan ini dikaji bilangan dominasi persekitaran *transversal* dan bilangan dominasi persekitaran *global* pada graf lengkap dan graf bipartit lengkap dan selanjutnya dibandingkan bilangan dominasi dengan parameter-parameter tersebut. Istilah-istilah dan notasi yang tidak didefinisikan dalam tulisan ini diambil dari referensi [2] dan [3].

## 2. HASIL DAN PEMBAHASAN

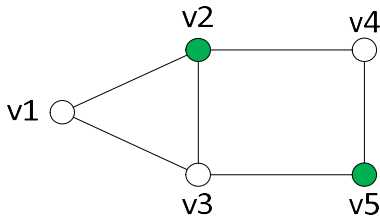
### 2.1 Bilangan Dominasi Persekitaran Transversal

Sebelum membahas bilangan dominasi persekitaran *transversal* terlebih dahulu dijelaskan pengertian himpunan persekitaran dan himpunan persekitaran minimum.

**Definisi 2.1 [4]** Himpunan  $S \subseteq V$  pada graf  $G = (V, E)$  disebut himpunan persekitaran jika  $G = \bigcup_{v \in S} \langle N(v) \rangle$ , dengan  $\langle N(v) \rangle$  subgraf induksi  $G$  dari  $N(v)$ . Himpunan persekitaran  $S$  disebut himpunan persekitaran minimum jika himpunan tersebut mempunyai kardinalitas minimum dari semua himpunan persekitaran  $S$  pada graf  $G$ . Kardinalitas

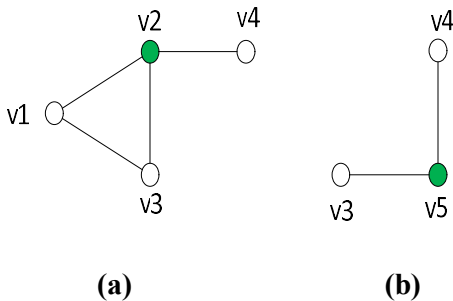
minimum dari semua himpunan persekitaran disebut bilangan persekitaran dari  $G$  dan dinotasikan sebagai  $\eta(G)$ .

**Contoh 2.2** Diberikan Graf  $G_1$  dengan himpunan titik  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan  $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ . Misal diambil  $S_1 = \{v_2, v_5\}$



**Gambar 2.1** Graf  $G_1$  dengan himpunan  $S_1 = \{v_2, v_5\}$

Pada Gambar 2.1 terlihat bahwa  $S_1 = \{v_2, v_5\}$  merupakan himpunan persekitaran dari  $G_1$  karena  $G = \cup_{v \in S} \langle N(v) \rangle = \langle N(v_2) \rangle \cup \langle N(v_5) \rangle$ .



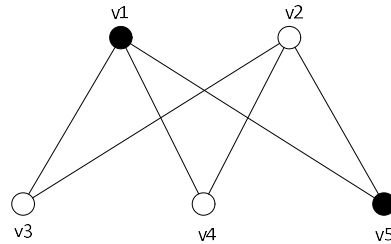
**Gambar 2.2** Subgraf Induksi  $G_1$  dari (a)  $N(v_2)$  dan (b)  $N(v_5)$

Oleh karena tidak ada himpunan persekitaran yang mempunyai kardinalitas kurang dari 2 maka kardinalitas minimum dari setiap himpunan persekitaran di graf  $G_1$  adalah dua sehingga bilangan persekitaran dari graf  $G_1$  adalah dua atau  $\eta(G_1) = 2$ .

**Definisi 2.3 [4]** Himpunan dominasi  $D \subseteq V$  dari sebuah graf  $G$  disebut himpunan dominasi persekitaran transversal jika himpunan tersebut beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran transversal disebut bilangan dominasi persekitaran transversal dan

dinotasikan dengan  $\gamma_{nt}(G)$ . Suatu himpunan dominasi persekitaran transversal  $D$  dari  $G$  dengan  $|D| = \gamma_{nt}(G)$  disebut himpunan  $\gamma_{nt}$ .

**Contoh 2.4** Diberikan gambar graf seperti berikut :



**Gambar 2.3** Graf  $K_{2,3}$  dengan himpunan dominasi  $D = \{v_1, v_5\}$

Jika  $G = (V_1, V_2, E)$  adalah graf bipartit lengkap  $K_{2,3}$  maka hanya terdapat satu himpunan persekitaran minimum  $S$  pada graf bipartit lengkap  $K_{2,3}$  tersebut yaitu  $S_1 = \{v_1, v_2\}$ . Misal akan dibentuk himpunan dominasi  $D = \{v_1, v_5\}$  dengan dua titik dimana satu titiknya diambil dari  $V_1 = \{v_1, v_2\}$  dan satu titik lainnya diambil dari  $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$  maka  $D \cap S = \{v_1, v_5\} \cap \{v_1, v_2\} = \{v_1\}$ . Karena himpunan dominasi  $D$  dan himpunan persekitaran minimum  $S$  beririsan maka himpunan dominasi  $D$  merupakan himpunan dominasi persekitaran transversal. Oleh karena himpunan dominasi persekitaran transversal  $D$  merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran transversal yang berada pada graf bipartit lengkap  $K_{2,3}$  maka terbukti jika bilangan dominasi persekitaran transversal graf  $G$  adalah 2.

**Teorema 2.5 [4]** Untuk setiap graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  berlaku ;

$$\gamma_{nt}(G) = \begin{cases} 2, & \text{jika } m \text{ dan } n \neq 1; \\ 1, & \text{jika } m \text{ atau } n = 1. \end{cases}$$

**Bukti :**

Misal  $G = (V_1, V_2, E)$  adalah sebuah graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  maka terdapat tiga kasus yaitu :

**Kasus I :**  $m < n$  atau  $m, n \neq 1$

Diketahui graf  $G$  adalah graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  untuk  $m < n$  atau  $m, n \neq 1$  dengan  $|V_1| = m$  dan  $|V_2| = n$ . Karena  $m < n$  maka  $m$  merupakan himpunan persekitaran minimum dari graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$ . Kemudian setiap himpunan dominasi  $D$  dengan dua titik dimana satu titik berasal dari  $m$  dan satu titik lainnya berasal dari  $n$  akan mendominasi semua titik pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  dan juga beririsan dengan  $m$  sebagai himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$ . Oleh karena himpunan dominasi  $D$  beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  maka  $\gamma_{nt}(G) = 2$ .

**Kasus II :  $m = n$**

Diketahui graf  $G$  adalah bipartit lengkap  $K_{m,n}$  untuk  $m = n$  dimana  $|V_1| = m$  dan  $|V_2| = n$ . Karena  $m = n$  maka terdapat dua himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  yaitu  $m$  dan  $n$ . Kemudian setiap himpunan dominasi dengan dua titik dimana satu titik berasal dari  $m$  dan satu titik lainnya berasal dari  $n$  atau sebaliknya akan mendominasi semua titik pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  dan juga beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$ . Oleh karena himpunan dominasi  $D$  beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  maka  $\gamma_{nt}(G) = 2$ .

**Kasus III :  $m$  atau  $n = 1$**

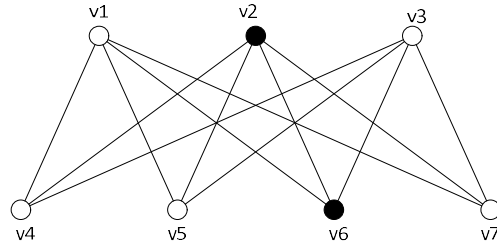
Diketahui graf  $G$  adalah graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  dimana  $|V_1| = m$  dan  $|V_2| = n$ . Karena  $m$  atau  $n = 1$  maka terdapat satu himpunan persekitaran minimum graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  yaitu  $m$  atau  $n = 1$  yang mempunyai anggota himpunan titik berjumlah satu. Kemudian titik tersebut juga yang akan menjadi himpunan dominasi dan juga beririsan dengan himpunan persekitaran minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$ . Oleh karena himpunan dominasi  $D$  beririsan dengan setiap himpunan persekitaran

minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  maka  $\gamma_{nt}(G) = 1$ . ■

**Contoh 2.6**

**Kasus I :**

Diberikan gambar graf bipartit lengkap seperti berikut :

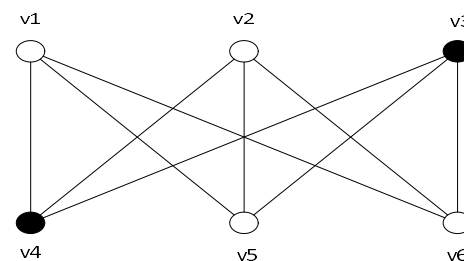


**Gambar 2.4** Graf bipartit lengkap  $K_{3,4}$  dengan himpunan dominasi  $D = \{v_2, v_6\}$

Pada Gambar 2.4 merupakan graf bipartit lengkap  $K_{3,4}$  dengan  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  dan  $V_2 = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ . Karena  $|V_1| < |V_2|$  maka  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  merupakan himpunan persekitaran  $S$  pada graf bipartit  $K_{3,4}$ . Misal himpunan dominasi  $D = \{v_2, v_6\}$  maka  $D \cap S = \{v_2, v_6\} \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_2\}$ . Karena himpunan dominasi  $D$  beririsan dengan himpunan persekitaran  $S$  maka Himpunan dominasi  $D$  merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal*. Oleh karena himpunan dominasi persekitaran *transversal* merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf bipartit lengkap  $K_{3,4}$  maka terbukti jika  $\gamma_{nt}(K_{3,4}) = 2$ .

**Kasus II :**

Diberikan gambar graf bipartit lengkap seperti berikut :

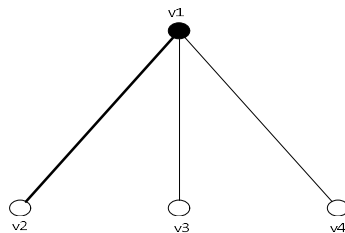


**Gambar 2.5** Graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$  dengan himpunan dominasi  $D = \{v_3, v_4\}$

Pada Gambar 2.5 merupakan graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$  dengan  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  dan  $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ . Karena  $|V_1| = |V_2|$  maka terdapat dua himpunan persekitaran minimum  $S$  pada graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$  yaitu  $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  dan  $S_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ . Misal himpunan dominasi  $D = \{v_3, v_4\}$  maka  $D \cap S_1 = \{v_3, v_4\} \cap \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_3\}$  dan  $D \cap S_2 = \{v_3, v_4\} \cap \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_4\}$ . Karena himpunan dominasi  $D$  beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum  $S$  pada graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$  maka Himpunan dominasi  $D$  merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal*. Oleh karena himpunan dominasi persekitaran *transversal*  $D$  merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$  maka terbukti jika  $\gamma_{nt}(K_{3,3}) = 2$ .

**Kasus III :**

Diberikan gambar graf bipartit seperti berikut :



**Gambar 2.6** Graf bipartit lengkap  $K_{1,3}$  dengan himpunan dominasi  $D = \{v_1\}$

Pada Gambar 2.6 merupakan graf bipartit lengkap  $K_{1,3}$  dengan  $|V_1| = \{v_1\}$  dan  $|V_2| = \{v_2, v_3, v_4\}$ . Karena  $|V_1| < |V_2|$  maka  $V_1 = \{v_1\}$  merupakan himpunan persekitaran  $S$  pada graf bipartit lengkap  $K_{1,3}$ . Karena  $V_1 = \{v_1\}$  mendominasi semua titik pada graf bipartit lengkap  $K_{1,3}$  maka himpunan dominasi  $D$  dengan kardinalitas minimum pada graf bipartit lengkap  $K_{1,3}$  adalah  $V_1 = \{v_1\}$ . Karena himpunan dominasi  $D$  juga merupakan himpunan persekitaran minimum  $S$  pada graf bipartit lengkap  $K_{1,3}$  yang mana himpunan tersebut pasti saling beririsan

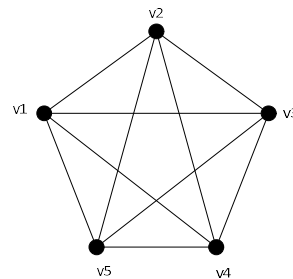
maka himpunan dominasi  $D$  merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal*. Oleh karena itu himpunan dominasi persekitaran *transversal*  $D$  merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf bipartit lengkap  $K_{1,3}$  maka terbukti jika  $\gamma_{nt}(K_{1,3}) = 1$ .

**Teorema 2.7 [4]** Untuk setiap graf lengkap  $K_n$  dengan order  $n$  maka  $\gamma_{nt}(K_n) = n$

**Bukti :**

Misal  $K_n$  adalah sebuah graf lengkap  $K_n$  dengan order  $n$ . Oleh karena setiap titik pada graf lengkap merupakan himpunan persekitaran minimum dan juga setiap titik pada graf lengkap dapat mendominasi semua titik pada graf lengkap  $K_n$  maka himpunan dominasi persekitaran *transversal*-nya adalah semua titik pada graf lengkap  $K_n$ . Jadi terbukti  $\gamma_{nt}(K_n) = n$ . ■

**Contoh 2.8** Diberikan gambar graf seperti berikut :



**Gambar 2.7** Graf  $K_5$  dengan himpunan dominasi  $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

Pada Gambar 2.7 terlihat graf roda  $K_n$  dengan order 5. Karena setiap titik merupakan himpunan persekitaran minimum  $S_1 = \{v_1\}, S_2 = \{v_2\}, S_3 = \{v_3\}, S_4 = \{v_4\}, S_5 = \{v_5\}$  maka himpunan dominasinya haruslah beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum graf  $K_5$ . Misal  $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  maka :

$$D \cap S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_1\} = \{v_1\}$$

$$D \cap S_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_2\} = \{v_2\}$$

$$D \cap S_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_3\} = \{v_3\}$$

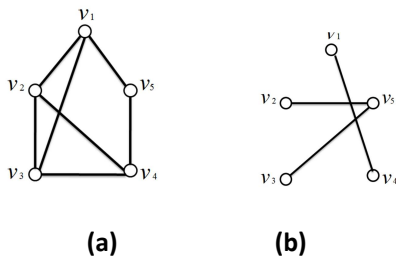
$D \cap S_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_4\} = \{v_4\}$   
 $D \cap S_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \{v_5\} = \{v_5\}$   
 Karena himpunan dominasi  $D$  beririsan dengan setiap himpunan persekitaran minimum pada graf  $K_5$  maka  $D$  merupakan himpunan dominasi persekitaran *transversal* pada graf  $K_5$ . Oleh karena himpunan dominasi persekitaran *transversal*  $D$  merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi persekitaran *transversal* yang berada pada graf maka terbukti  $\gamma_{nt}(K_5) = 5$ .

### 2.2 Bilangan Dominasi Persekitaran Global

Sebelum dibahas himpunan dominasi persekitaran global, terlebih dahulu dibahas mengenai himpunan dominasi global, himpunan dominasi terkendali, himpunan dominasi terhubung dan himpunan dominasi independen .

**Definisi 2.9 [5]** Suatu himpunan dominasi  $D$  disebut himpunan dominasi global, jika himpunan  $D$  merupakan himpunan dominasi pada graf  $G$  dan graf komplemen ( $G^c$ ). Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi global disebut bilangan dominasi global dari  $G$ , dan dinotasikan sebagai  $\gamma_g(G)$ .

**Contoh 2.10** Diberikan graf  $G_2$  dengan gambar sebagai berikut :

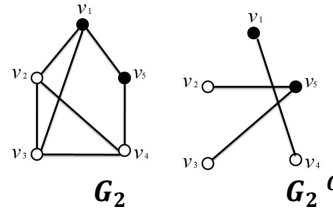


**Gambar 2.8** (a) Graf  $G_2$  dan (b) graf  $G_2^c$

Graf  $G_2$  mempunyai  $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan  $E(G_2) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$ , maka didapat graf  $G_2^c$  dengan  $V(G_2^c) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan  $E(G_2^c) = \{v_1v_4, v_2v_5, v_5v_3\}$ .

Misalkan  $D_2 = \{v_1, v_5\}$ , maka  $V(G_2) - D_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$ . Karena setiap

titik di  $V - D_2$  bertetangga dengan minimal satu titik di  $D_2$  maka  $D_2$  merupakan himpunan dominasi pada graf  $G_9$ . Graf  $G_9^c$  dengan  $V(G_2^c) - D_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$ . Karena setiap titik di  $V(G_2^c) - D_2$  bertetangga dengan minimal satu titik di  $D_2$ , maka  $D_2$  merupakan himpunan dominasi pada graf  $G_2^c$ . Jadi  $D_2$  merupakan himpunan dominasi global.



**Gambar 2.9** Graf  $G_2$  dan  $G_2^c$  dengan Himpunan Dominasi  $D_2 = \{v_1, v_5\}$

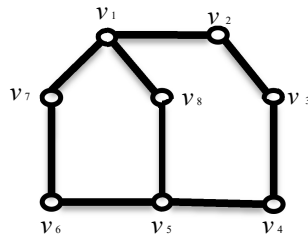
Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi global di graf  $G_2$  adalah 2, maka  $\gamma_g(G_2) = 2$ .

**Definisi 2.11 [5]** Suatu himpunan dominasi  $D$  disebut himpunan dominasi terkendali jika setiap titik  $v$  di  $V - D$  bertetangga dengan titik di  $D$  serta titik  $u$  di  $V - D$  dengan  $u \neq v$ . Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi terkendali disebut bilangan dominasi terkendali dari  $G$ , dan dinotasikan sebagai  $\gamma_r(G)$ .

**Definisi 2.12 [6]** Suatu himpunan  $D$  subset dari  $V(G)$  disebut himpunan dominasi terhubung jika  $D$  himpunan dominasi dan subgraph induksi  $\langle D \rangle$  juga terhubung. Kardinalitas minimum dari setiap himpunan dominasi terhubung disebut bilangan dominasi terhubung dari  $G$ , dan dinotasikan sebagai  $\gamma_c(G)$ .

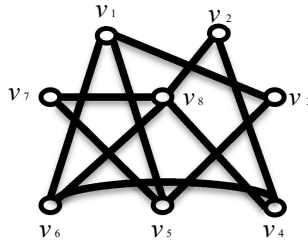
**Definisi 2.13 [6]** Misalkan  $G$  graf terhubung. Graf persekitaran  $G$  yang dinotasikan sebagai  $G^N$  adalah graf  $G^N$  dimana  $V(G^N) = V(G)$  dan  $E(G^N) = \{uv | u, v \in V(G), \text{ terdapat } w \in V(G) \text{ sehingga } uw, vw \in E(G)\}$ .

**Contoh 2.14** Diberikan graf  $G_2$  dengan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.10 Graf  $G_2$

Ditentukan graf  $G_2^N$



Gambar 2.11 Graf  $G_2^N$

Pada Gambar 2.11 terlihat bahwa gambar tersebut merupakan gambar graf persekitaran  $G_2$ , dimana  $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1, v_1v_8, v_8v_5 \in E(G_2)$  sehingga  $v_1v_3, v_3v_5, v_5v_7, v_7v_8, v_8v_6, v_6v_1, v_1v_5, v_8v_2, v_2v_4, v_4v_6 \in E(G_2^N)$ .

**Teorema 2.15** Jika  $K_{m,n}$  adalah graf bipartit lengkap dengan  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  dan  $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , maka  $K_{m,n}^N = K_m \cup K_n$ .

**Bukti :**

$K_{m,n}$  merupakan graf bipartit lengkap dengan  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  dan  $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Karena  $K_{m,n}$  adalah graf bipartit lengkap, maka untuk setiap titik di  $V_1$  bertetangga dengan titik di  $V_2$  dan setiap titik di  $V_2$  bertetangga dengan titik di  $V_1$ . Graf persekitaran  $K_{m,n}$ , setiap  $v_i, v_j \in V_1$  terdapat  $u_k \in V_2$ , sehingga  $E(K_{m,n}) = \{v_iu_k, v_ju_k\}$ , maka untuk  $v_iu_k, v_ju_k \in E(K_{m,n})$  terdapat  $w \in V(K_{m,n})$  sedemikian sehingga  $v_iv_j, u_kw \in E(K_{m,n}^N)$ . Jadi setiap titik di  $V_1$  bertetangga dengan titik di  $V_1$  yang lain dan setiap titik di  $V_2$  bertetangga dengan titik di  $V_2$  yang lain,

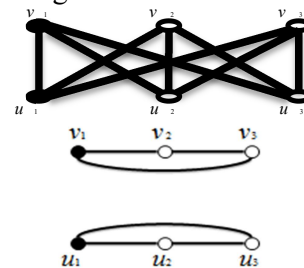
sedemikian sehingga  $E(K_{m,n}^N) = \{v_iv_j\} \cup \{u_kw\} = K_m \cup K_n$ . ■

**Teorema 2.15 [6]** Jika  $K_{m,n}$  adalah graf bipartit lengkap dengan  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  dan  $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , maka  $\gamma_{gn}(K_{m,n}) = 2$  untuk  $m + n \geq 3$ .

**Bukti :**

Graf  $K_{m,n}$  merupakan graf bipartit lengkap, maka  $V(K_{m,n})$  dapat dipartisi menjadi 2 himpunan  $V_1$  dan himpunan  $V_2$  dengan  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  dan  $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Karena graf  $K_{m,n}$  adalah graf bipartit lengkap maka setiap titik di  $V_1$  bertetangga dengan setiap titik di  $V_2$  dan setiap titik di  $V_2$  bertetangga dengan setiap titik di  $V_1$ . Diambil sebarang  $D = \{v_i, u_j\}$  dimana titik  $v_i$  di  $V_1$  dan titik  $u_j$  di  $V_2$ . Setiap titik  $v_k$  bertetangga dengan titik  $u_j$  dan setiap titik  $u_l$  bertetangga dengan titik  $v_i$  pada graf  $K_{m,n}$ , maka  $D = \{v_i, u_j\}$  merupakan himpunan dominasi untuk graf  $K_{m,n}$ , sehingga diperoleh  $\gamma(K_{m,n}) = |D| = 2$ . Pada graf persekitaran  $K_{m,n}$  setiap titik di  $V_1$  selain titik  $v_i$  bertetangga dengan titik  $v_i$  dan setiap titik di  $V_2$  selain titik  $u_j$  bertetangga dengan titik  $u_j$ , maka  $D = \{v_i, u_j\}$  merupakan himpunan dominasi untuk graf  $K_{m,n}^N$ , sehingga  $\gamma(K_{m,n}^N) = |D| = 2$ . Jadi  $D = \{v_i, u_j\}$  merupakan himpunan dominasi persekitaran global pada graf  $K_{m,n}$ , maka didapat  $\gamma_{gn}(K_{m,n}) = |D| = 2$ . ■

**Contoh 2.16** Diberikan graf  $K_{3,3}$  dengan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.12 Graf  $K_{3,3}$  dan  $K_{3,3}^N$  dengan himpunan dominasi  $D = \{v_1, u_1\}$

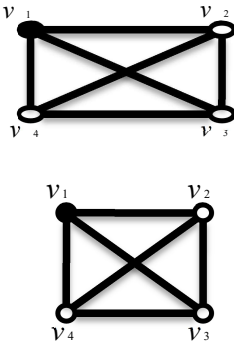
Pada Gambar 2.12 terlihat bahwa  $D = \{v_1, u_1\}$  merupakan himpunan dominasi pada graf  $K_{3,3}$  dan  $K_{3,3}^N$ , sehingga  $D = \{v_1, u_1\}$  merupakan himpunan dominasi persekitaran global untuk graf  $K_{3,3}$ . Jadi kardinalitas minimum dari suatu himpunan dominasi persekitaran global dari graf  $K_{3,3}$  adalah 2, sehingga  $\gamma_{gn}(K_{3,3}) = |D| = 2$ .

**Teorema 2.17 [6]** *Jika  $K_n$  adalah graf lengkap dengan  $n$  titik, maka  $\gamma_{gn}(K_n) = 1$  untuk  $n \geq 3$ .*

**Bukti :**

Graf  $K_n$  merupakan graf lengkap, dengan  $n$  titik. Karena setiap titik pada graf  $K_n$  bertetangga ke semua titik yang lain. Diambil sebarang  $D = \{v_i\}$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, n$ , karena setiap titik di  $V(K_n) - D$  bertetangga dengan  $v_i$  itu sendiri, maka  $D$  merupakan himpunan dominasi untuk graf  $K_n$ , sehingga diperoleh  $\gamma(K_n) = 1$ . Graf persekitaran  $K_n$  adalah graf  $K_n$  itu sendiri, maka  $D = \{v_i\}$  merupakan himpunan dominasi untuk graf  $K_n^N$ , sehingga diperoleh  $\gamma_{gn}(K_n) = |D| = 1$ . ■

**Contoh 2.19** Diberikan graf  $K_4$  dengan gambar sebagai berikut :



**Gambar 2.13** Graf  $K_4$  dan  $K_4^N$  dengan himpunan dominasi  $D = \{v_1\}$

Pada Gambar 2.13 terlihat bahwa  $D = \{v_1\}$  merupakan himpunan dominasi pada graf  $K_4$  dan  $K_4^N$ . Jadi  $D = \{v_1\}$  merupakan himpunan dominasi persekitaran global untuk graf  $K_4$ . Kardinalitas minimum dari

suatu himpunan dominasi persekitaran global dari graf  $K_4$  adalah 1, sehingga  $\gamma_{gn}(K_4) = |D| = 1$ .

**3. PENUTUP**

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai himpunan serta bilangan dominasi persekitaran *transversal* dan bilangan dominasi persekitara *global* pada graf lengkap  $K_n$  dan graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  dapat diambil kesimpulan bahwa :

1. Jika  $G$  graf lengkap  $K_n$  dengan order  $n$  maka bilangan dominasi persekitaran *transversal*-nya  $n$  sedangkan bilangan dominasi persekitaran *global*-nya 1 untuk  $n \geq 3$ .
2. Jika  $G$  graf bipartit lengkap  $K_{m,n}$  untuk  $m, n \neq 1$  dan  $m + n \geq 3$  maka bilangan dominasi persekitaran *transversal* dan bilangan dominasi persekitara *global*nya 2

**4. DAFTAR PUSTAKA**

- [1] S. Sivakumar, N. D. Soner, A. Alwardi, (2012), *Connected Equitable Domination in Graphs*, 1: 123-130.
- [2] Wilson, J. R. dan J. J. Watkins, (1990), *Graphs: An Introductory Approach*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] F. Harary, (1969), *Graph Theory*, Addison-wesley, Reading Mass.
- [4] M.P. Sumathi, (2014), *On neighbourhood Transversal Domination in Graphs*, Int. J. Contemp. Math Sciences, 9(5) : 243-252.
- [5] I.H. Naga Raja Rao, S. V. Siva Rama Raju, (2014), *Global Neighborhood Domination*, Proyecciones Journal of Mathematics, 33 : 25-41.
- [6] C. Sivagnanan, (2012), *Neighborhood Connected Domination Number of Total Graphs*, Gen. Math. Notes, 25(1): 27-32.