KELAS-KELAS *BCI*-ALJABAR DAN HUBUNGANNYA SATU DENGAN YANG LAIN

Winarsih[1], Suryoto[2]
[1, 2]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Semarang 50275

Abstract. Several classes of BCI-algebras as the class of weakly implicative BCI-algebras, BCK-algebras, medial BCI-algebras, branchwise implicative BCI-algebras and branchwise commutative BCI-algebras have relation one another. A branchwise implicative BCI-algebras is a class of BCI-algebras which to fulfill condition of branchwise implicative. By using characters of the class of BCK-algebras and element of the class of medial BCI-algebras, we investigate relations between branchwise implicative BCI-algebras exist with others classes of the class of BCI-algebras as the class of weakly implicative BCI-algebras and branchwise commutative BCI-algebras.

Keywords : BCI-algebras, BCK-algebras, branchwise implicative, medial, weakly implicative, branchwise commutative.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar atau sistem matematika adalah himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan paling sedikit sebuah relasi ekivalensi, satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma–aksioma tertentu.

Struktur aljabar yang akan dibahas pada makalah ini adalah beberapa kelas dari struktur *BCI*-aljabar, di mana struktur *BCI*-aljabar ini pertama kali diperkenalkan oleh M. A. Chaudhry. Sedangkan kelas-kelas tersebut antara lain : *BCI*-aljabar implikatif lemah, *BCI*-aljabar medial, *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*, *BCK*-aljabar dan *BCI*-aljabar komutatif *branchwise*. Pada makalah ini akan dikaji keterkaitan atau hubungan antar kelas tersebut.

Seperti diketahui karena struktur *BCI*-aljabar adalah subkelas dari struktur *K*-aljabar yang dibangun/dibentuk dari sebuah grup yang komutatif, sehingga dalam pembahasan *BCI*-aljabar memanfaatkan sifat-sifat yang ada pada grup. Hal ini juga berlaku pada pembahasan kelas-kelas *BCI*-aljabar yang juga memanfaatkan sifat-sifat yang berlaku pada grup.

Pada makalah ini, ditekankan himpunan yang digunakan sebagai dasar pengkajian dalam kelas-kelas *BCI*-aljabar adalah himpunan yang berhingga.

2. KELAS-KELAS DARI *BCI*-ALJABAR DAN HUBUNGANNYA SATU SAMA LAIN

Sebagai awal kajian akan diberikan definisi terkait dengan kelas-kelas *BCI*-aljabar sebagai berikut.

2.1. *BCI*-Aljabar Implikatif Lemah

Terlebih dulu diberikan definisi *BCI*-aljabar dan *BCK*-aljabar. Berangkat dari grup (, •) yang dilengkapi operasi biner " " yang didefinisikan dengan

= • , , (2. 1)

maka diperoleh oleh • = (0), dengan 0 menyatakan unsur identitas dari grup (, •).

Pada makalah ini himpunan tidak kosong dengan operasi biner dan 0 sebagai elemen khususnya dinotasikan dengan (, ,0) dinamakan aljabar dan aljabar (, ,0) yang ditinjau pada makalah ini adalah aljabar tipe (2,0), yaitu suatu aljabar di mana setiap elemen yang berbeda dengan elemen khusus 0 dan bukan berorde 2.

Definisi 2.1 [1, 2] *Misalkan suatu himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner “ ” dan 0 sebagai elemen khusus dari .. Suatu aljabar* (, ,0) *tipe* (2,0) *disebut BCI-aljabar jika untuk setiap , , memenuhi aksioma-aksioma berikut :*

(BCI1) ( ) ( ) ( ) = 0,

(BCI2) ( ) = 0,

(BCI3) = 0,

(BCI4) = 0 *dan* = 0 ⇒ = .

Definisi 2.2 [1] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar,* (, ,0) *merupakan BCK-aljabar jika untuk setiap berlaku* 0 = 0.

Contoh 2.1 Diberikan himpunan = {0, 1, 2, 3} dan didefinisikan operasi biner " " pada *X,* sebagaimana diberikan oleh tabel *Cayley* berikut.

Tabel 2.1 Pendefinisian operasi biner “ ” pada *X*

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

Dengan pendifinisian tersebut aksioma (BCI1) sampai (BCI4) dari *BCI*-aljabar dipenuhi oleh , sehingga (, ,0) merupakan *BCI*-aljabar dan lebih lanjut karena untuk setiap berlaku 0 = 0 maka (, ,0) juga merupakan *BCK*-aljabar.

Teorema 2.3 [1] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar, maka untuk setiap* , , *berlaku:*

1. ( ) = ( ) ,
2. (0) = ,
3. ( ) = ((0)),
4. 0 ( ) = (0) (0) = ,
5. 0 (0) = ,
6. (0) = (0),
7. ( ) = .

Bukti dari sifat-sifat tersebut dilakukan dengan memanfaatkan sifat-sifat yang berlaku pada grup dan menggunakan Persamaan (2.1).

Berikut dikenalkan relasi " ≤ " pada *BCI*-Aljabar.

Definisi 2.4 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar. Pada himpunan didefinisikan relasi* " ≤ " *dengan* ≤ *jika* = 0 *untuk setiap* , .

Lemma 2.5 [3] *Misalkan* (, ,0) *adalah BCI-aljabar. Jika pada didefinisikan relasi* " ≤ " *seperti yang telah diberikan oleh Definisi 3.1 maka relasi* " ≤ " *merupakan relasi terurut parsial.*

Bukti :

1. Relasi " ≤ " bersifat refleksif.
   Berdasarkan aksioma BCI3 diperoleh = 0 yang berarti ≤ sehingga relasi " ≤ " bersifat refleksif.
2. Relasi " ≤ " bersifat antisimetrik.
   Berdasarkan definisi relasi " ≤ " dan aksioma BCI4 yaitu jika = 0 dan = 0, maka = diperoleh ≤ dan ≤ berakibat = sehingga relasi " ≤ " bersifat antisimetrik.
3. Relasi " ≤ " bersifat transitif.
   Untuk membuktikan relasi " ≤ " bersifat transitif, misalkan untuk setiap , , dan memenuhi = 0 dan = 0, akan dibuktikan = 0. Dari aksioma BCI1 dengan mengingat dua kondisi tersebut diperoleh 0 ( ) = 0 dan dari sifat ke-4 pada Teorema 2.3 diperoleh = 0. Kondisi ini ekivalen dengan jika ≤ dan ≤ berakibat ≤ .

Dengan demikian benar bahwa relasi " ≤ " merupakan relasi terurut parsial.

Definisi 2.6 [1, 4] *Misalkan merupakan himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner “ ” dan 0 sebagai elemen khusus. Sebuah aljabar* (, ,0) *tipe* (2,0) *merupakan BCI-aljabar jika untuk setiap* , , *memenuhi aksioma-aksioma :*

(BCI1’) ( ) ( ) ≤ ( ),

(BCI2’) ( ) ≤ ,

(BCI3’) ≤ ,

(BCI4’) ≤ *dan* ≤ *, maka* = .

Teorema 2.7 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar, maka berlaku:*

1. ≤ ≤ *dan* ≤
2. ( ) ( ) ≤ ,

untuk setiap , , .

Setelah diperkenalkan relasi terurut parsial " ≤ ", berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari *BCI*-aljabar implikatif lemah.

Definisi 2.8 [3, 5] *Misalkan* (, ,0) *adalah BCI-aljabar, dikatakan BCI-aljabar implikatif lemah jika untuk setiap* , *memenuhi* ( ) 0 ( ) = .

Contoh 2.2 Berdasarkan Contoh 2.1 maka = {0, 1, 2, 3} yang dilengkapi dengan operasi biner " " seperti diberikan oleh Tabel 2.1, (, ,0) merupakan *BCI*-aljabar. Dari tabel tersebut diperoleh bahwa *BCI*-aljabar (, ,0) bersifat implikatif.

2.2. Kelas-kelas *BCK*-Aljabar

Misalkan (, ,0) adalah *BCK*-aljabar, berikut ini akan dibahas mengenai kelas-kelas dari *BCK*-aljabar.

Definisi 2.9 [6] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar, dikatakan BCK-aljabar implikatif positif jika untuk setiap* , , *memenuhi* ( ) ( ) = ( ) .

Syarat cukup dan perlu *BCK*-aljabar (, ,0) bersifat implikatif positif diberikan oleh teorema berikut ini.

Teorema 2.10 [6] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCK-aljabar, adalah BCK-aljabar implikatif positif jika dan hanya jika untuk setiap* , *memenuhi* ( ) = ( ) .

Pembuktian dilakukan dengan memanfaatkan aksioma-aksioma *BCI*-aljabar dan Definisi 2.2. Berikut ini diberikan definisi *BCK*-aljabar yang bersifat komutatif dan implikatif.

Definisi 2.11 [6] *Suatu BCK-aljabar* (, ,0) *merupakan BCK-aljabar komutatif jika untuk setiap* , *memenuhi* ( ) = ( ).

Definisi 2.12 [6] *Suatu BCK-aljabar* (, ,0) *merupakan BCK-aljabar implikatif jika untuk setiap* , *memenuhi* = ( ).

Contoh 2.3 Berdasarkan Contoh 2.1 diketahui bahwa = {0,1,2,3} terhadap operasi biner " " yang didefinisikan melalui Tabel 2.1 merupakan *BCK*-aljabar. Berdasarkan tabel tersebut diperoleh bahwa *BCK*-aljabar (, ,0) bersifat implikatif positif, komutatif dan sekaligus implikatif.

Teorema 2.13 [6] *Jika* (, ,0) *adalah BCK-aljabar implikatif maka* (, ,0) *merupakan BCK-aljabar implikatif positif dan BCK-aljabar komutatif.*

Pembuktian dilakukan dengan memanfaatkan aksioma-aksioma *BCI*-aljabar dan Definisi 2.2. Pertama, dibuktikan *BCK*-aljabar implikatif merupakan *BCK*-aljabar implikatif positif. Selanjutnya dapat dibuktikan bahwa *BCK*-aljabar implikatif merupakan BCK-aljabar komutatif.

2.3. *BCI*-Aljabar Medial

Suatu *BCI*-aljabar medial merupakan kelas *BCI*-aljabar. Pada bagian ini diberikan definisi tentang *BCI*-aljabar medial serta dibahas sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.14 [3] *Suatu BCI-aljabar* (, ,0) *merupakan BCI-aljabar medial jika untuk setiap* , , , *memenuhi* ( ) ( ) = ( ) ( ).

Contoh 2.4

1. Misalkan = {0, , } dan didefinisikan operasi biner " " pada *X*, sebagaimana diberikan oleh tabel *Cayley* berikut.

Tabel 2.2 Pendefinisian operasi biner " " pada *X*

	0	*a*	*b*
0	*0*	*b*	*a*
a	*a*	*0*	*b*
B	*b*	*a*	*0*

Aljabar (, ,0) membentuk *BCI*-aljabar, karena berdasarkan tabel tersebut aksioma (BCI1) sampai (BCI4) dipenuhi oleh . Berdasarkan tabel tersebut diperoleh bahwa memenuhi medialnya, dengan mengambil = 0, = dan = .

2. Berdasarkan Contoh 2.1 maka *X*= {0,1,2,3} yang dilengkapi dengan operasi biner " " pada yang didefinisikan pada Tabel 2.1 merupakan *BCI*-aljabar, tetapi bukan *BCI*-aljabar medial karena (1 0) (1 1) = 1 0 = 1 dan (1 1) (0 1) = 0 0 = 0, yaitu

(1 0) (1 1) ≠ (1 1) (0 1) .

Berikut diberikan definisi sub-aljabar medial.

Definisi 2.15 [3, 4] *Misalkan*(, ,0) *suatu BCI-aljabar medial. Himpunan bagian tidak kosong disebut sub-aljabar medial dari jika terhadap operasi biner yang sama pada , maka juga merupakan BCI-aljabar medial.*

Contoh 2.5 Berdasarkan Contoh 2.4 diketahui himpunan = {0, , } merupakan himpunan bagian tidak kosong dari = {0, , } yang merupakan suatu -aljabar medial dan merupakan himpunan itu sendiri. Dan operasi biner " " diperlihatkan pada Tabel 2.2 maka dari tabel tersebut terlihat bahwa operasi " " merupakan operasi biner pada . Akibatnya himpunan = {0, , } yang dilengkapi dengan operasi biner " " seperti yang didefinisikan oleh tabel di atas, merupakan sub-aljabar medial dari *BCI*-aljabar medial itu sendiri.

Teorema 2.16 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar medial, maka suatu himpunan bagian tidak kosong dari suatu BCI-aljabar medial disebut sub-aljabar medial jika dan hanya jika , untuk setiap* , .

Bukti:

( ) Diketahui sub-aljabar medial dari . Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap , . Karena adalah sub-aljabar medial dari , maka operasi juga berlaku di dalam .

( ) Diketahui , untuk setiap , .

Akan ditunjukkan bahwa himpunan bagian di merupakan sub-aljabar medial, dengan mengambil sebarang , dan diperoleh bahwa aksioma-aksioma *BCI*-aljabar medial terpenuhi.

Berikut ini juga akan diberikan definisi mengenai bagian medial dari *BCI*-aljabar.

Definisi 2.17 [3, 4] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar, maka himpunan bagian dari , yaitu* ( ) = { : 0 (0) = } *disebut bagian medial dari* .

Teorema berikut memperlihatkan bahwa Med( ) merupakan sub-aljabar medial dari *BCI*-aljabar (, ,0).

Teorema 2.18 [3] *Jika* (, ,0) *suatu BCI-aljabar, maka* ( ) *adalah sub-aljabar medial dari . Lebih lanjut, untuk setiap , terdapat dengan tunggal* ( ) *sedemikian sehingga* ≤ .

Bukti:

Dengan mengingat bahwa bagian medial dari adalah Med( ) = { |0 (0) = }, maka Med( ) . Selanjutnya karena 0 dan berlaku 0 = 0 0 = 0 (0 0) maka 0 Med( ), hal ini berarti ( ) ≠ . Selanjutnya diambil sebarang , Med( ), karena Med( ) ⊆ maka . Dengan memanfaatkan Teorema 2.3 no. 4 diperoleh = 0 0 ( ) , yaitu Med( ). Karena , Med( ) dan berlaku Med( ) maka Med( ) adalah sub-aljabar medial dari .

Selanjutnya akan diperlihatkan ketunggalan Med( ) sedemikian sehingga ≤ , untuk setiap . Dalam hal ini terdapat dua kasus berkaitan dengan unsur , yaitu :

(i) Untuk Med( ) , pilih = maka ≤ .

(ii) Untuk Med( ), pilih = 0 (0), maka = [0 (0)] = 0 , dengan aksioma BCI2

Jadi ≤ .

Selanjutnya misalkan Med( ) sedemikian sehingga ≤ , untuk setiap .

Akan dibuktikan ketunggalannya atau = .

≤ = 0

= 0 (0) Proposisi 2.3 no.5

= 0 (( )) dari yang diketahui

= 0 ( ) Proposisi 2.3 no.1

= 0 (0) aksioma BCI3

= ( ) (0) ≤ 0, Proposisi 2.7

≤ 0 yaitu ≤ .

Karena = 0 (0) dengan cara serupa maka dapat ditunjukkan bahwa ≤ .
Karena ≤ dan ≤ maka = .
Dengan perkataan lain adalah tunggal di Med( ).

Definisi 2.19 [3, 4] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar dan* ( ) *maka himpunan* ( ) = { : = 0} *disebut cabang dari yang ditentukan oleh elemen* .

Contoh 2.6 Misalkan = {0, , } dan didefinisikan suatu operasi biner " " pada *X,* sebagaimana diberikan oleh tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2.3 Pendefinisian operasi biner ' ' pada

	0		
0	0	0	
		0	
			0

Oleh karena aksioma (BCI1) sampai (BCI4) dipenuhi oleh , maka (, ,0) merupakan *BCI*-aljabar. Selanjutnya dari table tersebut diperoleh bahwa Med( ) = {0, } merupakan bagian medial dari *BCI*-aljabar dan {0, } merupakan cabang dari yang ditentukan oleh Med( ) = {0}, ini karena 0 = 0 dan 0 0 = 0, dengan 0 Med( ) dan .

Teorema 2.20 [3, 4] *Jika suatu BCI-aljabar* (, ,0) *dengan bagian medial* ( ) *maka*

(i) = { ( ): ( )},

(ii) ( ) ∩ ( ) = , , ( ) *dan* ≠

(iii) Jika , ( ), *maka* 0 = 0 = 0 = 0 *dan* , .

Bukti:

Misalkan (, ,0) suatu *BCI*-aljabar dengan bagian medial Med( ). Diambil sebarang dan Med( ).

(i) Akan ditunjukkan bahwa = { ( ): ( )}.
Diambil sebarang , maka

(1) Karena 0 (0) = berarti Med( ). Demikian juga karena = 0 maka ( ), sehingga ( ) ( ) ( ) ...
Akibatnya { ( ): ( )} atau { ( ): ( )}.

(2) Karena ( ) dengan untuk setiap Med( ) maka berlaku { ( ): Med( )}

Dengan demikian dari (1) dan (2) diperoleh = { ( ): Med( )}. Hal ini berarti bahwa cabang-cabang dari membentuk partisi untuk .

(ii) Misalkan ( ), ( ) cabang-cabang di dengan , Med( ) dan ≠ .
Andaikan bahwa ( ) ∩ ( ) ≠ berarti terdapat ( ) ∩ ( ) atau ( ) dan ( ). Dari ( ) artinya = 0 dan ( ) artinya = 0, sehingga diperoleh = dan ( ) = ( ), akibatnya 0 = 0 dan menurut aksioma BCI3 diperoleh = , yang bertentangan dengan ≠ sehingga pengandaian harus diingkar, yaitu ( ) ∩ ( ) = .

(iii) Akan diperlihatkan bahwa 0 = 0 = 0 = 0
Diambil sebarang , ( ), karena ( ) berarti = 0 dan ( ) berarti = 0, maka diperoleh = , akibatnya ( ) = ( ) yaitu 0 = 0 dan menurut Teorema 2.3, No.5 diperoleh
0 (0 (0)) = 0 (0 (0)) , yaitu
0 = 0 .
Selanjutnya akan diperlihatkan , atau akan ditunjukkan 0 ( ) = 0

dan 0 ( ) = 0. Dengan menggunakan Proposisi 2.3 no. 4 dan Definisi 2.2, maka

0 ( ) = (0) (0)
= 0 0
= 0

dan 0 ( ) = (0) (0)
= 0 0
= 0

2.4. *BCI*-Aljabar Implikatif *Branchwise*

Berikut diberikan definisi dari *BCI*-aljabar implikatif *branchwise* dan hubungannya dengan kelas *BCI*-aljabar yang lain.

Definisi 2.21 [3] *Suatu BCI-aljabar* (, ,0) *disebut BCI-aljabar implikatif branchwise jika dan hanya jika* ( ) = *untuk setiap* , ( ) ( ).

Contoh 2.7 Berdasarkan Contoh 2.6 maka = {0, , } yang dilengkapi dengan operasi biner “ ” seperti diberikan oleh Tabel 2.3 merupakan *BCI*-aljabar dan diperoleh bahwa Med( ) = {0, }, dengan demikian cabang dari adalah (0) = {0, } dan ( ) = { }. Akibatnya diperoleh bahwa *BCI*-aljabar (, ,0) merupakan *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*.

Teorema 2.22 [3, 5] *Jika* (, ,0) *suatu BCI-aljabar implikatif lemah maka implikatif branchwise.*

Bukti:

Misalkan (, ,0) suatu *BCI*-aljabar implikatif lemah atau untuk setiap , berlaku ( ) 0 ( ) = .

Akan diperlihatkan *BCI*-aljabar bersifat implikatif *branchwise* yaitu untuk setiap , memenuhi = ( ).

Diambil sebarang , maka

= ( ) (0 ( ))
= ( ) 0, Teorema 2.20 no. (iii)
= (( )), Teorema 2.3 no.2

2.5. *BCI*-Aljabar Komutatif *Branchwise*

Berikut diberikan definisi dari *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* dan hubungannya dengan kelas yang lain.

Definisi 2.23 [3] *Suatu BCI-aljabar* (, ,0) *dikatakan komutatif branchwise jika memenuhi* ( ) = ( ) *untuk setiap* , ( ), ( ).

Contoh 2.8 Berdasarkan Contoh 2.6 maka = {0, , } yang dilengkapi dengan operasi biner “ ” yang didefinisikan pada Tabel 2.3 merupakan *BCI*-aljabar. bagian medial Med( ) = {0, } dan cabang-cabang dari adalah (0) = {0, } dan ( ) = { }. Akan diperlihatkan bahwa pada *BCI*-aljabar (, ,0) sifat komutatif *branchwise* terpenuhi, sebagaimana diperlihatkan oleh tabel berikut:

Tabel 2.5 Pembuktian *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* dari

			( )		( )
0	0	0	0	0	0
0		0	0		0
	0		0	0	0
		0		0	
		0		0	

Oleh karena setiap *BCK*-aljabar merupakan *BCI*-aljabar, maka *BCK*-aljabar adalah komutatif jika dan hanya jika *BCI*-aljabar bersifat komutatif *branchwise*.

Teorema 2.24 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar, dikatakan komutatif branchwise jika dan hanya jika* ( ) = (( )), *untuk setiap* , .

Bukti:

( ) Misalkan (, ,0) suatu *BCI*-aljabar komutatif *branchwise*. Akan ditunjukkan bahwa

( ) = (( )),

untuk setiap , .

Untuk itu diambil sebarang , , maka

(( )) = (( ))
= ( )
= ( )

( ) Diketahui untuk setiap , berlaku

( ) = (( )).

Akan ditunjukkan bahwa suatu *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* atau berlaku

( ) = ( ), untuk setiap
, .
Diambil sebarang , , maka
( ) = (( ))
= ((0) ( ))
= (( )
( ))
Kemudian dengan memanfaatkan Teorema 2.3 no. 1 dan no. 4 diperoleh
( )
= (0 ( ) ( ))
= (0 ( ) ( ))
= (( ) ( ))
= (( ) ( ))
= ((( )))Teorema 2.13
= ( )
dan karena ini berlaku untuk setiap , , maka terbukti bahwa (, ,0) merupakan *BCI*-aljabar komutatif *branchwise*.

Lemma 2.25 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar. Jika* , *dan* ≤ *maka* , ( ) *untuk suatu* ( ).

Bukti:
Karena maka = 0 (0) artinya Med( ). Dengan mengambil = , maka Med( ) dan = = 0 atau ( ). Selanjutnya dari hubungan ≤ atau = 0, maka dengan mengingat = diperoleh = 0 atau ( ).

Teorema 2.26 [3] *Jika* (, ,0) *suatu BCI-aljabar implikatif branchwise maka* (, ,0) *komutatif branchwise.*

Bukti:
Misalkan (, ,0) suatu *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*. Akan diperlihatkan bahwa
( ) = ( ) ,
untuk setiap , ( ) dan Med( ).
Diambil sebarang , ( ) dan Med( ). Karena suatu *BCI*-aljabar implikatif *branchwise* maka ( ) = ( ) (( ))
Selanjutnya dengan mengingat BCI2' di mana ( ) ≤ maka
( ) (( ))
≤ ( )
Akibatnya
( ) ≤ ( )
dan ( ) ≤ ( ).
Selanjutnya dengan mengingat aksioma BCI'4, diperoleh
( ) ≤ ( )
dan ( ) ≤ ( )
dengan demikian ( ) = ( ) .
Dengan Teorema 2.24 terbukti bahwa (, ,0) adalah *BCI*-aljabar komutatif *branchwise*.

Teorema 2.27 [3] *Jika* (, ,0) *suatu BCI-aljabar implikatif branchwise maka berlaku* ( ) (0) = ( ) (0) (0), *untuk setiap* , .

Bukti:
Misalkan adalah *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*. Akan diperlihatkankan bahwa untuk setiap , berlaku
( ) (0)
= ( ) (0) (0).
Diambil sebarang , , maka
( ) (0)
= (( ) (0)) (
( ) (0))
Dengan menerapkan Teorema 2.3 no.1 dua kali diperoleh
( ) (0)
= ((( ) (0)))
(0)
Selanjutnya karena (, ,0) suatu *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* maka
( ) (0)
= ( ) (0) ( ) (0)
(0), dan diperoleh
( ) (0)
= ( ) (0) (0)
Dengan demikian benar bahwa untuk setiap , memenuhi ( )

(0) = ( ) (0)
(0).

Teorema 2.28 [3] *Suatu BCI-aljabar* (, ,0) *dengan* ( ) *sebagai ideal dari adalah BCI-aljabar implikatif branchwise jika dan hanya jika* (, ,0) *komutatif branchwise dan untuk setiap* , *memenuhi* ( ) (0) = ( ) (0) (0).

Bukti:

( ) Bukti ini telah diberikan oleh Teorema 2.26 dan Teorema 2.27

( ) Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa Med( ) adalah ideal dari . Dengan mengingat bahwa Med( ) = { |0 (0) = } maka Med( ) .Selanjutnya karena 0 dan berlaku 0 (0 0) = 0 0 = 0 maka 0 ( ) dengan kata lain ( ) ≠ . Kemudian Med( ) dikatakan ideal dari jika memenuhi :

1. 0 ( )
2. , , Med( ) dan Med( ) ⇒ ( ).

Diambil sebarang , sedemikian hingga Med( ) dan Med( ) maka berlaku

= 0 (0 ( )) dan = 0 (0). Dengan memanfaatkan Teorema 2.3 no 2 dan no. 4 serta Med( ), maka diperoleh bahwa Med( ) atau berlaku = 0 (0).

Sehingga terbukti bahwa Med( ) adalah ideal dari . Selanjutnya, akan diperlihatkan bahwa *BCI*-aljabar (, ,0) dengan ( ) sebagai ideal dari merupakan *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*.

Misalkan (, ,0) adalah *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* dan untuk setiap , memenuhi

( ) (0)
= ( ) (0) (0) (2.2)

Diambil sebarang , , ( ), untuk suatu Med( ) maka

(1) Dengan mengingat Teorema 2.20 (iii) diperoleh dan , maka
0 ( ) = 0 ( ) = 0.

Selanjutnya
( )
= ( ) ( ) = 0 ( ) = 0,
akibatnya ( ) ≤ .

(2) Dengan menggunakan definisi relasi "≤" dan Lemma 2.25 maka ( ) dan adalah cabang yang ditentukan oleh . Oleh karena itu, , dan ( ) ( ). Karena suatu *BCI*-aljabar komutatif *branchwise*, maka dengan memanfaatkan Persamaan (2.2) dan Teorema 2.3 no.1 diperoleh

( ) (0)
= ((( ) ( )
( ))) (0) (0)

Karena , dan ( ) ( ), maka , , ( ) = ( ).

Karena (, ,0) adalah *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* maka dengan menggunakan aksioma (BCI3) dan sifat-sifat yang berlaku di *BCI*-aljabar maka diperoleh bahwa

( ) (0) = 0 (0),
yaitu
( ) (0)
= 0 (0) Med( ).

Dengan mengingat Proposisi 2.3 no.7 maka 0 0 (0) = 0 , akibatnya 0 Med( ). Karena Med( ) adalah ideal dari maka ( ) Med( ) dan diperoleh ( )
= 0 (0 ( )).

Karena ( ) = (0)
maka 0 ( ) = 0 yaitu
( ) = 0,
dan diperoleh ≤ ( ).

Dengan demikian dari (1) dan (2) diperoleh
= ( )

Dari Teorema 2.28, didapat Med( ) = {0} merupakan ideal dari . Dengan demikian dipunyai akibat sebagai berikut.

Akibat 2.29 [3, 6] *Suatu BCK-aljabar* (, ,0) *dikatakan implikatif jika dan* *hanya jika* (, ,0) *implikatif positif dan komutatif.*

Bukti:

( ) Bukti ini telah diberikan oleh Teorema 2.13.

( ) Misalkan suatu *BCK*-aljabar implikatif positif dan *BCK*-aljabar komutatif . sehingga diperoleh suatu *BCK*-aljabar implikatif atau untuk setiap , berlaku ( ) = , yang diperoleh dengan memnafaatkan sifat-sifat *BCK*-aljabar.

Berikut ini diberikan terlebih dahulu pengertian pasangan elemen yang saling *comparable*, sebagai dasar pembahasan sifat ke-implikatif-an branchwise suatu *BCI*-aljabar.

Definisi 2.30 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar. Dua elemen , di dikatakan comparable jika dan hanya jika* = 0 *atau* = 0 *atau ekivalennya* ≤ *atau* ≤ .

Contoh 2.9 Berdasarkan Contoh 2.6 diketahui = {0, , } yang dilengkapi dengan operasi biner " " yang didefinisikan pada Tabel 2.3 merupakan *BCI*-aljabar. Berdasarkan tabel tersebut tampak bahwa terdapat elemen-elemen yang *comparable* yaitu 0 dan 0 sendiri karena 0 0 = 0 (elemen-elemen bersama dengan dirinya sendiri adalah *comparable*). Dengan demikian pasangan (,) dan (,) adalah *comparable*, demikian pula 0 dan juga *comparable* karena 0 = 0.

Definisi 2.31 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar. Jika* ( ) *dan* ≠ 0, *maka* ( ), *cabang dari yang ditentukan oleh dinamakan cabang BCI-aljabar sejati dari* .

Contoh 2.10 Diberikan = {0,1,2,3} suatu *BCI*-aljabar dengan operasi biner " " yang didefinisikan pada , sebagaimana diberikan oleh tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2.6 Pendefinisian operasi biner ' ' pada

	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	3	2
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

maka (, ,0) merupakan BCI-aljabar, karena memenuhi aksioma (BCI1) sampai (BCI4). Dari tabel di atas tampak bahwa Med( ) = {0,2} merupakan bagian medial dari *BCI*-aljabar dan cabang *BCI*-aljabar sejatinya adalah {3} yang ditentukan oleh 2, karena 2 3 = 0.

Teorema 2.32 [3] *Misalkan* (, ,0) *suatu BCI-aljabar sedemikian sehingga terdapat dua elemen dari BCI-aljabar cabang sejati yang comparable maka merupakan BCI-aljabar implikatif branchwise jika dan hanya jika adalah BCI-aljabar komutatif branchwise dan memenuhi persamaan*

( ) (0)
= ( ) (0) (0)

untuk setiap , .

Bukti:

( ) Bukti ini telah diberikan oleh Teorema 2.26 dan Teorema 2.27

( ) Misalkan suatu *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* dan untuk dua elemen sebarang , memenuhi persamaan

( ) (0)
= ( ) (0) (0)

Akan diperlihatkan bahwa jika suatu *BCI*-aljabar sedemikian sehingga terdapat dua elemen dari *BCI*-aljabar cabang sejati adalah *comparable* maka suatu *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*.

Kondisi 1

Diambil sebarang , (0) = maka 0 = 0 = 0, dengan demikian

( ) (0)
= ( ) (0) (0)

yaitu ( ) 0 = ( ) 0 atau
= ( ) (2.3)

Selanjutnya akan diperlihatkan ( ) ≤ atau ( ) = 0,

( ) = ( ) ( )
= 0 ( )
= 0 0 = 0

Sebaliknya akan dibuktikan ≤ ( ) atau ( ) = 0, yaitu

( ) = ( ) ( ) ,

dan dengan Persamaan (2.3) diperoleh

( ) = ( ) ( ) = 0.
Terakhir karena ( ) ≤ dan ≤ ( ) maka = ( ), akibatnya suatu *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*.

Kondisi 2

Diambil sebarang , ( ), dengan Med( ) dan ≠ 0. Karena dan maka dipunyai 0 ( ) = 0 dan 0 ( ) = 0. Selanjutnya karena , *comparable* maka = 0 atau = 0. Dengan mengingat sifat komutatif *branchwise* dari dan = 0 maka diperoleh

( ) = ( ) = 0 = (2.4)

Akan diperlihatkan bahwa = ( ).

= 0
= ( ), , adalah *comparable*
= ( )
= ( ) ( ),Persamaan (2.3)
= ( ),Persamaan (2.4)

Dengan demikian karena = ( ) maka (, ,0) merupakan *BCI*-aljabar implikatif *branchwise.*

Jika Teorema 2.31 dan Teorema 2.32 digabung maka dipunyai teorema berikut ini.

Teorema 2.33 *Misalkan* (, ,0) *adalah suatu BCI-aljabar sedemikan sehingga* ( ) *adalah ideal dari atau untuk setiap pasangan elemen dari BCI-aljabar cabang sejati dari adalah comparable maka bersifat implikatif branchwise jika dan hanya jika komutatif branchwise dan memenuhi* ( ) (0) = ( ) (0) (0), *untuk setiap* , .

3. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan diperoleh hubungan kelas-kelas tersebut dan dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Setiap *BCK*-aljabar implikatif adalah *BCK*-aljabar implikatif positif dan *BCK*-aljabar komutatif. Dengan memanfaatkan sifat yang berlaku di *BCK*-aljabar dimana setiap *BCK*-aljabar merupakan *BCI*-aljabar, diperoleh bahwa setiap *BCI*-aljabar implikatif *branchwise* adalah *BCK*-aljabar implikatif positif dan *BCI*-aljabar komutatif *branchwise*.
2. Setiap *BCI*-aljabar implikatif lemah merupakan *BCI*-aljabar implikatif *branchwise*. Namun tidak berlaku sebaliknya.
3. Dengan memanfaatkan bagian medial dari *BCI*-aljabar, diperoleh setiap *BCI*-aljabar implikatif *branchwise* merupakan *BCI*-aljabar komutatif *branchwise* dan juga sebaliknya.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] K. H Dar and M. Akram, (2006), *On Subclasses of K(G)-algebras,* Annals of University of Craiova. Math. Comp. Sci. Ser 33: 235-240.

[2] M. Akram and Hee Sik Kim, (2007), On K-Algebras and BCI-Algebras, *International Mathematical Forum*, 2: 583-587

[3] Muhammad Anwar Chaudhry. (2002), On Branchwise Implicative BCI-Algebras, Hindawi Publishing Corporations, *IJMMS*, 29: 417-425.

[4] Muhammad Anwar Chaudry, (2001), On Two Classes of BCI-Algebras, *Scientiae Mathematical Japonicae Online* 4: 203-212

[5] Yisheng Huang, (2006), On Implicative BCI-Algebra, *Scientiae Mathematical Japonicae Online* : 319 – 327

[6] Jie Meng, (1991). A Problem on the Variety of BCK-Algebras, *World Scientific Publishing Company SEA Bull. Math*, 17(2): 167-171.