PROGRAM LINIER *FUZZY* PENUH DENGAN METODE KUMAR

Shintia Devi Wahyudy[1], Bambang Irawanto[2],
[1,2]Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, S.H. Tembalang Semarang
[1]Shintiadevi15@gmail.com, [2]b_irawanto@yahoo.co.id

Abstract. Fully fuzzy linear programing is part of a crisp linear programming (linear programimg with a number of crisp) which the numbers used are fuzzy numbers. Solving a fully fuzzy linear programming problems by using Kumar method to fuzzy optimal solution and crisp optimal value.. Solving fuzzy optimal solution by Kumar method on triangular fuzzy number to divide into tree objective functions and defuzzification by using ranking function and α - cutting to get crisp optimal solution. This paper discusses about Kumar methods method for solving fully fuzzy linear programming in which fuzzy numbers used are triangular fuzzy numbers.

Keywords : Fully Fuzzy Linear Programming, Triangular Fuzzy Number, , Kumar Method

1. PENDAHULUAN

Dalam program linier terdapat salah satu asumsi dasar, yaitu asumsi kepastian (pendefinisian yang baik dan tegas), dimana setiap parameter data dalam program linier diketahui secara pasti [1]. Dalam kehidupan sehari-hari, parameter yang ada tidak dapat dinyatakan dengan formula yang tegas sehingga ini bukan asumsi yang realistis. Oleh karena itu, program linier (tegas) dikembangkan menjadi program linier fuzzy penuh. Zadeh mendefinisikan himpunan fuzzy dengan menggunakan apa yang disebutnya fungsi keanggotaan (*membership function*), yang nilainya berada dalam selang tertutup [0,1]. Jadi keanggotaan dalam himpunan fuzzy tidak lagi merupakan sesuatu yang tegas (yaitu anggota atau bukan anggota), melainkan sesuatu yang berderajat atau bergradasi secara kontinu [2]. Beberapa metode telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah program linier fuzzy penuh, seperti metode Kumar pada [3]. Dalam tulisan ini, dibahas penyelesaian program linier *fuzzy* penuh dengan metode Kumar. Langkah-langkah pada metode Kumar dapat menghasilkan solusi optimal *fuzzy*, nilai optimal *fuzzy*, solusi optimal *crisp* dan nilai optimal *crisp*

2. PEMBAHASAN

2.1 Himpunan Fuzzy

Dibawah ini diberikan pengertian dari himpunan fuzzy

Definisi 2.1. [4] *Himpunan fuzzy di dalam semesta pembicaraan U didefinisikan sebagai himpunan yang mencirikan suatu fungsi keanggotaan (x) yang mengawankan setiap x U dengan bilangan real di dalam interval [0,1].*

$$: U \rightarrow [0,1]$$

dimana nilai (x) menunjukan tingkat keanggotaan (membership) dari x pada .

Definisi 2.2. [3] *Bilangan fuzzy adalah himpunan fuzzy dalam bilangan real yang memenuhi kondisi normalitas dan konveksitas. Bilangan fuzzy = (, ,) dinamakan bilangan segitiga fuzzy jika fungsi keanggotaannya diberikan oleh:*

$$(\ ) = \begin{cases} \dfrac{(\ - \ )}{(\ - \ )}, & \le \ < \ , \\ 1, & = \ , \\ \dfrac{(\ - \ )}{(\ - \ )}, & < \ \le \ , \\ 0, & . \end{cases}$$

dengan ≤ ≤ yang sesuai dengan fungsi keanggotaan bilangan segitiga fuzzy.

Selanjutnya diberikan *F*(R) adalah himpunan dari bilangan bilangan fuzzy.[2]

Definisi 2.3. [3] *Bilangan segitiga fuzzy ũ = (, ,) disebut bilangan fuzzy non negatif jika ≥ 0.*

Definisi 2.4. [3] *Dua bilangan segitiga fuzzy (triangular fuzzy number) ũ = (, ,) dan = (, ,) dikatakan sama, ũ = , jika* $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, *dan* $z_1 = z_2$.

Definisi 2.5. [5] *Misalkan terdapat dua bilangan segitiga fuzzy ũ = (, ,) dan = (, ,) dan terdapat k R, maka:*

(i) k ≥ 0, k ũ = (, ,),

(ii) k ≤ 0, k ũ = (, ,),

(iii) ũ = (, ,) (, ,) = (+ , + , +),

(iv) misal ũ = (, ,) sebarang bilangan segitiga fuzzy dan = (, ,) adalah sebuah bilangan segitiga fuzzy non-negatif, maka:

ũ = ũ = (, ,) ≥ 0, (, ,) ≤ 0, ≥ 0, (, ,) ≤ 0.

(v) ũ = (, ,) (, ,) = (- , - , -).

Definisi 2.6. [3] *Fungsi ranking pada bilangan F(R). didefinisikan sebagai berikut ( ) = ——— , dengan = (a, b, c), F(R).*

Definisi 2.7. [5] *Misal ũ = (, ,) dan = (, ,) adalah sebarang bilangan segitiga fuzzy. Maka ũ , jika dan hanya jika:*

(i) < atau

(ii) = dan (-) > (-) atau

(iii) = , (-) = (-) dan (+) < (+).

Jelas bahwa = , (-) = (-) dan (+) = (+) jika ũ = . Dan ũ jika ũ atau ũ = .

2. Program Linier Fuzzy dan Metode Kumar

Program linier fuzzy dapat dibagi menjadi dua jenis yaitu program linier *fuzzy* penuh (*Fully Fuzzy Linear Programming*) dan program linier *fuzzy* tidak penuh. Program linier *fuzzy* dikatakan program linier *fuzzy* penuh jika variabel keputusan / pembatas tanda, koefisien fungsi tujuan, koefisien kendala dan ruas kanan kendala merupakan bilangan *fuzzy*. Program linier *fuzzy* dikatakan program linier *fuzzy* tidak penuh dikarenakan terdapat variabel keputusan / pembatas tanda, koefisien fungsi tujuan, koefisien kendala atau ruas kanan kendala yang merupakan bilangan *crisp*. Dalam hal ini yang digunakan adalah bilangan *triangular fuzzy*.

Program Linier fuzzy penuh dalam bentuk baku [5] dapat di tuliskan

Memaksimalkan (atau meminimalkan) ∑ ˜ ,

terhadap ∑ (≤, ≥, =) , (= 1,2, … ,),

≥ 0, (= 1,2, … ,),

Bentuk diatas masalah PLFP (Program Linier *Fuzzy* Penuh) dengan persamaan kendala *fuzzy* dan variabel *fuzzy* dapat diformulasikan sebagai berikut [3]:

Memaksimalkan (atau meminimalkan) ,

dengan kendala =

adalah bilangan *fuzzy* non-negatif, dimana:

= ˜ × ; = × ; = × ; = × dan

, ˜, , ( ).

Definisi 2.7 [6] *Setiap = (, , … ,) ( ) dimana setiap ( ) yang memenuhi kendala dan pembatas non-negatif PLFP dikatakan solusi fisibel dari PLFP.*

Definisi 2.8 [6] *Perhatikan sistem = dengan ≥ 0, dimana A adalah matriks × dan b adalah vektor m. Andaikan* *rank(A) = m, kolom A sebagai [B, N] dengan B adalah matriks* × . *Vektor* = , *diamana* = *disebut solusi fisibel dasar dari sistem. B disebut matriks dasar dan N disebut bukan matriks dasar. Komponen dari B disebut variabel dasar. Jika* > 0, *maka disebut non-degenerasi solusi fisibel dasar. Jika* = 0 *maka disebut degenerasi solusi fisibel dasar.*

Definisi 2.9 [6] *Sebuah solusi fisibel dasar fuzzy untuk masalah program linier fuzzy dikatakan solusi optimal fisibel dasar fuzzy jika* = ≥ *dimana adalah nilai fungsi tujuan untuk semua solusi fisibel fuzzy.*

Persamaan tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode Kumar. Langkah-langkah dari metode Kumar dalam menyelesaikan masalah program linier *fuzzy* penuh yaitu sebagai berikut:

1. Langkah 1 [3]
   Substitusikan = ˜ × ; = × ; = × ; = × ; maka masalah PLFP dapat ditulis sebagai:
   Memaksimalkan (atau meminimalkan) ∑ ˜ ,
   dengan kendala ∑ = = 1,2, … , ,
   adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif.
2. Langkah 2 [3]
   Jika semua parameter ˜, , dan direpresentasikan oleh bilangan *triangular fuzzy* , , , , , , , , , dan (, ,), masing-masing merupakan masalah PLFP, berdasarkan langkah 1 dapat ditulis:
   Memaksimalkan (atau meminimalkan) = ∑ , , , , ,
   dengan kendala
   ∑ , , , , = (, ,) = 1,2, … , ,
   , , adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif.
3. Langkah 3 [3]
   Diasumsikan , , , , = , , adalah masalah PLFP, berdasarkan langkah 2 dapat ditulis:
   Memaksimalkan (atau meminimalkan) = ∑ , , , , ,
   dengan kendala
   ∑ , , = (, ,) = 1,2, … , ,
   , , adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif.
4. Langkah 4 [3]
   Dengan menggunakan operasi aritmatika dalam masalah program linier *fuzzy* dan berdasarkan langkah 3 maka diubah menjadi masalah PLC (Program Linier *Crisp*) yaitu sebagai berikut:
   Memaksimalkan (atau meminimalkan) = ∑ , , , , ,
   dengan
   = ∑ , = 1,2, … , ,
   = ∑ , = 1,2, … , ,
   = ∑ , = 1,2, … , ,
   dengan kendala
   ∑ = , = 1,2, … , ,
   ∑ = , = 1,2, … , ,
   ∑ = , = 1,2, … , ,
   − ≥ 0, − ≥ 0, = 1,2, … , .
5. Langkah 5 [3]
   Menemukan solusi optimal *crisp* , dan dengan menyelesaikan masalah CLP, berdasarkan langkah 4 menggunakan metode dua fase.
6. Langkah 6 [3]
   Menemukan solusi optimal *fuzzy* dengan memasukkan nilai dari , dan kedalam = , , .

7. Langkah 7 [3]
   Menemukan nilai optimal *fuzzy* dengan memasukkan nilai kedalam
   $\sum$ ˜
8. Langkah 8
   Melakukan penegasan (*defuzzification*) nilai optimal *fuzzy* dengan
   Cara I [3] Fungsi pemeringkatan (*ranking function*) = ———
   Cara II [7] Potongan- (-*cutting*)

Contoh Kasus

Seorang mahasiswa melakukan percobaan tentang intensitas penyiraman terhadap tumbuhan. Dalam melakukan percobaannya, mahasiswa tersebut harus mempertimbangkan kuantitas air yang digunakan dalam penyiraman. Kuantitas air yang digunakan sebisa mungkin diefisienkan untuk meminimalkan tagihan biaya air yang akan dibayarkan. Data selengkapnya yaitu sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Intensitas Penyiraman Tananman

Intensitas penyiraman (liter/hari)	Tumbuhan		Biaya (dalam ratusan rupiah)
	A	B	
I	(0,1,2)	(1,2,3)	(1,2,3)
II	(1,2,3)	(0,1,2)	(2,3,4)
Kapasitas air (liter/hari)	(2,10,24)	(1,8,21)	

Hitunglah nilai optimal *fuzzy* dan nilai optimal *crisp* untuk meminimalkan pengeluaran biaya tagihan air yang digunakan untuk penyiraman tumbuhan.

Berdasarkan Tabel 2.1, informasi yang diperoleh yaitu:

Intensitas penyiraman I untuk tumbuhan A adalah **kurang lebih** 1 liter/hari yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (0,1,2). Intensitas penyiraman I untuk tumbuhan B adalah **kurang lebih** 2 liter/hari yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (1,2,3). Dengan biaya air yang dikeluarkan untuk intensitas penyiraman I yaitu **kurang lebih** 200 rupiah yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (1,2,3).

Intensitas penyiraman II untuk tumbuhan A adalah **kurang lebih** 2 liter/hari yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (1,2,3). Intensitas penyiraman II untuk tumbuhan B adalah **kurang lebih** 1 liter/hari yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (0,1,2). Dengan biaya air yang dikeluarkan untuk intensitas penyiraman II yaitu **kurang lebih** 300 rupiah yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (2,3,4).

Kapasitas air yang tersedia terhadap intensitas penyiraman I dan intensitas penyiraman II untuk tumbuhan A yaitu **kurang lebih** 8 liter/hari yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (2,10,24).

Kapasitas air yang tersedia terhadap intensitas penyiraman I dan intensitas penyiraman II untuk tumbuhan B yaitu **kurang lebih** 10 liter/hari yang ditunjukkan oleh bilangan *triangular fuzzy* (1,8,21).

Solusi:

Variabel keputusan: : adalah intensitas penyiraman I

: adalah intensitas penyiraman II

dengan = (, ,) dan = (, ,)

Fungsi tujuan: Meminimalkan = (1,2,3) (2,3,4) ,

Kendala: (0,1,2) (1,2,3) = (2,10,24),

(1,2,3) (0,1,2) = (1,8,21),

, adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif.

Langkah 2, dengan = (, ,) dan = (, ,) maka masalah PLFP tersebut dapat ditulis:

Meminimalkan = (1,2,3) (, ,) (2,3,4) (, ,) ,

dengan kendala (0,1,2) (, ,) (1,2,3) (, ,) = (2,10,24),

(1,2,3) (, ,) (0,1,2) (, ,) = (1,8,21),

(, ,), (, ,) adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif.

Langkah 3, masalah PLFP tersebut dapat ditulis:

Meminimalkan = (1 + 2 , 2 + 3 , 3 + 4),

dengan kendala (0 + 1 , 1 + 2 , 2 + 3) = (2,10,24),

(1 + 0 , 2 + 1 , 3 + 2) = (1,8,21),

(, ,), (, ,) adalah bilangan *triangular fuzzy* non-negatif.

Langkah 4, mengkonversi masalah PLFP kedalam masalah PLC.

Meminimalkan = (1 + 2 , 2 + 3 , 3 + 4),

dengan

= + 2 = 2 + 3

= 3 + 4

dengan kendala 0 + 1 = 2

1 + 0 = 1

1 + 2 = 10

2 + 1 = 8

2 + 3 = 24

3 + 2 = 21

− ≥ 0, − ≥ 0, − ≥ 0, − ≥ 0.

Langkah 5, menemukan solusi optimal PLFP dengan menggunakan metode dua fase dengan solusi optimal *crisp* yaitu

= 1, = 2, = 3, = 2, = 4, = 6

Langkah 6, berdasarkan langkah 5 maka diperoleh solusi optimal *fuzzy* yaitu = (1,2,3) dan = (2,4,6).

Langkah 7, berdasarkan langkah 5 maka diperoleh nilai optimal *fuzzy* untuk masalah PLFP yaitu = (, ,) = (5, 16, 33).

Langkah 8, berdasarkan langkah 6 dilakukan Penegasan (*defuzzification*) nilai optimal *fuzzy* menjadi nilai optimal crisp:

Cara I

Nilai optimal *crisp* dapat diperoleh berdasarkan langkah 7, dengan (, ,) = (5,16,33) maka dilakukan penegasan (*defuzzification*) nilai optimal *fuzzy* menjadi nilai optimal *crisp* = ——— maka = — = 17.5

Cara II

Berdasarkan bentuk fungsi keanggotan *triangular fuzzy*, dengan nilai optimal *fuzzy* (5,16,33) maka diperoleh

Interval potongan- (-*cutting*) dari nilai optimal *fuzzy*

( ) = = 11 + 5,

( ) = = −17 + 33

= ( ), ( ) = [11 + 5 , −17 + 33]

Jika = 0.25 maka diperoleh = [7.75, 28.75]

Jika = 0.5 maka diperoleh = [10.5, 24.5]

Jika = 0.75 maka diperoleh = [13.25, 20.25]

Sehingga dengan potongan = 0.25, = 0.5 dan = 0.75 diperoleh nilai optimal *crisp*

= [7.75, 28.75] = [10.5, 24.5] = [13.25, 20.25]

Hal ini berarti mahasiswa tersebut harus menyiram tanaman dengan intensitas:

Intensitas penyiraman I = (1,2,3)

Dengan = ——— maka = 2

Interval potongan- (-*cutting*) dari solusi optimal *fuzzy*

(− 1) = = + 1, (3 −) = = − + 3

= ( ), ( ) = [+ 1 , − + 3]

Jika = 0.25 maka diperoleh = [1.25, 2.75]

Jika = 0.5 maka diperoleh = [1.5, 2.5]

Jika = 0.75 maka diperoleh = [1.75, 2.25]

Sehingga dengan potongan = 0.25, = 0.5 dan = 0.75 diperoleh solusi optimal *crisp*

= [1.25, 2.75] = [1.5, 2.5] = [1.75, 2.25]

Intensitas penyiraman II = (2,4,6)

Dengan = ——— maka = 4

Interval potongan- (-*cutting*) dari solusi optimal *fuzzy*

$\frac{(\ \ )}{} = \qquad = 2 \quad + 2$

$\frac{(\ \ )}{} = \qquad = -2 \quad + 6$

$= \quad (\ ), \ (\ ) \ = [2 \quad + 2, -2 \quad + 6]$

Jika $= 0.25$ maka diperoleh $=$ $[2.5, 5.5]$

Jika $= 0.5$ maka diperoleh $= [3, 5]$

Jika $= 0.75$ maka diperoleh $=$ $[3.5, 4.5]$

Sehingga dengan potongan $= 0.25$, $= 0.5$ dan $= 0.75$ diperoleh solusi optimal *crisp*

$= [2.5, 5.5]$ $=$ $[3, 5]$ $= [3.5, 4.5]$

Mahasiswa tersebut harus menyiram tumbuhan dengan intensitas penyiraman I yaitu 2 liter/hari dan intensitas penyiraman II yaitu 4 liter/hari agar biaya tagihan air yang dibayarkan adalah Rp1750 perhari. Mahasiswa tersebut juga bisa menyiram tumbuhan (dengan $= 0.75$ karena intervalnya lebih kecil dan mendekati nilai *crisp*nya) dengan intensitas penyiraman I yaitu 1.75 sampai 2.25 liter/hari dan intensitas penyiraman II yaitu 3.5 sampai 4.5 liter/hari agar biaya tagihan air yang dibayarkan adalah Rp1325 sampai Rp2025 perhari.

3. PENUTUP

Metode Kumar dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah PLFP dengan dua variabel *fuzzy*. Deengan mengubah menjadi tiga fungsi tujuan untuk didapatkan solusi optimal pada masing masing fungsi tujuan. Nilai optimal crisp deperoleh dengan menggunakan fungsi peringkat . Nilai optimal crisp juga dapat di peroleh dengan cara interval potongan – α.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Hillier, Frederick S dan Gerald J. Liberman, (1990), *Introduction to Operations Research Fifth Edition*. Jakarta: Erlangga

[2] Susilo, Frans, (2006), *Himpunan & Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[3] Kumar, Amit. Jagdeep Kaur. Pushpinder Singh, (2011), A New Method For Solving Fully Fuzzy Linear Problemming Problem. *International Journal of Applied Mathematics Modelling*, 35(2) : 817-823.

[4] Klir, George J. dan Yuan Bo, (1995), *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Apllications*. New Jersey: Prentice Hall P T R.

[5] R. Ezzati, E. Khorram, R. Enayati, (2013), A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem, *Appl. Math. Model* : 1-11.

[6] Beaula, T, Rajalakshmi, S., (2012), “Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problem using Breaking Points”, *International Journal of Applied Operational Research*. 2(3) :11-20.

[7] Palash, D, Hrishikesh, B, Tazid, A., (2011), Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A Comparative Study, *International Journal of Latest Trends in Computing*, 2(1) : 99-107.