

MODEL SEIR UNTUK EPIDEMI FLU BABI PADA POPULASI BABI DENGAN LAJU KONTAK JENUH

M Kharis✉

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima 3 Januari 2012
Disetujui 6 Maret 2012
Dipublikasikan April 2012

Keywords:
Epidemic
Swine flu
SEIR model

Abstrak

Babi merupakan inang alami dari virus influenza yang secara anatomis, fisiologis, dan imunitas mirip (*similar*) dengan yang ada pada manusia. Virus influenza subtype A yang ada pada manusia yaitu H1N1, H3N2 dan H1N2 merupakan *enzootic* pada populasi babi di dunia. Babi dapat terinfeksi oleh turunan-turunan virus influenza tipe A dari manusia maupun dari burung dan dalam hal ini dianggap sebagai inang sementara (*Intermediate hosts*) dari turunan-turunan virus flu babi yang berpotensi menyebabkan epidemi bahkan pandemi. Evolusi antigenik dari virus influenza pada babi terjadi dengan laju sekitar 6 kali lebih lambat dibandingkan dengan virus influenza pada manusia. Dalam tulisan ini akan dikaji model matematika untuk epidemi flu babi pada populasi babi. Model yang diberikan merupakan model deterministik dengan laju kontak jenuh yang merupakan perumuman dari laju kontak standar. Perumuman ini dinyatakan dengan adanya probabilitas suatu individu melakukan kontak yang dinyatakan sebagai suatu fungsi dari populasi. Pengkajian yang dilakukan meliputi penentuan titik ekuilibrium model matematika dan analisa kestabilannya. Diharapkan hasil kajian ini dapat bermanfaat dalam penanggulangan wabah flu babi pada sumber utama yaitu populasi babi sehingga dapat dilakukan pencegahan sebelum mewabah di populasi manusia.

Abstract

Pigs are a natural host of influenza virus that are similar anatomically, physiologically, and immunity which in humans. Influenza viruses of A subtype in humans are H1N1, H3N2 and H1N2. They are enzootic in the swine population in the world. Pigs can be infected by strains of type A influenza viruses from humans or from birds. Pigs are considered as a temporary host (intermediate hosts) of the derivatives of the swine flu virus that has the potential to cause epidemics and even pandemics. Antigenic evolution of influenza viruses in pigs occurred at rate about 6 times slower than the influenza viruses in humans. In this paper the mathematical model will be assessed for swine flu epidemic in pig populations. The model provided a deterministic model with saturated contact rate which is a generalization of the standard contact rate. This generalization is expressed by the probability of an individual contact that is expressed as a function of population. In this paper, it will be analyzed the equilibrium point of mathematical models and their stability.

© 2012 Universitas Negeri Semarang

✉ Alamat korespondensi:
Gedung D7 Lantai 1 FMIPA Unnes
Kampus Sekaran, Gunungpati, Semarang, Indonesia 50229
E-mail: mkharis_mcc@staff.unnes.ac.id

Pendahuluan

Dalam Fraser *et al.* (2009) disebutkan bahwa pada 29 April 2009 WHO mengumumkan laju penyebaran secara global dari strain virus influenza A (H1N1) yang terdeteksi pada minggu sebelumnya meningkatkan level tanda *global pandemic* sampai ke level 5. Level 5 mengindikasikan transmisi antar manusia yang terjadi terus-menerus. Dalam Fitzgerald (2009) disebutkan bahwa pada sekitar 15 April sampai 5 Mei 2009, virus influenza telah menyebar dengan cepat dari Meksiko ke 41 negara di Amerika Serikat dan menyebabkan 642 kasus di Amerika Serikat. Virus tersebut mencapai Kanada dan Eropa pada waktu yang bersamaan dan pada 27 Mei 2009 telah mencapai 46 negara dengan 92 kasus kematian [80 di Meksiko dan 10 di AS]. Dalam Fitzgerald (2009) dan Fraser *et al.* (2009) disebutkan bahwa Penyebaran virus influenza dalam epidemi melibatkan orang yang sering melakukan perjalanan ke berbagai daerah yang terkena wabah.

Babi merupakan inang alami dari virus influenza yang secara anatomis, fisiologis, dan imunitas mirip (*similar*) dengan yang ada pada manusia. Virus influenza subtipe A yang ada pada manusia yaitu H1N1, H3N2 dan H1N2 merupakan *enzootic* pada populasi babi di dunia (Van Reeth *et al.* 2009). Dalam Belshe (2009) disebutkan bahwa virus flu babi telah ada beredar dalam populasi babi selama lebih dari satu decade. Dalam Brown (2000) dan Fitzgerald (2009) disebutkan bahwa babi dapat terinfeksi oleh turunan-turunan virus influenza tipe A dari manusia maupun dari burung dan dalam hal ini dianggap sebagai inang sementara (*Intermediate hosts*) dari turunan-turunan virus flu babi yang berpotensi menyebabkan epidemi bahkan pandemi. Fitzgerald (2009) juga menyebutkan bahwa evolusi antigenik dari virus influenza pada babi terjadi dengan laju sekitar 6 kali lebih lambat dibandingkan dengan virus influenza pada manusia.

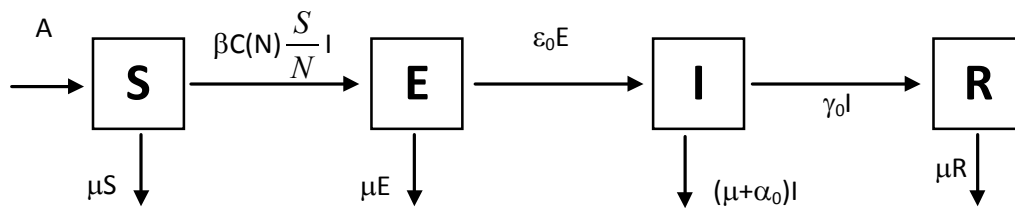
Dalam tulisan ini akan dikaji model yang sama tetapi kontak yang terjadi diperumum yaitu dengan menambahkan probabilitas suatu individu melakukan kontak yang dinyatakan sebagai suatu fungsi dari populasi ke dalam model tersebut. Selanjutnya akan dilihat perubahan terhadap nilai dan kestabilan titik ekuilibriumnya. Dalam Diekmann & Heesterbeek (2000) didefinisikan sebagai laju terjadinya infeksi sekunder yang disebabkan oleh infeksi primer tunggal dalam suatu populasi yang rentan secara keseluruhan.

Hasil dan Pembahasan

Beberapa fakta terkait dengan epidemi flu babi pada populasi babi dirujuk dari beberapa sumber. Dalam Syafriati (2005) disebutkan bahwa infeksi virus influenza babi dapat dengan cepat menyebar pada sekelompok ternak babi dan dengan cepat pula sembuh. Penyakit ini menyebar sangat cepat hampir 100% babi yang rentan terkena. Biasanya sembuh secara tiba-tiba pada hari ke 5-7 setelah gejala klinis. Pada saat terjadi wabah, dilaporkan adanya kenaikan kematian anak babi, fertilitas menurun, terjadi abortus pada kebuntingan tua yang dapat diikuti wabah penyakit pada kelompok ternak yang tidak kebal. Penyebaran virus influenza dari babi ke babi dapat melalui kontak moncong babi, melalui udara atau droplet. Masa inkubasi sering berkisar antara 1-2 hari, tetapi bisa 2-7 hari dengan rata-rata 4 hari. Terjadi tingkat kematian tinggi pada anak-anak babi yang dilahirkan dari induk babi yang tidak kebal dan terinfeksi pada waktu beberapa hari setelah dilahirkan. Anak-anak babi yang lahir dari induk yang terinfeksi pada saat bunting, akan terkena penyakit pada umur 2-5 hari setelah dilahirkan, sedangkan induk tetap memperlihatkan gejala klinis yang parah. Dalam Brown (2000) dan Fitzgerald (2009) disebutkan bahwa babi dapat terinfeksi oleh turunan-turunan virus influenza tipe A dari manusia maupun dari burung dan dalam hal ini dianggap sebagai inang sementara (*Intermediate hosts*) dari turunan-turunan virus flu babi yang berpotensi menyebabkan epidemi bahkan pandemi. Fitzgerald (2009) juga menyebutkan bahwa evolusi antigenik dari virus influenza pada babi terjadi dengan laju sekitar 6 kali lebih lambat dibandingkan dengan virus influenza pada manusia.

Model SEIR merupakan suatu model matematika untuk wabah penyakit yang mempunyai masa laten. Masa laten dalam Diekmann & Heesterbeek (2000) didefinisikan sebagai masa suatu individu telah terinfeksi oleh penyakit tetapi individu tersebut belum dapat menularkan penyakit kepada individu yang lain. Model matematika untuk kasus epidemi flu babi pada populasi babi menggunakan model epidemi SEIR dikarenakan masa inkubasi dan masa infeksi yang hampir sama lamanya yaitu masa inkubasi rata-rata 4 hari dan masa infeksi rata-rata 6 hari (Syafriati 2005).

Penyebaran suatu penyakit dipengaruhi oleh jumlah kasus baru tiap satuan waktu. Penyebaran ini berperan penting dalam mempelajari matematika epidemiologi. Bentuk



Gambar 1. Diagram transfer epidemi flu babi pada populasi babi

Tabel 1. Daftar variabel-variabel dalam model matematika

Variabel	Arti
$N(t)$: Ukuran populasi total saat
$S(t)$: Ukuran subpopulasi yang rentan terhadap infeksi virus saat
$E(t)$: Ukuran subpopulasi laten saat
$I(t)$: Ukuran subpopulasi terinfeksi saat
$R(t)$: Ukuran subpopulasi yang sembuh saat

Tabel 2. Daftar parameter-parameter dalam model matematika

Parameter	Arti
A	: laju rekrutmen
μ	: laju kematian alami
β	: probabilitas penularan penyakit di antara 2 individu yang melakukan kontak per satuan waktu
ϵ_0	: laju individu laten menjadi terinfeksi Ukuran subpopulasi laten saat
γ_0	: laju kesembuhan
α_0	: laju kematian karena infeksi

umum dari penularan penyakit yang tergantung dari ukuran populasi dituliskan $\beta C(N) \frac{S}{N} I$ dengan S dan I berturut-turut menyatakan jumlah individu yang *susceptible* dan *Infected* saat waktu t . β . probabilitas penularan penyakit di antara dua individu yang melakukan kontak per satuan waktu, dan $C(N)$ probabilitas dari suatu individu melakukan kontak tersebut (Thieme & Castillo-Chavez dalam Zhang & Ma 2003). $C(N)$ biasanya disebut laju kontak. $\beta C(N)$ adalah jumlah rata-rata kontak yang terpenuhi dari suatu individu tiap satuan waktu atau disebut juga laju kontak jenuh.

Heesterbeek dan Metz dalam Zhang & Ma (2003) menurunkan rumus laju kontak jenuh dalam populasi yang bermacam-macam sebagai berikut

$$C(N) = \frac{bN}{1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}} \quad (1)$$

dengan b adalah suatu konstanta positif

yang menyatakan laju kontak jenuh dari hubungan-hubungan perseorangan yang terjadi secara acak dalam sebuah populasi.

Jelas

$$\lim_{N \rightarrow 0} C(N) = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{bN}{1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}} = 0 = \lim_{N \rightarrow 0} bN \text{ dan}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{bN}{1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b}{\frac{1}{N} + b + \sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{2b}{N}}} = 1.$$

Jadi untuk nilai N yang kecil, $C(N) \approx N$ dan untuk nilai N yang besar, $C(N) \approx 1$. Dalam tulisan ini akan dikaji tentang model epidemi SEIR dengan rata-rata kontak jenuh $C(N)$ yang didefinisikan pada persamaan (1) dengan struktur populasi menggunakan rekrutmen dan kematian.

Asumsi-asumsi yang berlaku dalam pembentukan model ini meliputi: (1) laju rekrutmen konstan dan masuk ke kelas S , (2) laju kematian alami proporsional terhadap jumlah populasi (kematian alami terjadi di setiap kelas), (3) terjadi kematian karena penyakit, (4)

tidak ada proses karantina dan vaksinasi, (5) individu akan kebal setelah sembuh, (6) individu yang laten (pada *StageE*) tidak bisa menularkan penyakit, (7) setiap individu yang terinfeksi selalu melewati masa laten, (8) individu yang lahir dari induk yang sakit lebih rentan dari pada individu yang lahir dari induk yang sehat dan infeksi karena virus ini bukan penyakit turunan, (9) anak yang terinfeksi tidak dibedakan laju kesembuhannya dengan dewasa, dan (10) rentang waktu terjadinya epidemi lagi lebih lama dari pada rata-rata masa hidup babi sehingga babi yang telah sembuh tidak akan menghadapi epidemi lagi. Hal ini berakibat kekebalan yang diperoleh tidak bersifat sementara. Diagram transfer model epidemi ini diberikan pada Gambar 1.

Definisi variabel-variabel dan parameter-parameternya diberikan pada Tabel 1 dan Tabel 2. Nilai-nilai parameter pada Tabel 2 bernilai positif.

Model matematika dari diagram transfer pada Gambar 1 diberikan pada sistem (2) berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta C(N) \frac{S}{N} I - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \beta C(N) \frac{S}{N} I - (\varepsilon_0 + \mu) E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon_0 E - (\gamma_0 + \mu + \alpha_0) I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_0 I - \mu R \\ N = S + E + I + R \end{cases} \quad (2)$$

Misalkan $h(N) = 1 + bN + \sqrt{1 + 2bN}$.

Jadi $C(N) = \frac{bN}{h(N)}$ dan $\beta C(N) \frac{S}{N} I = \frac{\beta b S I}{h(N)}$.

Misalkan $c_0 = \beta b$, jadi $\beta C(N) \frac{S}{N} I = \frac{\beta b S I}{h(N)} = \frac{c_0 S I}{h(N)}$.

Jadi sistem (2) ekuivalen dengan sistem (3) berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS}{\mu dt} = \frac{A}{\mu} - \frac{c_0 S I}{\mu h(N)} - S \\ \frac{dE}{\mu dt} = \frac{c_0 S I}{\mu h(N)} - \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{\mu}\right) E \\ \frac{dI}{\mu dt} = \frac{\varepsilon_0}{\mu} E - \left(1 + \frac{\gamma_0}{\mu} + \frac{\alpha_0}{\mu}\right) I \\ \frac{dR}{\mu dt} = \frac{\gamma_0}{\mu} I - R \\ N = S + E + I + R \end{cases} \quad (3)$$

Misalkan $\mu dt = d\tau$, $c = \frac{c_0}{\mu}$, $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\mu}$, $\gamma = \frac{\gamma_0}{\mu}$.

dan $\alpha = \frac{\alpha_0}{\mu}$. Sistem (3) ekuivalen dengan sistem (4).

$$\begin{cases} \frac{dS}{d\tau} = \frac{A}{\mu} - \frac{c S I}{h(N)} - S \\ \frac{dE}{d\tau} = \frac{c S I}{h(N)} - (1 + \varepsilon) E \\ \frac{dI}{d\tau} = \varepsilon E - (1 + \gamma + \alpha) I \\ \frac{dR}{d\tau} = \gamma I - R \\ N = S + E + I + R \end{cases} \quad (4)$$

Dari sistem (4) diperoleh $\frac{dN}{d\tau} = \frac{A}{\mu} - N - \alpha I$

Jadi sistem (4) ekuivalen dengan sistem (5) berikut.

$$\begin{cases} \frac{dN}{d\tau} = \frac{A}{\mu} - N - \alpha I \\ \frac{dE}{d\tau} = \frac{c(N-E-I-R)I}{h(N)} - (1 + \varepsilon) E \\ \frac{dI}{d\tau} = \varepsilon E - (1 + \gamma + \alpha) I \\ \frac{dR}{d\tau} = \gamma I - R \end{cases} \quad (5)$$

Titik ekuilibrium N diperoleh saat

$$\frac{dN}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{\mu} - N - \alpha I = 0 \Leftrightarrow N = \frac{A}{\mu} - \alpha I$$

Jadi titik ekuilibrium N adalah $N_{eq} = \frac{A}{\mu} - \alpha I$. Saat $I = 0$ diperoleh titik ekuilibrium populasi bebas

penyakit adalah $N_{bp} = \frac{A}{\mu}$. Jadi nilai $N_{eq} \leq N_{bp} = \frac{A}{\mu}$.

Karena untuk $t \rightarrow \infty$ berlaku

$$N(t) \leq N_{eq} \leq \frac{A}{\mu}$$

maka domain sistem dapat kita batasi pada

$$\text{daerah } \Gamma = \{(N, E, I, R) \in R_+^4 : 0 \leq E + I + R \leq N \leq \frac{A}{\mu}\}$$

dengan R_+^4 menyatakan daerah non negatif di R^4 .

Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium diperoleh dengan

menjadikan $\frac{dN}{d\tau}$, $\frac{dE}{d\tau}$, $\frac{dI}{d\tau}$, dan $\frac{dR}{d\tau}$ sama dengan nol sehingga diperoleh sistem (6) berikut

$$\begin{cases} \frac{A}{\mu} - N - \alpha I = 0 \\ \frac{c(N-E-I-R)I}{h(N)} - (1 + \varepsilon) E = 0 \\ \varepsilon E - (1 + \gamma + \alpha) I = 0 \\ \gamma I - R = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Teorema yang berkaitan dengan eksistensi titik ekuilibrium diberikan teorema 1.

Teorema 1

$$R_0 = \frac{A\alpha\varepsilon}{\mu\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right)}$$

Misalkan dengan $\delta=1+\gamma+\alpha$ dan $\omega=1+\varepsilon$.

Jika $R_0 \leq 1$ maka sistem (5) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (N, E, I, R) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right)$.

Jika $R_0 > 1$ maka sistem (5) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit P_0 dan titik ekuilibrium endemik $P_1 = (N^*, E^*, I^*, R^*)$ dengan

$I^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{A}{\mu} - N^*\right)$, $E^* = \frac{\delta}{\alpha\varepsilon} \left(\frac{A}{\mu} - N^*\right)$, $R^* = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{A}{\mu} - N^*\right)$ dan N^* penyelesaian dari persamaan

$$(c - \alpha b)\delta\omega N - \left[c(\delta\omega - \varepsilon\alpha)\frac{A}{\mu} + \alpha\delta\omega\right] - \alpha\delta\omega\sqrt{1+2bN} = 0$$

Bukti:

Dari sistem (6), jika $I = 0$ diperoleh $N = \frac{A}{\mu}$ dan $E = R = 0$. Diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (N, E, I, R) = \left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right)$.

Eksistensi dari titik ekuilibrium P_0 tidak dipengaruhi oleh nilai dari R_0 . Jadi untuk segala kondisi R_0 , titik ekuilibrium ini pasti ada.

Dari persamaan ketiga sistem (6) diperoleh $E = \left(\frac{1+\alpha+\gamma}{\varepsilon}\right)I$, substitusikan ke persamaan kedua sistem (6) didapat

$$c(N - E - I - R) = \frac{\delta\omega}{\varepsilon} h(N) \quad (7)$$

Substitusikan persamaan pertama, ketiga, dan keempat dari sistem (6) ke $N - E - I - R$, diperoleh $N - E - I - R = \frac{A}{\mu} - I \left(\frac{\delta\omega}{\varepsilon}\right)$. Substitusikan ke persamaan (7) diperoleh $I = \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega} - \frac{1}{c} h(N)$

Syarat titik ekuilibrium endemik adalah $I > 0$.

Jadi

$$\frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega} - \frac{1}{c} h(N) > 0 \Leftrightarrow \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega} > \frac{1}{c} h(N) \Leftrightarrow h(N) < \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega}$$

$$\Leftrightarrow \sup h(N) < \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega} \Leftrightarrow h\left(\frac{A}{\mu}\right) < \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega} \Leftrightarrow 1 < \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right)}$$

$$R_0 = \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right)}$$

Didefinisikan

Jadi titik ekuilibrium endemik ada saat $R_0 > 1$.

Pencarian titik ekuilibrium endemik hanya dilakukan saat $R_0 > 1$.

Substitusikan persamaan $\delta=1+\gamma+\alpha$ dan $\omega=1+\varepsilon$ ke sistem (6), kemudian ganti persamaan kedua dalam sistem (6) dengan persamaan (7), diperoleh sistem (8) berikut.

$$\begin{cases} \frac{A}{\mu} - N = \alpha I \\ c\varepsilon(N - E - I - R) = \delta\omega h(N) \\ \varepsilon E = \delta I \\ R = \gamma I \end{cases} \quad (8)$$

Dari sistem (8) diperoleh

$$I = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{A}{\mu} - N\right), E = \frac{\delta}{\alpha\varepsilon} \left(\frac{A}{\mu} - N\right) \text{ dan } R = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{A}{\mu} - N\right)$$

Substitusikan ke persamaan kedua dari sistem (8), diperoleh

$$c \left[\omega\delta N - \frac{A}{\mu} (\omega\delta - \varepsilon\alpha) \right] - \alpha\delta\omega h(N) = 0$$

Karena $h(N) = 1 + bN + \sqrt{1+2bN}$, maka persamaan di atas menjadi:

$$c \left[\omega\delta N - \frac{A}{\mu} (\omega\delta - \varepsilon\alpha) \right] - \alpha\delta\omega (1 + bN + \sqrt{1+2bN}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - \alpha b)\delta\omega N - \left[c(\delta\omega - \varepsilon\alpha)\frac{A}{\mu} + \alpha\delta\omega \right] - \alpha\delta\omega\sqrt{1+2bN} = 0$$

Didefinisikan $F: \left[0, \frac{A}{\mu}\right] \rightarrow R$ dengan

$$F(N) = (c - \alpha b)\delta\omega N - \left[c(\delta\omega - \varepsilon\alpha)\frac{A}{\mu} + \alpha\delta\omega \right] - \alpha\delta\omega\sqrt{1+2bN}$$

Jelas

$$R_0 = \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right)} = \frac{A\varepsilon}{\mu\delta\omega \left(1 + b\frac{A}{\mu} + \sqrt{1+2b\frac{A}{\mu}}\right)} = \frac{A\varepsilon}{(1+\alpha+\gamma)(1+\varepsilon) \left(\mu + bA + \mu\sqrt{1+2b\frac{A}{\mu}}\right)}$$

Karena

$$0 < \alpha\varepsilon bA \leq (1 + \alpha + \gamma)(1 + \varepsilon) \left(\mu + bA + \mu\sqrt{1+2b\frac{A}{\mu}}\right)$$

berakibat

$$\frac{1}{(1 + \alpha + \gamma)(1 + \varepsilon) \left(\mu + bA + \mu\sqrt{1+2b\frac{A}{\mu}}\right)} \leq \frac{1}{\alpha\varepsilon bA}$$

Jadi

$$R_0 = \frac{A\varepsilon}{(1 + \alpha + \gamma)(1 + \varepsilon) \left(\mu + bA + \mu\sqrt{1+2b\frac{A}{\mu}}\right)} \leq \frac{A\varepsilon}{\alpha\varepsilon bA} = \frac{c}{\alpha b}$$

Karena $R_0 > 1$, maka $\alpha - \alpha b > 0$.

Jelas $F(0) = - \left[c(\delta\omega - \varepsilon\alpha)\frac{A}{\mu} + \alpha\delta\omega \right] - \alpha\delta\omega < 0$ dan

$$F\left(\frac{A}{\mu}\right) = (c - \alpha b)\delta\omega\frac{A}{\mu} - \left[c(\delta\omega - \varepsilon\alpha)\frac{A}{\mu} + \alpha\delta\omega \right] - \alpha\delta\omega\sqrt{1+2b\frac{A}{\mu}}$$

$$= c\varepsilon\alpha\frac{A}{\mu} - \alpha\delta\omega \left(1 + b\frac{A}{\mu} + \sqrt{1+2b\frac{A}{\mu}} \right) = c\varepsilon\alpha\frac{A}{\mu} - \alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right)$$

$$= \alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right) \frac{c\varepsilon\alpha A}{\mu\alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right)} - \alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right) = \alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right) \left[\frac{c\varepsilon\alpha A}{\mu\alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right)} - 1 \right] = \alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right) (R_0 - 1)$$

Karena $R_0 > 1$, maka $F\left(\frac{A}{\mu}\right) = \alpha\delta\omega h\left(\frac{A}{\mu}\right) (R_0 - 1) > 0$.

Jelas F terdiferensiabel tingkat pertama pada $\left[0, \frac{A}{\mu}\right]$ sehingga F kontinu pada $\left[0, \frac{A}{\mu}\right]$, karena $F(0) < 0$ dan $F\left(\frac{A}{\mu}\right) > 0$ maka berdasarkan teorema nilai antara (Bartle & Shebert 1994), ada paling sedikit satu $N^* \in \left[0, \frac{A}{\mu}\right]$ sehingga $F(N^*) = 0$.

Ditunjukkan $N^* \in \left[0, \frac{A}{\mu}\right]$ tersebut tunggal.

Jelas

$$\frac{dF(N)}{dN} = \frac{d}{dN} \left[(c - \alpha b)\delta\omega N - \left[c(\delta\omega - \varepsilon\alpha)\frac{A}{\mu} + \alpha\delta\omega \right] - \alpha\delta\omega\sqrt{1+2bN} \right]$$

$$= (c - \alpha b)\delta\omega - \frac{\alpha\delta\omega b}{\sqrt{1+2bN}} = \delta\omega \left[(c - \alpha b) - \frac{\alpha b}{\sqrt{1+2bN}} \right]$$

Jadi

$$\frac{dF(N)}{dN} < 0 \Leftrightarrow \delta\omega \left[(c-ab) - \frac{ab}{\sqrt{1+2bN}} \right] < 0 \Leftrightarrow (c-ab) < \frac{ab}{\sqrt{1+2bN}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{1+2bN} < \frac{ab}{c-ab} \Leftrightarrow 1+2bN < \frac{(ab)^2}{(c-ab)^2} \Leftrightarrow 2bN < \frac{(ab)^2}{(c-ab)^2} - 1 \Leftrightarrow N < \frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}$$

Dengan cara serupa diperoleh

$$\frac{dF(N)}{dN} > 0 \Leftrightarrow N > \frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}$$

Jadi grafik F turun saat $N < \frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}$ dan naik saat $N > \frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}$

Jelas $\frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2} < \frac{A}{\mu}$ karena kalau tidak maka kontradiksi dengan $F(\frac{A}{\mu}) > 0$.

Karena $F(0) < 0$ dan grafik F monoton turun saat $N < \frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}$, maka untuk setiap nilai-nilai $N \in [0, \frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}]$, $F(N) \neq 0$. Karena grafik F monoton naik saat $N > \frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}$ dan untuk setiap $N \in [\frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}, \frac{A}{\mu}]$, $F(N) \neq 0$, maka $N^* \in (\frac{c(2ab-c)}{2b(c-ab)^2}, \frac{A}{\mu})$, dengan $F(N^*) = 0$ dan N^* tersebut tunggal. Ketunggalan N^* dijamin oleh kemonotonan grafik F .

Jadi dapat disimpulkan untuk $R_0 > 1$, terdapat dengan tunggal titik ekuilibrium endemik $P_1 = (N^*, E^*, I^*, R^*)$

dengan $I^* = \frac{1}{\alpha}(\frac{A}{\mu} - N^*)$, $E^* = \frac{\delta}{\alpha\epsilon}(\frac{A}{\mu} - N^*)$, $R^* = \frac{\gamma}{\alpha}(\frac{A}{\mu} - N^*)$, dan N^* penyelesaian dari persamaan $(c-ab)\delta\omega N - [c(\delta\omega - \epsilon\alpha)\frac{A}{\mu} + \alpha\delta\omega] - \alpha\delta\omega\sqrt{1+2bN} = 0$

Kestabilan Titik Ekuilibrium

Ditunjukkan $C(N) = \frac{bN}{1+bN+\sqrt{1+2bN}}$, fungsi yang tidak turun

Jelas

$$\frac{dC(N)}{dN} = \frac{d(\frac{bN}{1+bN+\sqrt{1+2bN}})}{dN} = \frac{b}{(1+bN+\sqrt{1+2bN})\sqrt{1+2bN}}$$

Karena $b > 0$ maka $\frac{dC(N)}{dN} > 0 \forall N \in [0, \frac{A}{\mu}]$.

Jadi $C(N)$ tidak turun, berarti untuk setiap $N \leq \frac{A}{\mu}$ berlaku $0 \leq C(N) \leq C(\frac{A}{\mu})$ berakibat $0 \leq \frac{C(N)}{C(\frac{A}{\mu})} \leq 1$.

Teorema 2

Misalkan $R_0 = \frac{A\alpha\epsilon}{\mu\delta\omega h(\frac{A}{\mu})}$ dengan $\delta = 1 + \gamma + \alpha$ dan $\omega = 1 + \epsilon$.

Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas

$P_0 = (N, E, I, R) = (\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$ penyakit stabil

asimtotik lokal.

Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit P_0 tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik P_1 stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Jelas matriks jacobian dari sistem (5) adalah sebagai berikut.

$$J(N, E, I, R) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha & 0 \\ \rho & \frac{-cI}{h(N)} - (1 + \epsilon) & \frac{c(N - E - R - 2I)}{h(N)} & \frac{-cI}{h(N)} \\ 0 & \epsilon & -(1 + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha & 0 \\ \rho & \frac{-cI}{h(N)} - \omega & \frac{c(N - E - R - 2I)}{h(N)} & \frac{-cI}{h(N)} \\ 0 & \epsilon & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{cI}{h(N)\sqrt{1+2bN}} + \frac{cbI(E+I+R)}{h^2(N)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2bN}} \right)$$

dengan

[B1] Untuk P_0 , matrik jacobian adalah

$$J\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\omega & \frac{cA}{\mu} & 0 \\ 0 & \epsilon & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\omega & \mu h\left(\frac{A}{\mu}\right) & 0 \\ 0 & \epsilon & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$$

Karena hanya ada satu nilai tak nol pada kolom pertama dan keempat, dan keduanya bernilai negatif, maka kita dapat memeriksa apakah nilai-nilai eigen dari matriks $J\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ mempunyai bagian real negatif dengan memeriksa matriks 2×2 yang merupakan blok dari matriks $J\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ (Anton 1991). Matriks 2×2 tersebut adalah

$$J_{01} = \begin{pmatrix} -\omega & \frac{cA}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)} \\ \epsilon & -\delta \end{pmatrix}$$

Jelas $\text{tr}(J_{01}) = -(\omega + \delta) < 0$ dan

$$\det(J_{01}) = \delta\omega - \frac{c\epsilon A}{\mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)} = \delta\omega \left[1 - \frac{c\epsilon A}{\delta\omega \mu h\left(\frac{A}{\mu}\right)} \right] = \delta\omega(1 - R_0)$$

Jadi $\det(J_{01}) > 0$ dipenuhi saat $R_0 < 1$.

Jadi nilai eigen matriks $J\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ semuanya mempunyai bagian real negatif saat $R_0 < 1$ dan ada minimal satu nilai eigen matriks $J\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ yang mempunyai bagian real positif saat $R_0 > 1$

Jadi titik ekuilibrium P_0 stabil asimtotik lokal saat $R_0 < 1$ dan tidak stabil saat $R_0 > 1$.

[B2] Dibuktikan untuk $R_0 > 1$, titik ekuilibrium endemik P_1 stabil asimtotik lokal

Matrik Jacobian titik P_1 adalah

$$J(N^*, E^*, I^*, R^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha & 0 \\ \rho^* & \frac{-cI^*}{h(N^*)} - \omega & \frac{c(N^* - E^* - R^* - 2I^*)}{h(N^*)} & \frac{-cI^*}{h(N^*)} \\ 0 & \epsilon & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha & 0 \\ \rho^* & \frac{-cI^*}{h(N^*)} - \omega & \frac{c(N^* - E^* - R^* - 2I^*)}{h(N^*)} & \frac{-cI^*}{h(N^*)} \\ 0 & \epsilon & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (7) diperoleh

$$J(N^*, E^*, I^*, R^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha & 0 \\ \rho^* & \frac{-cI^*}{h(N^*)} - \omega & \frac{\delta\omega}{\varepsilon} - \frac{cI^*}{h(N^*)} & \frac{-cI^*}{h(N^*)} \\ 0 & \varepsilon & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -1 \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{cI^*}{h(N^*)\sqrt{1+2bN^*}} + \frac{cbI^*(E^*+I^*+R^*)}{h^2(N^*)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2bN^*}}\right) \\ &\leq \frac{cI^*}{h(N^*)} + \frac{2cbI^*(E^*+I^*+R^*)}{h^2(N^*)} \\ &\leq \frac{cI^*}{h(N^*)} + \frac{2cI^*}{h(N^*)} \frac{bN^*}{h(N^*)} \\ &\leq \frac{3cI^*}{h(N^*)}. \end{aligned}$$

Dicari persamaan karakteristik $J(N^*, E^*, I^*, R^*) = J^*$:
Misalkan $J(N^*, E^*, I^*, R^*) = J^*$.

Jelas

$$\det(\lambda I - J^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & \frac{\alpha}{h(N^*)} - \frac{\delta\omega}{\varepsilon} & \frac{-cI^*}{h(N^*)} \\ -\rho^* & \lambda + \frac{cI^*}{h(N^*)} + \omega & \frac{cI^*}{h(N^*)} - \frac{\delta\omega}{\varepsilon} & \frac{-cI^*}{h(N^*)} \\ 0 & \varepsilon & \lambda + \delta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik untuk $J(N^*, E^*, I^*, R^*) = J^*$ adalah

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\lambda + 1) \left((\lambda + 1) \left(\frac{cI^*}{h(N^*)} - \frac{\delta\omega}{\varepsilon} \right) + \alpha \rho \right) + (\lambda + 1)^2 (\lambda + \delta) \left(\lambda + \omega + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right) - \frac{\varepsilon c \gamma (\lambda + 1)}{h(N^*)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1) \left[\varepsilon \left((\lambda + 1) \left(\frac{cI^*}{h(N^*)} - \frac{\delta\omega}{\varepsilon} \right) + \alpha \rho \right) + (\lambda + 1)(\lambda + \delta) \left(\lambda + \omega + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right) - \frac{\varepsilon c \gamma}{h(N^*)} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1) = 0 \vee \left[\varepsilon \left((\lambda + 1) \left(\frac{cI^*}{h(N^*)} - \frac{\delta\omega}{\varepsilon} \right) + \alpha \rho \right) + (\lambda + 1)(\lambda + \delta) \left(\lambda + \omega + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right) - \frac{\varepsilon c \gamma}{h(N^*)} \right] = 0 \end{aligned}$$

Jelas persamaan $\lambda + 1 = 0$ menghasilkan nilai eigen $\lambda = -1 < 0$.

Jadi akan diperiksa persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left((\lambda + 1) \left(\frac{cI^*}{h(N^*)} - \frac{\delta\omega}{\varepsilon} \right) + \alpha \rho \right) + (\lambda + 1)(\lambda + \delta) \left(\lambda + \omega + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right) - \frac{\varepsilon c \gamma}{h(N^*)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \end{aligned}$$

dengan

$$a_1 = (\delta + \omega) + \left[1 + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right] > 0, a_2 = (\delta + \omega) + \left[1 + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right] > 0, \text{ dan}$$

$$a_3 = \frac{cI^*}{h(N^*)} (\delta + \varepsilon \gamma + \varepsilon) + \alpha \varepsilon \rho^* > 0$$

Jelas

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &\geq (\delta + \omega)^2 \left[1 + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right] + (\delta + \omega) \left[1 + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right] - \frac{3cI^*}{h(N^*)} \alpha \varepsilon - \frac{aI^*}{h(N^*)} (\delta + \varepsilon \gamma + \varepsilon) \\ &= (\delta + \omega)^2 + (\delta + \omega) \left[1 + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right] + \frac{cI^*}{h(N^*)} [(\delta + \omega)^2 - 3\alpha \varepsilon - \delta - \varepsilon \gamma - \varepsilon] \\ &\geq (\delta + \omega)^2 + (\delta + \omega) \left[1 + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right] + \frac{cI^*}{h(N^*)} (4\delta \omega - 3\alpha \varepsilon - \delta - \varepsilon \gamma - \varepsilon) \\ &= (\delta + \omega)^2 + (\delta + \omega) \left[1 + \frac{cI^*}{h(N^*)} \right] + \frac{cI^*}{h(N^*)} (3\delta \omega - 2\alpha \varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Jadi berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz (Olsder 1994) titik ekuilibrium endemik P_1 stabil asimtotik lokal saat $R_0 > 1$.

Penutup

Dari pembahasan di atas diperoleh beberapa kesimpulan yaitu saat wabah epidemi flu babi akan hilang dengan jumlah orang yang terinfeksi pada awalnya tidak dibatasi dan saat dengan kondisi tertentu epidemi flu babi tidak hilang dalam artian masih ada orang yang terinfeksi. Saran yang dapat diberikan adalah adanya penelitian lanjutan yang berkaitannya dengan wabah yang terjadi pada populasi manusia.

Daftar Pustaka

- Anton H. 1991. Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangga
- Bartle RG & Shebert DR. 1994. *Introduction to Real Analysis, second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc
- Belshe RB. 2009. Implications of the Emergence of a Novel H1 Influenza Virus. *N Engl J Med* 360(25): 2667-2668
- Brown IH. 2000. The Epidemiology and Evolution of Influenza Viruses in Pigs. *Veterinary Microbiology* 74: 29-46
- Diekmann O & Heesterbeek JAP. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases, Mathematical and Computational Biology*. Chichester: Wiley
- Fitzgerald DA. 2009. Human Swine Influenza A [H1N1]: Practical Advice for Clinicians Early in the Pandemic. *Paediatric Respiratory Reviews* 10: 154-158
- Fraser C, Donnelly AC, Cauchemez S, Hanage WP, Van Kerkh MD, Hollingsworth D, Griffin J, Baggaley RF, Jenkins HE, Lyons EJ, Jombart T, Hinsley RW, Grassly NC, Balloux B, Ghani AC, Ferguson NM, Rambaut A, Pybus OG, Lopez-Gatell H, Alpuche-Aranda CM, Chapela LB, Zavala EP, Guevara DM, Checchi F, Garcia E, Hugonnet S, & Roth C. 2009. Pandemic Potential of a Strain of Influenza A (H1N1): Early Findings. *Science* 324: 1557-1561
- Olsder G J. 1994 *Mathematical Systems Theory*. Delftse Uitgevers Maatschappij b.v
- Syafriati T. 2005. *Mengenal Penyakit Influenza Babi*. Prosiding Lokakarya Nasional Penyakit Zoonosis Bogor, 15 September 2005: 102-109
- Van Reeth K, Braeckmans D, Cox E, Van Borm S, van den Berg T, Goddeeris B, & De Vleeschauwer A. 2009. Prior Infection with an H1N1 Swine Influenza Virus Partially Protects Pigs Against a Low Pathogenic H5N1 Avian Influenza Virus. *Vaccine* 27: 6330-6339
- Zhang J & Ma Z. 2003. Global dynamic of an SEIR epidemic model with saturating contact rate, *Mathematical Biosciences* :15-23