Jurnal MIPA 39 (2) (2016): 164-170

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

SIFAT-SIFAT REPRESENTASI *QUIVER* SEDERHANA

VY Kurniawan ✉

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Sebelas Maret, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2016
Disetujui September 2016
Dipublikasikan Oktober 2016

Keywords:
generator; semigroup; Airy equation

Abstrak

Graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan 4-*tupel* yang terdiri dari dua himpunan serta dua pemetaan dan disebut sebagai *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. Untuk suatu *quiver* Q dapat didefinisikan representasi *quiver* $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$. Representasi *quiver* merupakan penempatan ruang vektor pada setiap titik-titik dari *quiver* Q dan pemetaan linier pada setiap panah-panahnya. Sebuah representasi yang tidak memiliki subrepresentasi sejati selain nol disebut sebagai representasi sederhana. Pada makalah ini, dipelajari sifat-sifat dari suatu representasi *quiver* sederahana. Selanjutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menyelidiki syarat perlu dan cukup dari suatu representasi sederhana.

Abstract

A directed graph can be viewed as a 4-tuple $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ where Q_0, Q_1 are finite sets of vertices and arrows respectively, and s, t are two maps from Q_1 to Q_0. A directed graph is often called a quiver. For a quiver Q, we can define a quiver representation $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$. A representation of a quiver Q is an assignment of a vector space to each vertex and a linear mapping to each arrow. A representation which has no proper subrepresentation except zero is called a simple representation. In this paper, we study the properties of a simple representation of quiver. These properties will be used to investigate the necessary and sufficient condition of a simple representation of quiver.

✉ Alamat korespondensi:
Jalan Ir. Sutami No. 36A, Jebres, Kota Surakarta, Jawa Tengah 57126,

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Studi tentang representasi *quiver* telah dimulai pada awal tahun tujuh puluhan. Barot (2006) menyebutkan, saat ini telah ditemukan sejumlah hubungan yang erat antara representasi *quiver* dengan topik aljabar yang lain, khususnya aljabar Lie, aljabar Hall dan grup kuantum dan baru-baru ini adalah aljabar cluster. Pada kajian mutakhir tentang teori persistensi bahkan ada yang menunjukkan kegunaan representasi *quiver* untuk bidang analisis data, salah satunya yang ditulis oleh Steve (2015). Oleh karena itu, banyak peneliti mencoba mengembangkan teori representasi *quiver* ini, antara lain Weist (2015), David (2015), dan Riedtmann (2016).

Berbicara tentang representasi *quiver* tentunya tidak lepas dari graf berarah. Graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan 4-*tupel* yang terdiri dari dua himpunan serta dua pemetaan dan disebut sebagai *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. Himpunan yang dimaksud adalah himpunan titik Q_0 dan himpunan panah Q_1. Sementara kedua pemetaannya adalah pemetaan dari himpunan panah ke himpunan titik, yaitu $s, t : Q_1 \to Q_0$, dimana $s(\alpha) \in Q_0$ disebut sebagai sumber dari panah $\alpha \in Q_1$ dan $t(\alpha) \in Q_0$ disebut sebagai target dari panah $\alpha \in Q_1$. Representasi dari *quiver* Q didefinisikan sebagai suatu penempatan ruang vektor pada setiap titik-titik dari *quiver* Q dan pemetaan linier antara ruang vektor pada setiap panah-panahnya dan dinotasikan dengan $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$. Representasi $\mathcal{S} = (W_i, g_\alpha)$ disebut sebagai subrepresentasi dari $\mathcal{R}$ jika untuk setiap $i \in Q_0$, W_i adalah subruang dari V_i, dan untuk setiap $\alpha \in Q_1$, pemetaan linier $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ yang dibatasi pada $W_{s(\alpha)}$ merupakan pemetaan yang sama dengan $g_\alpha : W_{s(\alpha)} \to W_{t(\alpha)}$. Suatu representasi yang tidak memiliki subrepresentasi sejati selain nol disebut sebagai representasi sederhana. Pada makalah ini, dipelajari sifat-sifat dari suatu representasi *quiver* sederahana. Selanjutnya sifat-sifat tersebut digunakan untuk menyelidiki syarat perlu dan cukup dari suatu representasi sederhana.

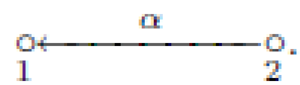
Representasi *Quiver* dan Morfisma Representasi

Pada bagian ini akan diberikan pengertian beserta contoh dari representasi *quiver* dan isomorfisma representasi.

Definisi 1 (Derksen & Weyman 2005). ***Representasi*** *$\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ dari quiver Q adalah himpunan ruang vektor $\{V_i \mid i \in Q_0\}$ bersama dengan himpunan pemetaan linier $\{f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)} \mid \alpha \in Q_1\}$, dimana Q_0 dan Q_1 merupakan himpunan titik dan himpunan panah dari Q.*

Untuk lebih memahami definisi dari representasi *quiver*, berikut akan diberikan contohnya.

Contoh 1. Diberikan *quiver* Q dengan dua buah titik dan sebuah panah yang menghubungkan kedua titik tersebut seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. *Quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah

Salah satu representasi dari *quiver* Q adalah $R = (V_i, f_\alpha)$ dimana $V_1 = K^n$, $V_2 = K^m$, dan $f_\alpha = A_{n\times m}$ dengan $A_{n\times m}$ adalah matriks berukuran $n \times m$.

Setelah memahami pengertian dari representasi *quiver*, selanjutnya akan dibahas tentang morfisma representasi. Gagasan tentang morfisma muncul sebagai suatu generalisasi dari isomorfisma, dimana syarat bijektifitas dihilangkan. Morfisma dari representasi V ke representasi W (yang keduanya dari suatu *quiver* yang sama) merupakan keluarga pemetaan linier $\varphi_i : V_i \to W_i$ dengan $i \in Q_0$ seperti yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2 (Barot: 2006). *Diberikan dua buah representasi dari quiver Q yaitu $V = (V_i, f_\alpha)$ dan $W = (W_i, g_\alpha)$.* ***Morfisma representasi*** *$\varphi : V \to W$ adalah koleksi pemetaan linier $\{\varphi_i : V_i \to W_i | i \in Q_0\}$ sedemikian hingga diagram berikut*

$$
\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "\varphi_{t(\alpha)}"] \\
W_{s(\alpha)} \arrow[r, "g_\alpha"'] & W_{s(\alpha)}
\end{tikzcd}
$$

*berlaku komutatif untuk semua $\alpha \in Q_1$, atau dengan kata lain $\varphi_{t(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \varphi_{s(\alpha)}$. Lebih jauh, jika φ_i punya invers untuk setiap $i \in Q_0$, maka morfisma φ disebut **isomorfisma**. Selanjutnya, representasi V dan W dikatakan **isomorfis**.*

Untuk lebih memahami definisi dari morfisma representasi, berikut akan diberikan sebuah contoh.

Contoh 2. Diberikan *quiver* Q dengan sebuah titik dan sebuah loop seperti pada Gambar 2.

Gambar 2. *Quiver* dengan sebuah titik dan sebuah loop

Untuk setiap bilangan bulat positif n dan matriks persegi M berukuran $n \times n$ dapat didefinisikan sebuah representasi *quiver* $V^M = (V_1^M, f_\alpha)$ dengan $V_1^M = K^n$ dan $f_\alpha = M$.

Didefinisikan dua buah representasi dari *quiver* di atas yaitu $V^A = (K^n, A)$ dan $V^B = (K^n, B)$. Jelas bahwa A dan B adalah matriks berukuran $n \times n$. Dari sini dapat didefinisikan morfisma representasi $\varphi : V^A \to V^B$ dengan pemetaan linier $\varphi_1 = K^n \to K^n$ sehingga $\varphi_1 A = B \varphi_1$.

Selanjutnya, jika pemetaan linier φ_1 punya invers maka berlaku $\varphi_1 A \varphi_1^{-1} = B$ dan representasi V^A dan V^B isomorfis. Dengan kata lain, V^A dan V^B isomorfis jika dan hanya jika A dan B saling konjugasi.

Representasi Sederhana

Sebelum membahas tentang representasi sederhana, berikut akan diberikan terlebih dahulu definisi dari subrepresentasi yang akan dipakai dalam mendefinisikan representasi sederhana (*simple representation*).

Definisi 3 (Brion: 2008). *Diberikan $\mathcal{R} = (V_i, f_\alpha)$ merupakan representasi dari quiver Q. Representasi $\mathcal{S} = (W_i, g_\alpha)$ disebut sebagai **subrepresentasi** dari $\mathcal{R}$ jika :*

(i) Untuk setiap $i \in Q_0$, W_i adalah subruang dari V_i, dan

(ii) Untuk setiap $\alpha \in Q_1$, pemetaan linier $g_\alpha : W_{s(\alpha)} \to W_{t(\alpha)}$ merupakan pemetaan yang sama dengan $f_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$ yang dibatasi pada $W_{s(\alpha)}$.

Berikut diberikan sebuah contoh subrepresentasi.

Contoh 3. Diberikan *quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah yang menghubungkan kedua titik seperti pada Gambar 2.

$$1 \circ \xrightarrow{\quad a \quad} \circ\, 2$$

Gambar 3. *Quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah

Selanjutnya didefinisikan representasi $R = (V_i, f_a)$ dari Q dengan $V_1 = K$, $V_2 = K$ dan $f_a = i$ yang merupakan pemetaan identitas. Representasi R dapat digambarkan sebagai berikut.

$$R : \quad K \xrightarrow{\quad f_a = i \quad} K$$

Salah satu subrepresentasi dari R adalah $S = (W_i, g_a)$ dengan $W_1 = 0$, $W_2 = K$, dan pemetaan $g_a = 0$. Jelas bahwa W_1 merupakan subruang dari V_1, dan W_2 subruang dari W_2. Sedangkan pemetaan $g_a = 0$ sama dengan $f_a = i$ yang dibatasi pada $W_1 = 0$. Subrepresentasi S dapat digambarkan digambarkan sebagai berikut..

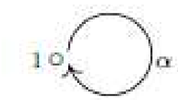
$$S : \quad 0 \xrightarrow{\quad g_a = 0 \quad} K \ .$$

Tidak semua representasi $\mathcal{R}$ memiliki subrepresentasi selain nol dan $\mathcal{R}$ sendiri. Representasi yang demikian disebut sebagai representasi sederhana (*simple representation*) yang definisinya diberikan sebagai berikut.

Definisi 4 (Brion: 2008). *Sebuah representasi tak nol $\mathcal{R}$ disebut* ***representasi sederhana*** *jika subrepresentasi dari $\mathcal{R}$ hanyalah representasi nol dan $\mathcal{R}$ itu sendiri.*

Untuk lebih memahami pengertian dari representasi sederhana, selanjutnya akan diberikan beberapa contoh dan sifat dari representasi sederhana. Contoh yang paling sederhana adalah *quiver* dengan sebuah titik dan sebuah loop. Representasi dari *quiver* yang demikian merupakan representasi sederhana jika dan hanya jika titik tunggalnya direpresentasikan sebagai ruang vektor berdimensi satu. Berikut akan diberikan lemma yang menjelaskan hal tersebut.

Lemma 5. *Diberikan quiver Q dengan sebuah titik dan sebuah loop seperti pada gambar berikut*



Representasi V dari quiver Q sederhana jika dan hanya jika V_1 berdimensi satu.

Bukti

($\Longrightarrow$) Diketahui $V = (V_1, f_\alpha)$ representasi sederhana, berarti V tidak memiliki subrepresentasi lain selain representasi nol dan V sendiri. Andaikan V_1 berdimensi lebih dari satu, maka V_1 mempunyai subruang sejati. Diambil salah satu subruang berdimensi satu dari V_1 yaitu W, maka dapat dibentuk subrepresentasi dari V yaitu $S = (W, g = f|_W)$. Terjadi kontradiksi, sehingga terbukti bahwa V_1 berdimensi satu.

($\Longleftarrow$) Diketahui V_1 berdimensi satu, maka V_1 tidak punya subruang selain 0 dan V_1 sendiri. Dengan demikian subrepresentasi dari V hanyalah representasi nol dan V sendiri. Jadi, terbukti bahwa V merupakan representasi sederhana. ■

Contoh yang berikutnya adalah *quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah tanpa ada siklus ataupun loop.

Contoh 4. Diberikan *quiver* dengan dua buah titik dan sebuah panah yang menghubungkan kedua titik seperti pada gambar berikut

$$1 \circ \xrightarrow{\quad a \quad} \circ\, 2$$

Representasi sederhana dari Q adalah

$$E_1 : K \xrightarrow{f_\alpha = 0} 0 \qquad \text{dan} \qquad E_2 : 0 \xrightarrow{f_\alpha = 0} K$$

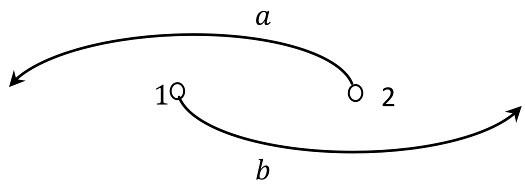
Jelas bahwa representasi E_1 dan E_2 merupakan representasi sederhana, karena K hanya memiliki subruang K dan 0 sehingga subrepresentasi dari E_1 dan E_2 hanyalah representasi nol dan dirinya sendiri.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa representasi sederhana dari Q hanya E_1 dan E_2, atau dengan kata lain representasi selain E_1 dan E_2 bukan merupakan representasi sederhana dari Q. Diambil sebarang` representasi $V = (V_i, f_\alpha)$ selain E_1 dan E_2, berarti ada dua kemungkinan sebagai berikut

i) Salah satu dari V_i berdimensi lebih dari satu dan yang lain $V_i = 0$. Beri label x pada titik dengan $V_x \neq 0$. Dapat didefinisikan subrepresentasi $W = (W_i, g_\alpha)$ dengan W_x adalah subruang berdimensi satu dari V_x dan $g_\alpha = f_\alpha|_{s(\alpha)}$. Dengan demikian V bukanlah representasi sederhana karena memiliki subrepresentasi sejati selain nol yaitu W.
ii) Kedua V_i (V_1 dan V_2) tidak nol. Dapat didefinisikan subrepresentasi $W = (W_i, g_\alpha)$ dengan $W_1 = 0$, $W_2 = V_2$, dan $g_\alpha = 0$. Dengan demikian V bukanlah representasi sederhana karena memiliki subrepresentasi sejati selain nol yaitu W.

Untuk mengetahui perbedaan sifat representasi dari suatu *quiver* yang memiliki siklus, berikut akan diberikan *quiver* yang sama-sama memiliki dua buah titik. Perbedaannya dari contoh sebelumnya, pada *quiver* ini terdapat sebuah siklus.

Contoh 5. Diberikan *quiver* Q dengan dua buah titik dan dua panah yang membentuk siklus seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. *Quiver* dengan dua buah titik dan dua panah yang membentuk siklus

Representasi sederhana dari Q adalah

$$E_1 : K \underset{f_b = 0}{\overset{f_a = 0}{\leftrightarrows}} 0 \qquad E_2 : 0 \underset{f_b = 0}{\overset{f_a = 0}{\leftrightarrows}} K$$

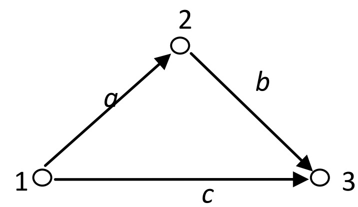
Selain yang telah diberikan diatas, untuk setiap $\lambda \in K\backslash\{0\}$, dapat didefinisikan representasi sederhana sebagai berikut

$$V : \quad K \underset{f_b = 1}{\overset{f_a = \lambda}{\leftrightarrows}} K$$

Untuk membuktikan contoh ini diandaikan representasi V diatas tidak sederhana, berarti V memiliki subrepresentasi lain selain representasi nol dan V sendiri. Katakan subrepresentasi sejati dari V tersebut adalah $W = (W_i, g_\alpha)$. Karena W bukan representasi nol dan masing-masing dari V_i berdimensi satu, maka salah satu dari $W_1 = 0$ atau $W_2 = 0$. Misalkan $W_1 = 0$ maka g_a tidak terdefinsi sebagai pemetaan linier karena hanya $0 \in K$ yang mempunyai kawan di W_1. Misalkan $W_2 = 0$, maka g_b tidak terdefinisi sebagai pemetaan linier karena hanya $0 \in K$ yang mempunyai kawan di W_2. Dengan demikian V tidak mempunyai subrepresentasi selain representasi nol dan V sendiri. Terbukti bahwa V representasi sederhana. ■

Dari Contoh 5 bisa dilihat bahwa *quiver* dengan sebuah siklus mempunyai representasi sederhana selain representasi kanonik yang dimiliki oleh *quiver* tanpa siklus. Untuk lebih memperkuat dugaan adanya perbedaan sifat antara representasi dari suatu *quiver* yang memiliki siklus dengan representasi dari suatu *quiver* tanpa siklus, berikut akan diberikan dua contoh *quiver* yang sama-sama memiliki tiga buah titik. Bedanya panah-panah pada *quiver* yang satu tidak membentuk siklus, sedangkan pada *quiver* yang lain arah panah-panahnya menyebabkan adanya sebuah siklus.

Contoh 6. Diberikan *quiver* Q dengan tiga buah titik dan tiga panah tanpa siklus seperti pada Gambar 5.



Gambar 5. *Quiver* dengan dengan tiga buah titik dan tiga panah tanpa siklus

Representasi sederhana dari Q hanyalah representasi kanonik E_1, E_2, dan E_3 sebagai berikut

$$E_1 : \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "0"'] & & 0 \end{tikzcd} \quad E_2 : \begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "0"'] & & 0 \end{tikzcd} \quad E_3 : \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "0"'] & & K \end{tikzcd}$$

Akan ditunjukkan bahwa representasi selain E_1, E_2, dan E_3 bukan merupakan representasi sederhana. Didefinisikan sebarang representasi $V = (V_i, f_\alpha)$ selain E_1, E_2, dan E_3. Berarti ada dua kemungkinan dari V, yaitu

1. Terdapat lebih dari satu V_i yang tak nol,
2. Terdapat satu saja V_i yang tak nol tapi berdimensi lebih dari satu.

Kemungkinan 1, jika terdapat lebih dari satu V_i yang tak nol. Beri label x untuk indeks V_i tak nol yang terbesar. Dapat dibentuk subrepresentasi $W = (W_i, g_\alpha)$ dari V dengan

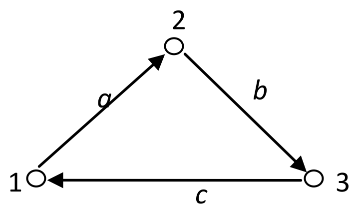
$$W = \left(W_i = \begin{cases} W_x, \text{untuk } i = x \\ \{0\}, \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases};\ g_\alpha = 0 \text{ untuk } \alpha = a, b, c\right),$$

dengan W_x adalah subruang berdimensi satu dari V_x.

Dengan demikian V bukan representasi sederhana karena V mempunyai subrepresentasi selain nol dan V sendiri.

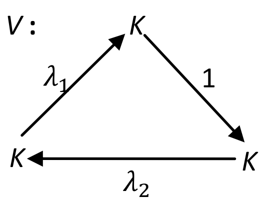
Kemungkinan 2, hanya terdapat sebuah V_i yang tak nol dan berdimensi lebih dari satu. Dengan mengambil subruang berdimensi satu dari V_i yang tak nol tersebut akan diperoleh subrepresentasi yang isomorfis dengan salah satu dari E_1, E_2, atau E_3. Dengan demikian V bukanlah representasi sederhana. Jadi, terbukti bahwa tidak ada representasi sederhana dari *quiver* Q selain E_1, E_2, dan E_3. ■

Contoh 7. Diberikan *quiver* Q dengan tiga buah titik dan tiga panah yang membentuk siklus seperti pada Gambar 6



Gambar 6. *Quiver* dengan dengan tiga buah titik dan tiga panah yang membentuk siklus

Jelas bahwa E_1, E_2, dan E_3 merupakan representasi sederhana dari Q. Berbeda dengan Contoh 4.3.7, *quiver* Q ini ternyata mempunyai representasi sederhana selainE_1, E_2, dan E_3. Representasi sederhana tersebut adalah $V = (V_i, f_\alpha)$ seperti diberikan dengan gambar sebagai berikut



dengan $\lambda_1, \lambda_1 \in K \backslash \{0\}$.

Untuk membuktikan contoh ini diandaikan representasi V bukan representasi sederhana, berarti V punya subrepresentasi selain representasi nol dan V sendiri. Katakan subrepresentasi tersebut $W = (W_i, g_\alpha)$. Karena subruang dari K hanyalah $\{0\}$ dan K sendiri, maka minimal salah satu dari $W_i = \{0\}$ untuk $i = 1,2,$ atau 3. Akibatnya pemetaan linier dengan image $W_i = \{0\}$ tidak terdifinisi karena tidak semua anggota domainnya punya kawan. Dengan demikian V tidak mempunyai subrepresentasi selain nol dan V sendiri. Jadi, terbukti bahwa V merupakan representasi sederhana. ■

Beberapa contoh di atas memberikan dugaan kuat bahwa representasi sederhana dari suatu *quiver* akan diperoleh apabila *quiver* tersebut tidak memiliki siklus dan representasinya berbentuk kanonik. Berikut akan diberikan terlebih dahulu definisi dari representasi kanonik.

Definisi 6. *Diberikan quiver Q. Suatu representasi tak nol dikatakan **representasi kanonik**, ditulis $E_x = (V_i, f_\alpha)$, jika memiliki bentuk sebagai berikut*

$$E_x = \left(V_i = \begin{cases} K \text{, untuk } i = x \\ \{0\} \text{, untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}, \right.$$
$$\left. f_\alpha = 0 \text{ untuk semua } \alpha \in Q_1 \right).$$

Selanjutnya, akan diberikan sebuah lemma yang menjamin adanya sebuah titik yang bukan merupakan sumber dari sebarang panah dalam suatu *quiver* yang tidak memiliki siklus.

Lemma 7. *Jika $Q = (Q_0, Q_1)$ merupakan sebuah quiver yang tidak memiliki siklus, maka terdapat sebuah titik $x \in Q_0$ yang bukan merupakan sumber dari sebarang panah $\alpha \in Q_1$. Selanjutnya titik yang demikian disebut sebagai **sink.***

Bukti:

Diandaikan semua titik di *quiver* Q merupakan sumber dari suatu panah. Dengan kata lain, untuk setiap $u_i \in Q_0$, $u_i = s(\alpha)$ untuk suatu $\alpha \in Q_1$. Dipilih $u_1 \in Q_0$ dan dibentuk sebuah lintasan dengan proses sebagai berikut: pilih α_n sedemikian hingga $s(\alpha_n) = u_n$. Selanjutnya tulis $u_{n+1} = t(\alpha_n)$, dan proses diulang. Karena himpunan titik Q_0 merupakan himpunan berhingga maka pada suatu proses akan diperoleh $u_{n+1} = u_n$ untuk suatu $i \leq n$. Dengan demikian lintasan $p = \alpha_i \dots \alpha_n$ merupakan sebuah siklus. Terjadi kontradiksi karena diketahui bahwa *quiver* Q tidak memiliki siklus. Dengan demikian terbukti bahwa terdapat sebuah titik $x \in Q_0$ yang bukan merupakan sumber dari sebarang panah $\alpha \in Q_1$. ■

Setelah mempelajari beberapa contoh dari representasi sederhana, dapat disimpulkan syarat perlu dan cukup dari suatu representasi sederhana adalah seperti diberikan pada teorema berikut.

Teorema 8. *Diberikan Q sebuah quiver yang tidak memiliki siklus. Suatu representasi tak nol V dari quiver Q merupakan representasi sederhana jika dan hanya jika V representasi kanonik.*

Bukti:

($\Leftarrow$) Diketahui V merupakan representasi kanonik, berarti hanya terdapat sebuah $V_i = K$ untuk suatu $i \in Q_0$ dan $V_i = \{0\}$ untuk semua $i \in Q_0$ yang lain. Karena K hanya memiliki subruang K dan $\{0\}$, maka subrepresentasi yang mungkin dari V hanyalah representasi nol dan representasi V sendiri. Dengan demikian V merupakan representasi sederhana.

($\Rightarrow$) Diketahui V merupakan representasi sederhana dari *quiver* Q yang tidak memiliki siklus. Akan dibuktikan V merupakan representasi kanonik. (dibuktikan dengan kontradiksi). Diandaikan V bukan representasi kanonik, katakan $V = (V_i, f_\alpha)$. Karena Q tidak memiliki siklus, menurut Lemma 3.10, maka terdapat sebuah titik $i \in Q_0$ yang merupakan sink atau tidak merupakan sumber dari sebarang panah $\alpha \in Q_1$. Katakan titik tersebut adalah $x_1 \in Q_0$ sedemikian hingga $s(\alpha) \neq x_1 (\forall \alpha \in Q_1)$. Jika $V_{x_1} \neq \{0\}$, maka label untuk titik tersebut adalah x. Jika $V_{x_1} = \{0\}$, didefinisikan $Q^1 = (Q_0^1 = Q_0 \backslash \{x\}, Q_1^1 = Q_1 \backslash \{\alpha \in Q_1 | t(\alpha) = x_1\})$. Karena $Q_0^1 \subset Q_0$, $Q_1^1 \subset Q_1$, dan Q tidak memuat siklus, maka Q^1 juga tidak memuat siklus. Menurut Lemma 4.3.10, terdapat sebuah titik, katakan $x_2 \in Q_0^1$, sedemikian hingga $s(\alpha) \neq x_2$ $(\forall \alpha \in Q_1^1)$. Selanjutnya, didefinisikan representasi V^1 dari *quiver* Q^1 dengan V^1 adalah representasi V yang dibatasi pada Q^1. Jika $V_{x_2} \neq \{0\}$, maka titik x_2 tersebut diberi label x. Jika $V_{x_2} = \{0\}$, maka proses diulang. Karena V merupakan representasi tak nol dari Q, maka suatu saat akan ditemukan $x_n \in Q_0$ sedemikian hingga $V_{x_n} \neq \{0\}$ dan titik tersebut diberi label x.

Selanjutnya, didefinisikan subrepresentasi $W = (W_i, g_\alpha)$ dari representasi V sebagai berikut;

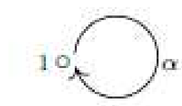
$$W = \left(W_i = \begin{cases} W_x, & \text{untuk } i = x \\ \{0\}, & \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}, \quad g_\alpha = 0 \text{ untuk semua } \alpha \in Q_1 \right),$$

dengan W_x adalah subruang berdimensi satu dari V_x.

Dengan demikian representasi V memiliki subrepresentasi sejati selain representasi nol, sehingga V bukan representasi sederhana. Terjadi kontradiksi dengan asumsi awal, sehingga pengandaian harus diingkar dan terbukti bahwa V merupakan representasi kanonik. ■

PENUTUP

Dari diskusi di atas, dapat ditarik kesimpulan beberapa sifat penting representasi *quiver* sederhana sebagai berikut: (1) Diberikan *quiver* Q dengan sebuah titik dan sebuah loop seperti pada gambar berikut



Representasi V dari *quiver* Q sederhana jika dan hanya jika V_1 berdimensi satu. (2) Diberikan Q yang merupakan sebuah *quiver* yang tidak memiliki siklus. Suatu representasi tak nol V dari *quiver* Q merupakan representasi sederhana jika dan hanya jika V representasi kanonik.

DAFTAR PUSTAKA

Barot M. 2006. Representations of *Quivers*, *Notes for The ICTP-Conference*. Instituto de Matmáticas Universidad Nacional Autónoma de México. Mexico: Ciudad Universitaria.

Brion M. 2008. Representations of *Quivers, Notes de l'école d'été "Geometric Methods in Representation Theory".* Grenoble.

David A N. 2015. Cyclic symmetries of A_n-*quiver* representations, *Advances in Mathematics* Vol. 269: 346-363.

Derksen H & Weyman J. 2005. *Quiver* Representations*. Notice of The AMS* 52 (2): 200-206.

Krause H. 2007 *Representations of Quivers via Reflection Functor.* Institut Fur Mathematik, Universitat Paderborn, Paderborn, Germany.

Riedtmann C. 2016 Explicit description of generic representations for *quivers* of type $\mathbb{A}_n$ or $\mathbb{D}_n$, *Journal of Algebra 452*: 474-486.

Steve YO. 2015. *Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis (Mathematical Surveis and Monographs,* American Mathematical Society, United State of America.

Weist T. 2015. On the recursive construction of indecomposable *quiver*, *Journal of Algebra* 443: 49-74.