

**BEBERAPA SIFAT SMALL RIEMANN SUMS
FUNGSI TERINTEGRAL HENSTOCK-KURZWEIL
DARI RUANG EUCLID \mathbb{R}^n KE RUANG BANACH \mathcal{X}**

Siti Khabibah¹ dan Soeparna Darmawijaya²
²Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Jl. Sekip Utara, Yogyakarta

Abstract : In this paper we discussed some properties of Henstock-Kurzweil integrable functions from the Euclidean Spaces \mathbb{R}^n into Banach space \mathcal{X} , Locally Small Riemann Sums dan Globally Small Riemann Sums.

Keywords : Euclidean Spaces, Globally Small Riemann Sums, Henstock-Kurzweil, Locally Small Riemann Sums,.

1. PENDAHULUAN

Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya, pada bagian ini terlebih dahulu diberikan beberapa definisi dan sifat-sifat untuk fungsi terintegral Henstock-Kurzweil yang bernilai Banach dan terdefinisi di ruang Euclidean \mathbb{R}^n .

Diberikan fungsi volume α pada \mathbb{R}^n dan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Fungsi $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{X}$ dikatakan *terintegral- α Henstock* pada E , ditulis dengan $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$, jika terdapat $\bar{a} \in \mathcal{X}$ dengan sifat untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\} = \{(D_i, \bar{x}_i) : i = 1, 2, \dots, r\}$

Pada E benar bahwa

$$\|(\mathcal{D}) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{a}\| = \|\sum_{i=1}^r \bar{f}(\bar{x}_i)\alpha(D_i) - \bar{a}\| < \varepsilon.$$

Jika $\bar{f} \in$

$R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ dan $\mathcal{J}(E)$ koleksisemua sel di dalam E maka fungsi sel $\bar{F} : \mathcal{J}(E) \rightarrow \mathcal{X}$ dengan rumus $\bar{F}(I) =$

$(R^*) \int_I \bar{f} d\alpha$ untuk setiap sel $I \in \mathcal{J}(E)$ disebut *Primitif Henstock- α fungsi \bar{f} pada E* . Fungsi $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi sel aditif $\bar{F} : \mathcal{J}(E) \rightarrow \mathcal{X}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E berlaku

$$\|(\mathcal{D}) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(E)\| = \|(\mathcal{D}) \{\sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - \bar{F}(D)\}\| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, \bar{x})\}$ pada E .

Selanjutnya untuk beberapa teorema dan definisi dalam tulisan ini dirujuk dari pustaka yang ada kemudian digeneralisasikan.

Untuk membuktikan ekuivalensi antara fungsi terintegral Henstock-Kurzweil dengan fungsi yang mempunyai sifat Small Riemann Sums diperlukan suatu kriteria dan teorema berikut ini

Teorema 1.1 (Kriteria Cauchy) Diberikan fungsi volume α pada \mathbb{R}^n , sel $E \subset \mathbb{R}^n$ dan \mathcal{X} ruang Banach. Fungsi $\bar{f} \in$

$R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada E sehingga untuk setiap dua partisi $\mathcal{D}_1 = \{(D, \bar{x})\}$ dan $\mathcal{D}_2 = \{(D, \bar{x})\}$ pada E berlaku

$$\|(\mathcal{D}_1) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D) - (\mathcal{D}_2) \sum \bar{f}(\bar{x})\alpha(D)\| < \varepsilon.$$

Teorema 1.2 Diberikan fungsi volume α pada \mathbb{R}^n dan sel $E \subset \mathbb{R}^n$. Jika $\bar{f} \in R^*(E, \mathcal{X}, \alpha)$ dengan \bar{F} sebagai primitifnya, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\eta > 0$ sehingga jika sel $J \subset E$ dengan $\alpha(J) < \eta$ berakibat

$$\|\bar{F}(J)\| = \|(R^*) \int_J \bar{f} d\alpha\| < \varepsilon.$$