

NEUTROSOFIK MODUL DAN SIFAT-SIFATNYA

Suryoto¹, Bambang Irawanto², Nikken Prima Puspita³
^{1,2,3}Jurusan Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof. H. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang 50275
¹suryoto_math@undip.ac.id

Abstract. Given any ring with unity and a commutative neutrosophic group under the additional operation, then from the both structures can be constructed a neutrosophic module by define the scalar multiplication between elements of the ring and elements of the commutative group. Further by generalized the neutrosophic module can be obtained a substructure of the neutrosophic module called a neutrosophic submodule. In this paper, from the concept of neutrosophic module and the ring with unity we study a generalization of classical module, that is a neutrosophic module and its properties. By utilizing the neutrosophic element as an indeterminate and an idempotent element under multiplication can be shown that most of the basic properties of classical module generally still true on this neutrosophic structure.

Keywords : commutative neutrosophic group, ring with unity, neutrosophic element, neutrosophic module, neutrosophic submodule.

1. PENDAHULUAN

Untuk mempelajari neutrosifik modul dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya, terlebih dahulu diperlukan konsep ring dengan unsur satuan beserta sifat-sifatnya secara umum. Menurut [1], modul adalah suatu struktur aljabar dari suatu himpunan tidak kosong atas sebuah ring yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner, berupa operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar, di mana himpunan ini merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan dilengkapi dengan tindakan perkalian skalar. Aksioma-aksioma yang berlaku pada modul serupa dengan aksioma-aksioma yang berlaku pada ruang vektor. Sebagai awal dalam pembahasan modul, ditinjau ring yang mempunyai unsur satuan. Berangkat dari ring ini didefinisikan modul atas ring yang dapat dibedakan menjadi dua, yaitu modul kiri dan modul kanan. Berikut ini diberikan definisi dari modul kiri atas ring.

Definisi 1. 1 [1] Misalkan $(R, +, \cdot)$ ring dengan unsur satuan 1. Modul kiri atas ring R atau R -modul kiri adalah grup komutatif $(M, +)$ yang dilengkapi dengan tindakan $\cdot \times$ melalui pengaitan (\cdot, \times) , untuk setiap

$r \in R, m \in M$ pasang $(r, m) \times$ dan memenuhi aksioma-aksioma berikut :

- $(r + s) \times m = r \times m + s \times m$
- $(r \times s) \times m = r \times (s \times m)$
- $(1) \times m = m$
- $1 \times m = m$

untuk setiap $r, s \in R$ dan $m \in M$.

Sedangkan pengertian untuk modul kanan dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, perbedaannya terletak pada tindakan ring terhadap himpunan M -nya. Jika pada modul kiri berlaku tindakan $\cdot \times$ melalui pengaitan (\cdot, \times) atau beraksi dari kiri dalam operasi perkalian skalar terhadap M , maka pada modul kanan berlaku sebaliknya, tindakan $\cdot \times$ melalui pengaitan (\cdot, \times) yaitu beraksi dari kanan dalam operasi perkalian skalar terhadap M .

Dalam hal R merupakan ring komutatif, pengertian modul kiri dan modul kanan tidak harus sama, ini karena elemen dari R belum tentu sama dengan elemen dari M . Selanjutnya jika M merupakan modul kiri dan sekaligus modul kanan, maka dikatakan modul atas R . Berikut ini diberikan beberapa contoh modul atas suatu ring.

Contoh 1.2 Diberikan $(R, +, \cdot)$ sebarang ring dengan I dan J berturut-turut adalah ideal kiri dan ideal kanan di R , maka $I + J$ berturut-turut merupakan I -modul kiri dan J -modul kanan terhadap operasi perkalian ring R .

Contoh 1.3 Pandang daerah bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, maka sebarang grup komutatif $(G, +)$ merupakan \mathbb{Z} -modul terhadap operasi (tindakan) :

$$n \cdot x = \underbrace{x + \dots + x}_n, \quad \text{untuk } n > 0$$

$$n \cdot x = 0, \quad \text{untuk } n = 0$$

$$n \cdot x = \underbrace{-(-x) - \dots - (-x)}_{-n}, \quad \text{untuk } n < 0$$

Selain struktur ring dan modul klasik, konsep lain yang dikaji dalam artikel ini adalah unsur neutrosodik yang merupakan kunci dari pembentukan struktur neutrosodik atas sebarang ring klasik. Pada [2] dan [3] diperkenalkan unsur neutrosodik, sebagai sebuah unsur yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian dan dapat dipandang sebagai indeterminate. Unsur ini memegang peranan penting dalam pembentukan unsur-unsur himpunan dari struktur neutrosodiknya.

Unsur neutrosodik dinotasikan dengan ϵ adalah suatu indeterminate yang bersifat idempoten terhadap operasi perkalian, yaitu $\epsilon \cdot \epsilon = \epsilon$. Berikut ini diberikan definisi neutrosodik grup sebagai awal pembentukan struktur neutrosodik lanjut, khususnya neutrosodik modul.

Definisi 1.4 [4] Misalkan $(G, +)$ sebarang grup, neutrosodik grup yang dibangun oleh ϵ dan dibawah operasi dinotasikan dengan $(G, +, \epsilon) = \{ \dots, \epsilon, \dots \}$.

Neutrosodik grup $(G, +, \epsilon) = \{ \dots, \epsilon, \dots \}$ tidak lain adalah himpunan yang elemennya berupa \dots, ϵ, \dots dan suatu unsur neutrosodik.

Berikut ini diberikan contoh dari neutrosodik grup.

Contoh 1.5 Misalkan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot) = (\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ maka terhadap operasi penjumlahan modulo 5, $(\mathbb{Z}_5, +, \epsilon)$ merupakan grup. Neutrosodik grup

$$(G, +, \epsilon) = \{ \dots, \epsilon, \dots \}$$

$$= \{ \dots + \epsilon \mid \dots \}$$

merupakan grup dibawah operasi "+".

2. PEMBAHASAN

2.1 Neutrosodik Ring dan Aspek Terkait

Definisi dan sifat-sifat yang diberikan pada bagian ini diambil dari [5]

Definisi 2.1 [5] Misalkan $(R, +, \cdot)$ sebarang ring, maka himpunan

$$= \{ \dots + \epsilon \mid \dots \}$$

dinamakan neutrosodik ring yang dibangun oleh ϵ dan dibawah operasi dari R .

Selanjutnya diberikan contoh terkait dengan neutrosodik ring ini.

Contoh 2.2 Himpunan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, dan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ berturut-turut merupakan neutrosodik ring bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan real, dan bilangan kompleks.

Berikut ini diberikan beberapa sifat penting neutrosodik ring, seperti dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.3 [5] Setiap neutrosodik ring merupakan ring dan senantiasa memuat himpunan bagian sejati berupa ring.

Bukti teorema ini diberikan oleh referensi [5], sedangkan bukti untuk bagian keduanya langsung dari kenyataan bahwa ring $\subset R$.

Selanjutnya sebagaimana dalam teori ring klasik dipunyai konsep homomorfisma ring, berikut ini diberikan pengertian homomorfisma neutrosodik ring.

Definisi 2.4 [5] Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, +, \cdot)$ adalah dua neutrosodik ring.

Pemetaan $\Phi : R \rightarrow S$ disebut homomorfisma neutrosodik ring jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut :

- $\Phi(\epsilon_R) = \epsilon_S$ suatu homomorfisma ring
- $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$

Contoh 2.5 Diberikan neutrosodik ring $(R, +, \cdot)$ maka pemetaan Φ

yang didefinisikan dengan $\Phi(x) = x + \epsilon$ untuk setiap $x \in R$, maka Φ suatu homomorfisma neutrosodik ring atau disebut endomorfisma neutrosodik ring.

Selanjutnya dari ring neutrosifik , secara khusus ditinjau neutrosifik grup komutatif (, +) dan dibentuk homomorfisma-homomorfisma neutrosifik grup dari (, +) ke dirinya sendiri atau endomorfisma neutrosifik grup. Jika semua endomorfisma neutrosifik grup Φ dihipun kedalam

himpunan

$$\text{End} () = \text{Hom} (,) \\ = \{ \Phi \mid \Phi$$

homomor isma}

maka mempunyai hasil berikut ini.

Teorema 2.6 Misalkan (, +) suatu neutrosifik grup dan $\text{End} ()$ adalah himpunan semua endomorfisma neutrosifik grup pada (, +). Jika pada himpunan $\text{End} ()$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan

$$(\Phi + \Psi)() = \Phi() + \Psi() \text{ dan} \\ (\Phi \cdot \Psi)() = \Phi \Psi() ,$$

untuk setiap $\Phi, \Psi \in \text{End} ()$ dan , maka $(\text{End} (), +, \cdot)$ merupakan neutrosifik ring.

Bukti : serupa dengan pembuktian untuk ring klasik. <

2.2 Neutrosifik Modul dan Sifat-Sifatnya

Pembahasan neutrosifik modul, tidak terlepas dari struktur neutrosifik grup komutatif sebagai dasar pembentukannya dan ring klasik. Pada penelitian ini ring yang ditinjau sebagai dasar pembentukan modul adalah ring komutatif dengan unsur satuan. Secara formal pengertian tentang neutrosifik modul baik kiri maupun kanan diberikan oleh definisi-definisi berikut.

Definisi 2.7 [6] Misalkan $(R, +, \cdot)$ ring dengan unsur satuan 1. Suatu R -modul kiri neutrosifik adalah neutrosifik grup komutatif $(M, +)$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar $\cdot \times$ dan memenuhi kondisi-

kondisi berikut :

$$a. (r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$$

$$b. (r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$$

$$c. (r \cdot 1) \cdot m = r \cdot m$$

$$d. 1 \cdot m = m$$

untuk setiap $r, s \in R$ dan $m \in M$. Sedangkan untuk pengertian neutrosifik modul kanan dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, perbedaannya terletak pada tindakan ring terhadap himpunan M -nya sehingga mempunyai definisi berikut.

Definisi 2.8 [6] Misalkan $(R, +, \cdot)$ ring dengan unsur satuan 1. Suatu R -modul kanan neutrosifik adalah neutrosifik grup komutatif $(M, +)$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian skalar $\cdot \times$ dan memenuhi kondisi-kondisi berikut :

$$a. (r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$$

$$b. (r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$$

$$c. (r \cdot 1) \cdot m = r \cdot m$$

$$d. 1 \cdot m = m$$

untuk setiap $r, s \in R$ dan $m \in M$.

Dalam hal ini merupakan ring komutatif, pengertian modul kiri dan modul kanan adalah sama. Selanjutnya jika R merupakan neutrosifik modul kiri dan sekaligus neutrosifik modul kanan, maka R dikatakan neutrosifik modul atas atau disebut juga neutrosifik R -modul.

Untuk lebih memperjelas definisi tentang modul, berikut ini diberikan beberapa contoh neutrosifik modul atas suatu ring.

Contoh 2.9 Pandang ring bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dan neutrosifik grup komutatif $(\mathbb{Z}, +)$. Didefinisikan pemetaan $\cdot \times$ dengan $(r, s) \cdot m = r \cdot s \cdot m$, untuk setiap $r, s \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}$, maka $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan neutrosifik \mathbb{Z} -modul.

Seperti halnya berlaku pada modul klasik, berikut ini diberikan definisi neutrosifik submodul dari suatu neutrosifik modul.

Definisi 2.10 Misalkan $(M, +)$ suatu neutrosifik R -modul dan N himpunan bagian tidak kosong dari M , dikatakan neutrosifik sub-modul dari M jika dipenuhi kondisi-kondisi berikut ini :

- a. merupakan neutrosodik sub-grup dari $(R, +)$
- b. merupakan neutrosodik R -modul terhadap operasi perkalian skalar yang sama yang berlaku pada R .

Atau dengan perkataan lain, M merupakan neutrosodik submodul dari $(R, +)$ jika dipenuhi :

- a. $(R, +)$ merupakan neutrosodik grup komutatif terhadap operasi "+", yaitu M merupakan neutrosodik subgrup dari $(R, +)$
- b. Untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ berlaku $rm \in M$.

Untuk menelaah apakah suatu himpunan merupakan neutrosodik submodul, diberikan teorema berikut.

Teorema 2.11 Misalkan M suatu neutrosodik R -modul dan S himpunan bagian tidak kosong dari R , merupakan neutrosodik submodul dari $(R, +)$ jika dan hanya jika memenuhi sifat :

- a. untuk setiap $r \in S$, $rs \in S$ berlaku
- b. untuk setiap $r \in R$ dan $s \in S$ berlaku $rs \in S$

Bukti :

(\Rightarrow) Misalkan M merupakan neutrosodik submodul dari $(R, +)$ maka M merupakan neutrosodik subgrup dari $(R, +)$. Dengan demikian untuk sebarang $r, s \in M$, berlaku $rs \in M$. Selanjutnya karena operasi perkalian skalar yang berlaku pada M juga berlaku pada R maka untuk sebarang $r \in R$ dan $s \in M$ berlaku $rs \in M$.

(\Leftarrow) Misalkan kedua kondisi diatas dipenuhi. Karena untuk setiap $r, s \in M$, berlaku $rs \in M$, maka M merupakan neutrosodik subgrup komutatif dari $(R, +)$. Selanjutnya karena untuk setiap $r \in R$ dan $s \in M$, maka operasi perkalian skalar yang berlaku di M juga berlaku di R . Terakhir karena M merupakan himpunan bagian yang tidak kosong dari R dan operasi perkalian skalar yang berlaku di R juga

berlaku di M , maka aksioma-aksioma neutrosodik modul di M juga berlaku di M .

Misalkan M suatu neutrosodik R -modul dan S , adalah neutrosodik submodul dari $(R, +)$. Didefinisikan jumlahan dari neutrosodik submodul M dan S sebagai himpunan $M + S = \{ m + s \mid m \in M, s \in S \}$.

Seperti halnya berlaku pada struktur grup, pada neutrosodik modul dapat diperlihatkan bahwa irisan dan jumlahan dua neutrosodik submodul juga membentuk neutrosodik submodul.

Lemma 2.12 Misalkan M suatu neutrosodik R -modul. Jika M_1 dan M_2 adalah neutrosodik submodul dari M , maka berlaku

- a. $M_1 \cap M_2$ merupakan neutrosodik submodul dari M
- b. $M_1 + M_2$ merupakan neutrosodik submodul dari M

Bukti :

a. Karena M_1 dan M_2 masing-masing merupakan neutrosodik submodul di M maka $M_1 \cap M_2$ senantiasa bukan merupakan himpunan kosong. Selanjutnya diambil sebarang $r, s \in M_1 \cap M_2$, maka $r, s \in M_1$ dan $r, s \in M_2$. Karena M_1 dan M_2 merupakan neutrosodik submodul dari M , maka diperoleh $rs \in M_1$ dan $rs \in M_2$ serta berakibat $rs \in M_1 \cap M_2$. Sekali lagi karena M_1 dan M_2 merupakan neutrosodik submodul di M maka berlaku $rM_1 \subseteq M_1$ dan $rM_2 \subseteq M_2$. Hal ini memberikan $r(M_1 \cap M_2) \subseteq M_1 \cap M_2$. Dengan demikian terbukti bahwa $M_1 \cap M_2$ merupakan neutrosodik submodul di M .

b. Dengan argumen yang serupa karena M_1 dan M_2 merupakan neutrosodik submodul di M maka $M_1 + M_2$ bukan merupakan himpunan kosong. Selanjutnya diambil sebarang $r, s \in M_1 + M_2$, $r = r_1 + s_1$ dan $s = r_2 + s_2$. Karena r_1 dan r_2 merupakan neutrosodik submodul dari M , maka berlaku

–₁ dan –₂. Dengan demikian diperoleh (+) – (+) = (–) + (–)₁ +₂. Selanjutnya karena₁ dan₂ merupakan neutrosifik submodul di maka berlaku₁ dan₂. Akibatnya (+) = +₁ +₂. Jadi terbukti bahwa₁ +₂ merupakan neutrosifik submodul dari .

Berdasarkan lema tersebut, dapat digeneralisasi bahwa irisan serta jumlahan tak berhingga banyak neutrosifik submodul juga merupakan neutrosifik submodul, seperti diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.7 Misalkan suatu neutrosifik -modul. Jika merupakan neutrosifik submodul dari untuk setiap Λ maka berlaku

$$\cdot \Lambda$$

$$\cdot \Lambda$$

Bukti : Dilakukan dengan cara serupa seperti pada pembuktian Lema 3.6 <

Pada bagian berikut diperlihatkan bahwa gabungan dua buah neutrosifik submodul pada umumnya bukan merupakan neutrosifik submodul, sebagaimana diberikan pada contoh berikut ini.

Contoh 3.8 Dari Contoh 3.3 pandang neutrosifik modul yang lebih khusus, yaitu neutrosifik modul [] atas ring = (, +, ·). Sekarang tinjau himpunan bagian

$$[] = \{ \}$$

dari []. Dapat diperlihatkan bahwa [] adalah neutrosifik -submodul dari []. Untuk itu

diambil sebarang (), () [], dengan

$$() = \text{ dan } () = 0$$

$$= \text{, dengan } , \text{ maka diperoleh}$$

$$() - () = - 0 - 0 = (-) 0$$

dengan – . Hal ini memperlihatkan bahwa () – () [].

Selanjutnya untuk sebarang dan () [], dengan

$$() = \text{, dengan } 0$$

diperoleh

$$() = = () 0 0$$

dengan . Hal ini memperlihatkan () [].

Dengan demikian benar bahwa [] merupakan neutrosifik -submodul dari [].

Sekarang ditinjau dua neutrosifik -submodul 2 [] dan 5 [] dari [], maka 2 [] 5 [] bukan merupakan neutrosifik -submodul dari [], karena untuk 5 5 [] dan 2 2 [] berlaku 5 – 2 = 3 \notin 2 [] 5 [].

Penjelasan ini memperlihatkan bahwa operasi gabungan antara dua buah neutrosifik submodul bukan merupakan submodul.

3. PENUTUP

Dari penjelasan pada bagian-bagian sebelumnya telah memberikan gambaran bahwa antara neutrosifik modul dan

modul klasik sebagai struktur padanannya, terdapat beberapa keterkaitan, diantaranya struktur atau sub-strukturnya mempunyai kemiripan definisi, tetapi dari sifat-sifat yang berlaku pada umumnya tidak selamanya bersesuaian antara kedua struktur tersebut, meskipun sejauh pembahasan ini masih belum ditemukan ketidak sesuaiannya.

Dari hasil pembahasan sejauh ini dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada modul klasik masih berlaku pada struktur neutrosifik modul. Terutama yang berkaitan dengan aspek neutrosifik submodul-nya. Telah diperlihatkan bahwa irisan dan jumlahan antara neutrosifik-neutrosifik submodul merupakan neutrosifik submodul, akan tetapi tidak demikian halnya dengan operasi gabungan antara neutrosifik submodul.

4. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Matematika (FSM) Universitas Diponegoro yang telah memberikan bantuan finansial, melalui program Penelitian Pembinaan dengan dana DIPA PNBPM FSM Universitas Diponegoro Tahun 2014 dengan kontrak pelaksanaan penelitian No. 82C/UN7.3.8/PL/2014.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Wisbauer, Robert, (1991), *Foundations of Modul & Ring Theory*, Gordon & Research Science Publishers, Reading.
 - [2] *Proceedings of The First International Conference on Neutrosophy, Neutrosophic Logic, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability and Statistics*, (2001), University of New Mexico, Gallup.
 - [3] Smarandache, Florentin, (2003), *A Unifying Field in Logics : Neutrosophic Logic. Neutrosophy, Neutrosophic Set, Neutrosophic Probability*, American Research Press, Rehoboth, New Mexico
 - [4] Kandasamy, W. B. V & Florentin Smarandache, (2006), *Some Neutrosophic Algebraic Structures and Neutrosophic $N - Algebraic Structures$* , Hexis, Phoenix – Arizona.
 - [5] Kandasamy, W. B. V & Florentin Smarandache, (2006), *Neutrosophic Rings*, Hexis, Phoenix – Arizona
 - [6] Agboola A.A.A, Akinola A. D. & Oyebola O. Y., (2011), Neutrosophic Rings I, *International J. Math. Combin*, 4 : 1–14
-