

PENGANTAR UJI STABILITAS UNTUK MODEL KOMPETISI ANTARA DUA POPULASI

Endang Warsiki dan Hanna A. Parhusip
Program Studi Matematika Industri dan Statistika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana
Jl. Diponegoro 52-6- Salatiga

Abstract. The stability analysis for a competition model between two populations is the main topic in this paper. Stability is studied by considering the eigenvalues of system differential equations according to the logistic equations which are developed for two populations. This paper can also be used as an introduction of the qualitative theory through a stability analysis. Additionally, this paper is proposed to the beginners in differential equations.

Keywords: competition, condition number, eigenvalue, stability.

1. PENDAHULUAN

Masalah aplikasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial jika dikehendaki kajian terhadap adanya perubahan. Berbagai masalah aplikasi dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan differensial, misal pada masalah mekanik, dinamika molekul, reaksi kinetik kimia dan rangkaian elektronik [5], resesi ekonomi [9]. Sebagai contoh yang sederhana yaitu jika diketahui kecepatan partikel maka akan dicari posisi partikel pada suatu waktu. Hal ini berarti aspek perubahan diketahui yaitu perubahan posisi terhadap waktu (kecepatan).

Persamaan yang memuat turunan disebut persamaan differensial. Sedangkan turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan itu disebut tingkat dari persamaan differensial tersebut. Penyelesaian persamaan differensial tingkat tinggi yang ada tidak dapat diselesaikan dengan mudah secara analitik. Salah satu cara yang digunakan adalah menyatakan persamaan differensial tingkat tinggi menjadi sistem persamaan differensial tingkat satu. Selanjutnya, kajian dilakukan pada sistem persamaan differensial tingkat satu.

Pada masa penemuan persamaan differensial pada abad 17 oleh Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Lagrange, dan

Laplace [10], diketahui bahwa tidak mungkin mencari penyelesaian semua jenis persamaan differensial. Salah satu cara kajian yang dilakukan sebagai pengganti adalah mempelajari stabilitas sistem. Selain itu, sangat sulit untuk menyatakan sifat umum dari penyelesaian persamaan differensial. Oleh karena itu, kajian dibatasi pada masalah persamaan differensial linear. Kelinearan dari persamaan differensial dijelaskan sebagai berikut.

Persamaan differensial yang dibahas dalam makalah ini berbentuk

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}, \quad (1.1)$$

dengan A adalah matriks $n \times n$,

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T. \quad \text{Matriks}$$

A adalah matriks yang setiap komponennya konstan (tidak tergantung pada peubah tak bebas \vec{x} dan peubah bebas t). Persamaan differensial di atas dikenal sebagai sistem persamaan differensial linear. Hal inilah yang akan diperkenalkan penulis.

Pada teori stabilitas, masalah utama yang dikaji adalah mempelajari perilaku penyelesaian persamaan differensial pada $t \rightarrow \infty$. Hal ini dapat dilakukan dengan

mengetahui akar-akar karakteristik dari matriks A pada persamaan (1.1). Akar-akar karakteristik merupakan penyelesaian dari persamaan karakteristik yang diperoleh dengan menyelesaikan $\det |A - \lambda I| = 0$.

Makalah ini terlebih dahulu membahas bentuk umum persamaan differensial. Hal ini ditunjukkan pada Subbab 1.1. Adapun penyajian teori untuk stabilitas dilakukan dengan mempelajari model kompetisi yang ditunjukkan pada Bab 2. Beberapa penyelesaian secara numerik ditunjukkan pada bab berikutnya.

1.1 Pengantar Persamaan Differensial Autonomous

Bagian ini merupakan cuplikan ulang dari [9].

Persamaan differensial tingkat- n dapat ditulis

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, t\right), \quad (1.2)$$

dengan x adalah peubah tak bebas dan t adalah peubah bebas.

Persamaan (1.2) dapat ditulis sebagai sistem persamaan tingkat-1 sebagai berikut.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad (1.3a)$$

atau

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (1.3b)$$

dengan \vec{x} adalah vektor kolom dengan komponen x_i dan dot (titik di atas peubah \vec{x} menyatakan turunan terhadap t). Untuk menyelesaikan persamaan (1.3a) atau (1.3b) diberikan nilai awal dan dinotasikan sebagai

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (1.4)$$

dengan t_0 adalah waktu awal.

Persamaan (1.3a) mempunyai penyelesaian tunggal jika di sekitar (t_0, \vec{x}_0) \vec{f} kontinu dan turunannya ('*continuously differentiable*') ada untuk \vec{x} di suatu daerah asal D . Daerah D tersebut merupakan daerah asal yang memuat \vec{x}_0 dan I adalah interval terbuka yang memuat t_0 [10]. Secara

ringkas dapat ditulis $\vec{f} \in C(D, \mathbb{R}^n)$ dengan data awal (t_0, x_0) . Notasi C menyatakan ruang kontinu.

Contoh 1.

Contoh ini tidak memuat ketunggalan penyelesaian

$$\dot{x} = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0. \quad (1.5)$$

Dengan mengikuti aturan integral untuk masalah $x^{-1/2} dx = dt$ diperoleh

$$\sqrt{x} = \frac{t}{2} + k, \quad \text{dengan } k \text{ adalah konstanta}$$

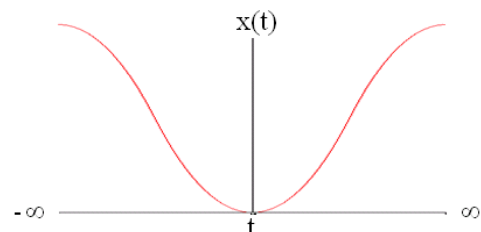
integrasi yang dapat diperoleh jika nilai awal diketahui. Dengan menggunakan nilai awal $x(0) = 0$, diperoleh

$$x = (t/2)^2, \quad \text{dengan } x(0) = 0.$$

Disini

$$D = \{x \mid x = (t/2)^2 \text{ untuk } t \in I, x(0) = 0\}$$

dan $I = \{t \mid t_0 \leq t \leq T\}$, T adalah waktu maksimum pengamatan. Ketunggalan dikarenakan adanya ketidakkontinuan dari turunan \sqrt{x} pada $t = 0$.



Gambar 1. Grafik $x(t) = (t/2)^2, x(0) = 0$.

Suatu sistem yang tidak bergantung secara eksplisit pada t disebut sistem autonomous. Jika sistem dapat diperluas untuk semua sistem autonomous pada $-\infty < t < \infty$, sistem dikatakan sistem dinamik. Sistem autonomous dapat ditulis sebagai

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0. \quad (1.6)$$

Disini diasumsikan bahwa waktu awal adalah $t_0 = 0$.

Penyelesaian $\vec{x}(t)$ dari persamaan (1.6) dapat dipandang sebagai suatu kurva di ruang n -dimensi (disebut ruang fase) dan kurva

tersebut dinamakan kurva integral/orbit/trayektori melalui \bar{x}_0 .

Definisi 1. Jika pada suatu $\bar{x} = \bar{x}_c$ dipenuhi $\bar{f}(\bar{x}_c) = 0$, maka $\bar{x} = \bar{x}_c$ disebut titik kritis /titik setimbang /titik *singular* atau titik *stationer*. Pernyataan $\bar{f}(\bar{x}_c) = 0$ berarti pula $\dot{\bar{x}} = \vec{0}$.

Berikut ini diberikan beberapa sifat-sifat penyelesaian sistem *autonomous*.

- a. Jika $\bar{x}(t)$ adalah penyelesaian sistem (1.6), maka $\bar{x}(t+a)$ adalah penyelesaian untuk sebarang konstan a . Suatu trayektori menyatakan beberapa penyelesaian yang berbeda satu sama lain oleh karena adanya translasi t .
- b. Trayektori tidak melalui titik setimbang. Jika suatu trayektori berakhir pada suatu titik, maka titik tersebut adalah titik setimbang.
- c. Trayektori tidak pernah bersilangan.
- d. Trayektori suatu penyelesaian periodik adalah kurva tertutup.

Sifat-sifat ini penting karena dengan mempelajari sifat trayektori secara geometri, kita dapat menjelaskan sifat-sifat kualitatif seperti keterbatasan dan periodisitas suatu penyelesaian.

Selanjutnya, masalah kompetisi dari dua macam populasi dibahas pada bab berikut ini untuk menjelaskan hal-hal terpenting dalam teori kualitas.

2. MODEL KOMPETISI ANTARA DUA MACAM POPULASI

Model ini dapat diterapkan untuk berbagai macam masalah kompetisi. Beberapa contoh masalah aplikasi yang telah dibahas dapat dilihat pada referensi [8] yang membahas tentang kompetisi antara dua spesies dan pada referensi [7] yang membahas tentang model nutrin. Model kompetisi dikenal juga sebagai Lotka-Volterra, dijelaskan di [8] dan [9]. Berikut ini penulis menjelaskan model kompetisi untuk sebarang 2 populasi.

Misal ada 2 macam populasi N_1 dan N_2 berkompetisi untuk sumber daya yang terbatas. Diasumsikan bahwa untuk masing-masing jenis populasi tidak memangsa satu sama lain. Tiap populasi tumbuh tanpa ada pengaruh kehadiran populasi lain. Populasi tumbuh mengikuti persamaan logistik. Pengaruh kompetisi membuat penurunan dalam laju N_1 dan N_2 .

Diasumsikan bahwa laju N_1 yaitu $\frac{dN_1}{dt}$

dan laju N_2 yaitu $\frac{dN_2}{dt}$ yang diberikan oleh [9].

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} - b_1 \frac{N_2}{K_2} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} - b_2 \frac{N_1}{K_1} \right). \quad (2.2)$$

Dari model ini, laju dari populasi N_1 dan laju dari populasi N_2 diketahui. Kita ingin mengetahui perilaku N_1 dan N_2 untuk $t \rightarrow \infty$. Untuk menyelesaikan masalah ini, maka persamaan (2.1)-(2.2) ditulis dalam bentuk tak berdimensi dengan transformasi sebagai berikut.

$$x_1 = \frac{N_1}{K_1}, \quad x_2 = \frac{N_2}{K_2}, \quad \tau = a_1 t, \quad \rho = a_2 / a_1, \quad (2.3a)$$

$$\beta_1 = b_1 K_2 / K_1, \quad (2.3b)$$

$$\beta_2 = b_2 K_1 / K_2. \quad (2.3c)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.3a)-(2.3c) ke persamaan (2.1)-(2.2) diperoleh

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1 (1 - x_1 - \beta_1 x_2), \quad (2.4a)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2 (1 - x_2 - \beta_2 x_1). \quad (2.4b)$$

Titik setimbang adalah titik yang memenuhi $\dot{x} = 0$. Diperoleh titik setimbang dari sistem (2.4a)-(2.4b) adalah (0,0), (0,1), dan (1,0) dan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah

$$x_1 + \beta_1 x_2 = 1, \quad (2.5a)$$

$$\beta_2 x_1 + x_2 = 1. \quad (2.5b)$$

Penyelesaian (2.4a)-(2.4b) adalah

$$x_1 = \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_1 \beta_2}, \quad x_2 = \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1 \beta_2}. \quad (2.6)$$

Penyelesaian x_1 dan x_2 relevan jika tidak negatif. Hal ini berarti

$$\begin{aligned} \beta_1 &\geq 1, & \beta_2 &\geq 1, & \beta_1 \beta_2 &> 1. \\ \beta_1 &\leq 1, & \beta_2 &\leq 1, & \beta_1 \beta_2 &< 1. \end{aligned}$$

Untuk selanjutnya kualitas dari sistem dipelajari dengan memilih $\beta_1 = 1.5$ dan $\beta_2 = 2$. Nilai ini dipilih untuk mempermudah perhitungan. Kualitas sistem dipelajari dengan melihat stabilitas dari sistem itu. Hal ini dilakukan dengan melihat sifat dari titik setimbang (0,0), (0,1), (1,0) dan titik setimbang pada persamaan (1.10). Langkah yang dilakukan adalah melinearkan sistem persamaan (2.4a)-(2.4b) disekitar titik setimbang dengan deret Taylor.

Kasus 1. Titik setimbang (0,0).

Diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{d\tau} \\ \frac{dx_2}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Dengan menyelesaikan determinan $|A - \lambda I| = 0$ dan A adalah matriks dari sistem persamaan (2.7) dan I adalah matriks identitas diperoleh akar-akar karakteristik $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = \rho$. Disini λ_1, λ_2 positif sehingga titik setimbang (0,0) adalah titik setimbang tidak stabil.

Kasus 2 . Titik setimbang (0,1).

Untuk mempelajari stabilitas titik setimbang (0,1) digunakan transformasi

$$x_1^* = x_1, \quad (2.8a)$$

$$x_2^* = x_2 - 1. \quad (2.8b)$$

Substitusikan persamaan (2.8a)-(2.8b) ke dalam persamaan (2.4a)-(2.4b) serta menggunakan $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 2$, dan linearkan persamaan (2.4a)-(2.4b) dan hilangkan tanda * diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{d\tau} \\ \frac{dx_2}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -2\rho & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, diperoleh $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -\rho$. Kedua akar karakteristik bertanda negatif. Titik setimbang (0,1) disebut titik stabil asimtotik.

Kasus 3. Dengan cara sama dengan kasus 2 dapat diperoleh bahwa titik (1,0) adalah titik setimbang stabil asimtotik.

Kasus 4. Titik setimbang (0.25, 0.5).

Titik ini ditransformasikan ke (0,0) dengan aturan

$$x_1^* = x_1 - 0.25, \quad (2.10a)$$

$$x_2^* = x_2 - 0.25. \quad (2.10b)$$

Dengan transformasi (2.10a)-(2.10b) pada sistem (2.4a)-(2.4b) dan dilinearkan, serta menghilangkan tanda * diperoleh

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{d\tau} \\ \frac{dx_2}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.375 \\ -\rho & -0.5\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

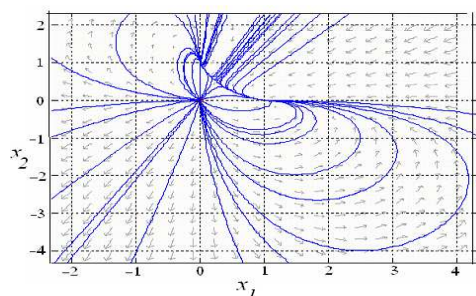
Dengan cara yang sama seperti di atas, diperoleh akar-akar karakteristik

$$\lambda_{1,2} = \left[-(0.5\rho + 0.25) \pm \sqrt{(0.5\rho + 0.25)^2 + \rho} \right] / 2 \quad (2.12)$$

Peubah ρ selalu positif, maka ekspresi di dalam akar menghasilkan bilangan riil. Selanjutnya, akar-akar karakteristik berbeda tanda. Oleh karena itu, titik setimbang (0.25, 0.5) adalah titik pelana tidak stabil ('*unstable saddle point*').

3. PEMBAHASAN DENGAN SIMULASI NUMERIK

Penyajian di atas dilakukan secara manual dan studi stabilitas secara manual. Pada makalah ini ditunjukkan simulasi numerik untuk masalah di atas, yaitu dengan membuat bidang fase dari persamaan differensial (2.4a)-(2.4b). Dengan menggunakan *pplane5* dapat diperoleh diagram fase seperti yang ditampilkan pada Gambar 2. Metode numerik yang digunakan pada program *pplane5* adalah metode Runge-Kutta tingkat-2 dan toleransi 0.0001. Teori tentang metode ini dapat dilihat di [4].



Gambar 2. Grafik penyelesaian sistem persamaan differensial (2.4a)-(2.4b) dengan $\beta_1 = 1.5$ dan $\beta_2 = 2, \rho = 1$.

Besarnya parameter ρ sangat mempengaruhi penyelesaian dari sistem differensial linear yang menentukan stabilitas dari titik setimbang. Hal ini dapat dijelaskan dengan memperhatikan bilangan bersyarat dari matriks A yang dicari akar-akar karakteristiknya. Bilangan bersyarat dari suatu matriks A didefinisikan sebagai

$$\kappa(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty},$$

dengan $\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Jika bilangan bersyarat $\kappa(A) = 1$, maka sistem dikatakan bagus (*well defined*) dan jika $\kappa(A) \gg 1$, sistem dikatakan sakit (*ill conditioned*). Berbagai masalah aplikasi sering mengalami keadaan ini. Akan tetapi selama perubahan dari sistem tetap memberikan penyelesaian terbatas, maka kondisi ini masih dapat diterima.

Pada bahasan berikut ini diberikan contoh analisa matriks stabilitas pada Bab 2 dengan mempelajari besarnya bilangan bersyarat dari matriks. Perlu diingat bahwa komputasi telah dilakukan untuk bentuk persamaan differensial yang tidak berdimensi yaitu persamaan (2.4a)-(2.4b).

Kasus 1. Sistem persamaan differensial (2.7)

Tampak bahwa jika $0 < \rho \ll 1$, maka sistem dapat dikatakan ‘sakit’ (*ill conditioned*). Hal ini dapat ditunjukkan dengan melihat bilangan bersyarat dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \text{ yang jauh lebih besar dari 1.}$$

Studi tentang hal ini dapat dilihat di [10]. Secara aplikatif, besarnya ρ menentukan besarnya faktor kompetisi, karena $\rho = a_2 / a_1$ (lihat 2.3a). Jika $\rho = 1$ maka faktor kompetisi dapat dikatakan sebanding antara kedua populasi. Dari aspek sistem persamaan linear, matriks A menjadi matriks identitas, dan sistem dikatakan ‘bagus’ (*well defined*). Hal ini dapat dilihat bahwa bilangan bersyarat dari matriks A adalah 1.

Kasus 2. Sistem persamaan differensial (2.9)

Untuk $\rho = 1$, bilangan bersyarat dari matriks A adalah 10.4039. Bilangan bersyarat ini dapat dikatakan tidak terlalu besar (masih $O(1)$). Secara sama dapat diamati untuk $0 < \rho \ll 1$ diperoleh bilangan bersyarat yang besar, sehingga sistem dikatakan sakit. Secara aplikasi keadaan $0 < \rho \ll 1$, menunjukkan bahwa faktor kompetisi untuk populasi N_1 jauh lebih besar dibandingkan faktor kompetisi N_2 .

4. PENUTUP

Stabilitas untuk model kompetisi antar dua populasi telah disajikan dalam makalah ini. Faktor kompetisi antara kedua populasi merupakan faktor utama. Hal ini dikaji dengan mengamati akar-akar karakteristik dari matriks kestabilan. Kestabilan matriks dihubungkan dengan besarnya bilangan bersyarat matriks tersebut. Pada hasil studi di atas, besar tidaknya bilangan bersyarat ditentukan oleh perbandingan faktor kompetisi antara kedua populasi yang ditunjukkan oleh parameter ρ . Untuk $0 < \rho \ll 1$, faktor kompetisi populasi N_1 jauh lebih besar dari populasi N_2 .

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Alexei, S. (1996) *Lotka-Volterra Model*, <http://www.ento.vt.edu/~sharov/PopEcol/lec10/lotka.html>, down-

- load pada tanggal 28 September 2005.
- [2] Apostol, T.M. (1997), *Linear Algebra, A first Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc
- [3] Beals, M., Gross, L., Harrell, S. (1999), *Interspecific competition : Lotka-Volterra*, <http://www.tiem.utk.edu/~gross/bioed/bealsmodules/competition.html>, download pada tanggal 28 September 2005.
- [4] Chan Man Fong, C.F., De Kee, D. (1999) *Perturbation Methods, Instability, Catastrophe and Chaos*, World Scientific.
- [5] Deufhard, P., Bornemann, F. (2002) *Scientific Computing with Differential Equations*, Springer-Verlag New York, Inc.
- [6] Gail, S.K., Wolkowicz, X., Huaxing., Ruan, S. (1997), *Competition in the Chemostat: A Distributed Delay Model and Its Global Asymptotic Behavior*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **57**(5): 1281-1310, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [7] Golubitsky, M., Dellnitz, M (1999). *Linear Algebra and Differential Equations Using MATLAB*, Brooks/Cole Publishing Company.
- [8] Kordzakhia, G., Lalley, S.P. (2005), *A two-species competition model on Z^D* , <http://galton.uchicago.edu/~lalley/Papers/EqualLalley3.pdf#search=competition%20model>, download pada tanggal 28 September 2005.
- [9] Mathews, J.H. (1987) *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Inc.
- [10] Watkins, D.S (1991) *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons.
-