Jurnal MIPA 39 (2) (2016): 159-163

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN SOLUSI PERSAMAAN GELOMBANG AIRY MENGGUNAKAN PENDEKATAN SEMIGRUP C_0

M Kiftiah✉ WB Partiwi, F Fran, B Prihandono

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Tanjungpura, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2016
Disetujui September 2016
Dipublikasikan Oktober 2016

Keywords:
generator; semigroup; Airy equation

Abstrak

Semigrup C_0 merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menunjukkan Masalah Nilai Awal (MNA) dari persamaan diferensial di Ruang Hilbert bersifat *well posed*. MNA dalam abstrak ini disebut Masalah Cauchy Abstrak. Semigrup pada Ruang Hilbert H merupakan keluarga operator linear $\{T(t): t \geq 0\}$ pada Ruang Hilbert H yang tertutup terhadap komposisi dan memiliki elemen identitas. Lebih lanjut, jika semigrup mempunyai turunan kanan di $t = 0$ maka turunannya disebut infinitesimal generator. Dalam hal ini, Teorema Lumer Philips memberikan ekivalensi antara infinitesimal generator dengan semigrup. Dalam hal tertentu semigrup dapat diperluas menjadi grup. Teorema Stone memberikan ekuivalensi antara generator dengan grup. Secara teknis, Teorema Lumer Philips mengatakan MNA bersifat well posed jika dan hanya jika infinitesimal generatornya bersifat *m-dissipative*. Selanjutnya, pendekatan semigrup diaplikasikan pada persamaan Airy.

Abstract

Semigroup C_0 is one method used to show the Initial Value Problems (MNA)of differential equations in Hilbert space is well posed. In this research, MNA called Abstract Cauchy Problems. Semigroup is a family of linear operators $\{T(t): t \geq 0\}$ on Hilbert Space H which is closed under composition and has an identity element. Furthermore, if semigrup has a right derivative at $t = 0$ then it is called infinitesimal generator. In this case, the Lumer Philips Theorem provides the equivalence between infinitesimal generator and semigroup. In certain cases, semigroup can be expanded into a group. Stone Theorem gives the equivalence between generator and group. Then Lumer Philips Theorem said the MNA is well posed if and only if the infinitesimal generator is m-dissipative. Furthermore, semigroup approach was applied to the Airy equation.

✉ Alamat korespondensi:
Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak Tenggara, Bansir Laut, Pontianak Tenggara, Kota Pontianak, Kalimantan Barat 78124

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Semigrup didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner yang memenuhi sifat assosiatif. Secara khusus, semigrup dapat didefinisikan sebagai suatu operator linear terbatas. Semigrup biasanya digambarkan dengan masalah nilai awal untuk persamaan diferensial biasa atau parsial. Di dalam penelitian ini digunakan salah satu jenis persamaan diferensial yang digunakan untuk membangun konsep semigrup, yaitu persamaan evolusi (Masalah Nilai Awal) yang didefinisikan dengan

$$u'(t) = Au(t)$$
$$u(0) = u_0$$

dengan u_0 adalah posisi awal untuk $t = 0$. Dari solusi persamaan evolusi dapat ditunjukkan bahwa setiap semigrup merupakan operator linear terbatas (Banasiak & Arlotti 2006). González-Gaxiola & Santiago (2012) telah meneliti aplikasi operator Black-Scholes sebagai pembangkit semigrup C_0. Dalam González-Gaxiola & Santiago (2012) dinyatakan bahwa operator differensial orde kedua $\hat{A}u = ax^2D^2u + bxDu - bu, a, b \in R$ pada ruang Schwartz $S_0(0, \infty)$ membangun suatu semigrup C_0.

Semigrup kontinu kuat (semigrup C_0) merupakan generalisasi dari fungsi eksponensial yang memberikan solusi linear koefisien konstan persamaan diferensial biasa. Konsep dasar semigrup muncul dari asumsi dasar C_0, yaitu eksistensi dan ketunggalan solusi, fungsi kontinu untuk nilai awal dan linearisasi. Selanjutnya, pendekatan teori semigrup ini digunakan untuk menunjukkan eksistensi dan ketunggalan (*well-posed*) dari solusi Masalah Nilai Awal atau yang lebih dikenal dengan Masalah Cauchy Abstrak.

Persamaan gelombang *Airy* adalah Persamaan Diferensial Parsial Linear Orde 3 yang dalam matematika disebut persamaan dispersi. Secara fisis, dispersi merupakan gejala penguraian gelombang berdasarkan frekuensinya. Dispersi muncul pada suatu fenomena yang mempunyai 2 kerapatan yang berbeda, yang mengakibatkan pembiasan dan pembelokan arah. Di dalam persamaan dispersi terdapat hubungan antara frekuensi dan kecepatan yang disebut relasi dispersi. Secara matematis, relasi dispersi merupakan dekomposisi gelombang berdasarkan frekuensinya. Semakin besar frekuensi yang dihasilkan semakin besar pula kecepatannya untuk merambat begitu pula sebaliknya. Walaupun terdapat dekomposisi antara frekuensinya, profil gelombang tetap stabil dan tidak menyebar yang diakibatkan adanya relasi dispersi didalamnya (Escauriaza *et al.* 2007).

Berdasarkan gagasan tersebut, penulis tertarik untuk menganalisis Masalah Cauchy Abstrak pada persamaan diferensial parsial linear, yaitu Persamaan Gelombang *Airy*. Lebih lanjut, penulis juga akan menunjukkan *well-posed* untuk Masalah Nilai Awal dan solusinya menggunakan pendekatan semigrup.

METODE PENELITIAN

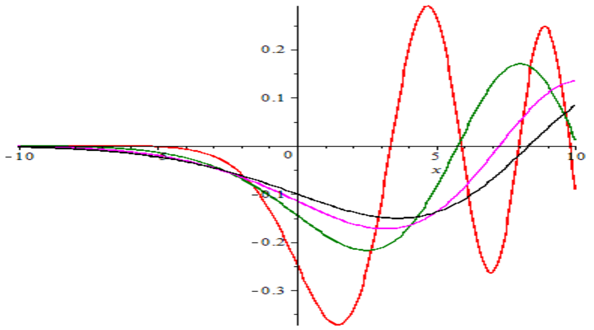
Metode yang digunakan adalah studi literatur dan pendekatan semigrup akan diaplikasikan pada persamaan Airy.. Terlebih dahulu, dilakukan simulasi untuk melihat kestabilan grafik gelombang Airy. Selanjutnya menguraikan tentang infinitesimal generator, operator *m-dissipative* dan Masalah Cauchy Abstrak. Lebih lanjut, akan ditunjukkan hubungan antara infinitesimal generator dengan semigrup dan infinitesimal generator dengan grup. Pada akhir pembahasan ini diperoleh generator sebagai operator *m-dissipative* yang menunjukkan bahwa persamaan diferensial yang berkaitan dengan Masalah Cauchy Abstrak bersifat *well posed.* Selanjutnya, pendekatan semigrup diaplikasikan pada persamaan Airy.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Airy merupakan gelombang berjalan yang dapat dituliskan sebagai

$u_t = -u_{xxx}, \;\; u(x,0) = x_0, \;\; t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$

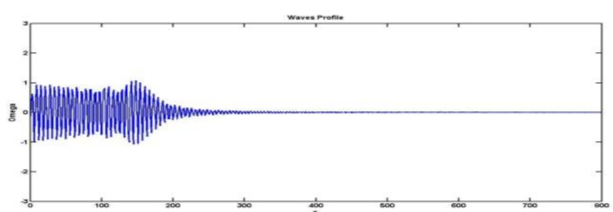
Gambar 1 merupakan simulasi untuk melihat kestabilan grafik gelombang Airy untuk data awal $(x, 0) = \sin t$.



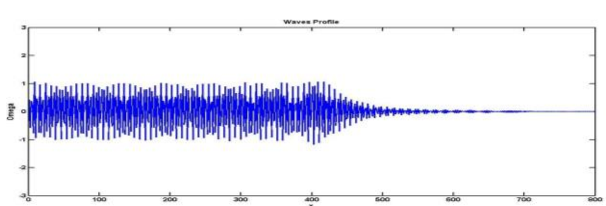
Gambar 1. Gelombang Berjalan Persamaan Airy

Simulasi tersebut dihasilkan dengan menggunakan program Maple pada selang waktu 15 detik. Pada Gambar 1 terlihat bahwa warna merah menandakan grafik $t = 1$, warna biru menggambarkan grafik $t = 5$, warna hijau menggambarkan grafik $t = 10$ dan warna pink menggambarkan grafik $t = 15$. Berdasarkan gambar diatas dilihat untuk t yang semakin membesar gelombang semakin menyebar hingga mencapai titik kesetimbangan.

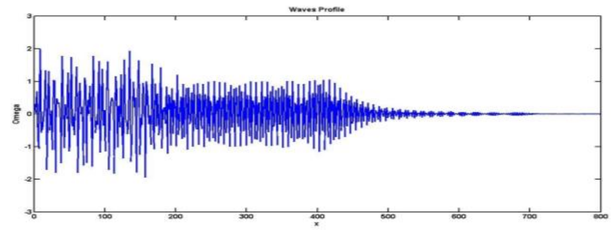
Gambar 2 sampai dengan Gambar 4 menggambarkan pengaruh relasi dispersi pada gelombang Airy menggunakan program Matlab. Gelombang Airy mempunyai relasi dispers $\omega(k) = k^3$.



Gambar 2. Relasi Dispersi dengan $f(t) = sin\, t$



Gambar 3. Relasi Dispersi dengan $f(t) = sin\, 5t$



Gambar 4. Relasi dispersi dengan $f(t) = sin\, t + \sin 5t$

Gambar 2 sampai dengan Gambar 4 merupakan simulasi untuk membandingkan perambatan gelombang dari signal $f(t) = \sin t$ dan $f(t) = \sin 5t$ untuk selang waktu 60 detik. Gambar 2 merupakan perambatan untuk signal $f(t) = \sin t$ dan Gambar 3 merupakan perambatan untuk signal $f(t) = \sin 5t$. Dari Gambar 2 dan Gambar 3 dapat dilihat bahwa gelombang dengan signal $f(t) = \sin 5t$ bergerak lebih cepat dibandingkan dengan signal $f(t) = \sin t$; Sedangkan Gambar 4 merupakan superposisi dari gelombang dengan signal $f(t) = \sin t + \sin 5t$. Dapat dilihat bahwa gelombang dengan frekuensi yang lebih besar bergerak lebih cepat dibandingkan dengan frekuensi yang lebih kecil. Namun, dapat dilihat pula gelombang dengan frekuensi lebih besar bergerak meninggalkan gelombang dengan frekuensi lebih kecil. Sehingga, semakin besar frekuensi suatu gelombang maka semakin besar kecepatannya untuk merambat.

Selanjutnya akan digunakan pendekatan semigrup untuk melihat eksistensi dan ketunggalan solusi dari persamaan gelombang Airy.

Persamaan Airy dituliskan sebagai

$$u_t = -u_{xxx}, \quad u(x,0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Operator $T(t)$ dengan pemetaan $t \mapsto T(t)x_0$ merupakan semigrup C_0.

Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$u_t \in D(A), \qquad u(x,0) = x_0$$

Kontruksi Masalah Cauchy Abstrak pada $H = L^2\mathbb{R}$. Untuk setiap $u \in D(A)$ maka

$$\begin{cases} Au = -u_{xxx} \\ D(A) = H^3(\mathbb{R}) \end{cases} \qquad (2)$$

dengan $A: D(A) \subseteq H \to H$ adalah generator infinitesimal semigrup C_0 pada H dan $H^3(\mathbb{R})$ merupakan kelas (semua) fungsi sehingga $f', f'', f''' \in L^2(\mathbb{R})$.

Definisi 1 (Pazy, 1983) *Misalkan A operator tutup. Persamaan Cauchy Abstrak dikatakan well posed jika:*

a. *$D(A)$ rapat di H.*
b. *Untuk setiap $x_0 \in D(A)$ terdapat solusi tunggal $u = (\cdot, x_0)$.*
c. *Untuk setiap barisan $\left(x_{0,n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ dan $x_0 \in D(A)$ yang memenuhi $\lim_{n\to\infty} x_{0,n} = x_0$ berlaku $\lim_{n\to\infty} u\left(\cdot, x_{0,n}\right) = u(\cdot, x_0)$ secara seragam untuk setiap t pada subhimpunan kompak $\mathbb{R}_+$.*

Teorema 1 (Tuscnak, 2004) *Misalkan A operator linear tutup. Masalah Cauchy Abstrak dikatakan well posed jika dan hanya jika operator A adalah infinitesimal generator dari semigrup C_0.*

Untuk selanjutnya diasumsikan A merupakan operator tutup. Kondisi sehingga operator A merupakan *infinitesimal generator* dari semigrup C_0 diberikan pada definisi dan teorema berikut.

Definisi 2 (Hundertmark *et al*, 2013) Operator linear $A: D(A) \subseteq H \to H$ dikatakan disipatif jika untuk setiap $u \in H$ berlaku

$$Re\langle Au, u\rangle \le 0$$

Teorema 2 (Vrabie, 2003) *Misalkan H Ruang Hilbert. Misalkan operator linear $A: D(A) \subseteq H \to H$ rapat, maka operator linear A merupakan generator infinitesimal dari semigrup C_0 kontraksi pada H jika dan hanya jika*

i. *Operator A disipatif*
ii. *Terdapat $\lambda > 0$ sedemikian sehingga $\lambda I - A$ surjektif.*

Teorema 3 (Vrabie, 2003) *Misalkan operator $\{G(t): t \in \mathbb{R}\}$ merupakan semigrup C_0 isometri. Maka operator A merupakan infinitesimal generator dari operator uniter grup C_0*

Berdasarkan Masalah Cauchy Abstrak dari parsamaan Airy, akan ditunjukkan operator A membangun semigrup $\{T(t): t \ge 0\}$.

Misalkan $u \in D(A)$, definisikan

$$u_{xxx}u = \frac{1}{2}\left(2u_{xx}u - (u_x)^2\right)_x$$

sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}u \; dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(2u_{xx}u - (u_x)^2\right)_x dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{2}\left(2u_{xx}u - (u_x)^2\right)_x dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{2}\left(2u_{xx}u - (u_x)^2\right)_x dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\left(2u_{xx}u - (u_x)^2\right)_a^0 + \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left(2u_{xx}u - (u_x)^2\right)_0^b$$

$$= 0$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\langle Au, u\rangle = 0 \tag{3}$$

untuk setiap $u \in D(A)$.

Persamaan (3) mengakibatkan

$\langle Au, u\rangle \le 0$

sehingga operator A disipatif untuk setiap $u \in D(A)$. Selanjutnya, bentuk $(\lambda I - A)u = f$ dan tanpa mengurangi keumuman pilih $f \in L^2(\mathbb{R})$. Untuk setiap $u \in D(A)$ dan $\lambda > 0$, maka

$$\lambda u + u_{xxx} = f \tag{4}$$

Diperoleh solusi Persamaan (4) yaitu

$$y_p = c_1 e^{\lambda^{\frac{1}{3}}x} + c_2 e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x} + c_3 e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x} + A_1(x) e^{\lambda^{\frac{1}{3}}x} + A_2(x) e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x} + A_3(x) e^{\left(\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda^{\frac{1}{3}}\right)x}$$

Akibatnya, $R(\lambda I - A) = H$ dan operator A *m*-disipatif. Jadi, operator A membangun semigrup $\{T(t): t \ge 0\}$.

Teorema 4 (Vrabie, 2003) *Misalkan H Ruang Hilbert. Operator $A: D(A) \subseteq H \to H$ merupakan generator infinitesimal dari operator uniter grup C_0 pada H jika dan hanya jika iA self adjoint (A skew adjoint).*

Selanjutnya akan ditunjukkan A^* membangun semigrup $\{T^{-1}(x): t < 0\}$.

Akan ditunjukkan *iA self adjoint.* Misalkan $u, v \in D(A)$

$$\langle iAu, u\rangle = -i\int_{\mathbb{R}} \partial^3 u . v \, dx = \frac{1}{2} i \int_{\mathbb{R}} \partial^2 u . \partial v \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} i \int_{\mathbb{R}} \partial u . \partial^2 v \; dx = i \int_{\mathbb{R}} \partial^3 v . u \, dx$$

$$= -i\langle u, Av\rangle \tag{5}$$

Berdasarkan Persamaan (4) diperoleh

$A^* = -A.$

Akan ditunjukkan operator A^* disipatif. Karena $A^* = -A$ dan Persamaan (5) akibatnya $\langle -Au, u \rangle \leq 0$. Maka operator A^* disipatif untuk setiap $u \in D(A)$

Karena $A^* = -A$ dan berdasarkan Teorema (3), generator infinitesimal A^* membangun semigrup $\{T^{-1}(x): t < 0\}$. Akibatnya, operator $B = \begin{cases} A & t \geq 0 \\ -A, & t < 0 \end{cases}$ membangun grup $\{G(t): t \in \mathbb{R}\}$.

Jadi, Berdasarkan Teorema (2), Persamaan (1) bersifat *well posed* untuk $t \in \mathbb{R}$.

PENUTUP

Menggunakan pendekatan teori semigrup dapat ditentukan eksistensi dan ketunggalan solusi persamaa diferensial parsial linear. Hal yang dilakukan yaitu mengkontruksi Ruang Hilbert H yang memungkinkan operator *Airy* dapat berkerja. Selanjutnya, menentukan masalah Cauchy Abstrak untuk persamaan gelombang *Airy*, yaitu

$u'(t) = -\partial^3 u$

dengan $A = -\partial^3$ merupakan operator *m*-disipatif. Masalah Nilai Awal diatas bersifat *well posed* untuk $t \in \mathbb{R}$.

DAFTAR PUSTAKA

Banasiak J & Arlotti L. 2006. *Pertubation of Positive Semigroups with Applications*. Springer. New York.

Escauriaza L, Kenig CE, Ponce G & Vega L. 2007. On Uniqueness Properties of Solutions of The K-Generalized KDV Equastions. *Journal of Functional Analysis 244*. 504-535. doi:10.1016/j.jfa.2006.11.004

González-Gaxiola O & Santiago JA. 2012. The Black Scholes Operator as The Generator of C_0 – Semigroup And Application. *International Journal of Pure and Applied Mathematics 76(2)*. 191-200.

Hundertmark D, Meyries M, Machinek L, & Schubelt R. 2013. Operator Semigroup and Dispersive Equations. *16th Internet Seminar on Evolution Equastions*. Karlsruhe. Germany..

Pazy A. 1983. *Semigroup of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*. Springer. New York.

Tuscnak M. 2004. *Wellposedness, Controllability and Stabilizability of System Governes by Partial Differential Equations*. Verlag. Berlin.

Vrabie II. 2003. *C_0 Semigroup and Applications*. Elsevier. Amsterdam.