JURNAL MIPA UNSRAT ONLINE *4* (2) 108-110

dapat diakses melalui http://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/jmuo

Persamaan Diophantine Tipe Ramanujan-Nagell $x^2 = y^n + 2185$

Mans L. Mananohas [a]*

[a]Jurusan Matematika, FMIPA, Unsrat, Manado

KATA KUNCI

Diophantine
Ramanujan-Nagell

ABSTRAK

Dalam tulisannya di tahun 2014, Ulas mengajukan sebuah konjektur mengenai solusi bilangan bulat positif dari persamaan Ramanujan-Nagell $x^2 = y^n + 2185$. Di sini penulis termotivasi untuk melakukan penelitian lanjutan mengenai konjektur tersebut. Setelah dilakukan penelitian penulis berhasil membuktikan bahwa untuk kasus *n* bilangan genap solusinya adalah $(x,y,n) = (59,6,4)$ dan $(x,y,n) = (221,6,6)$, sementara untuk kasus $n = 3$ dengan *x* genap terbukti hanya terdapat satu pasangan solusi persamaan $(x,y) = (248,39)$. Akan tetapi, untuk kasus $n = 3$ dengan *x* bilangan ganjil diatas belum diperoleh hasil yang memuaskan sehingga sangat perlu dilakukan penelitian lanjutan.

KEYWORDS

Diophantine
Ramanujan-Nagell

ABSTRACT

On his paper in 2014, Ulas suggests a conjecture about positive integer solutions of equation Ramanujan-Nagell $x^2 = y^n + 2185$. In this paper, writer is motivated to conduct advanced research about the conjecture. In this research, writer has successfully proven that in case of *n* equals even number, the solutions are $(x,y,n) = (59,6,4)$ dan $(x,y,n) = (221,6,6)$, while in case of $n = 3$ with *x* is even number, it is proven that there is only one pair solution, that is $(x,y) = (248,39)$. However, for $n = 3$ case with *x* is odd number, the satisfied result is not found yet, so the further research has to be done.

TERSEDIA *ONLINE*

23 Juni 2015

1. Pendahuluan

Pada tahun 1913 Ramanujan mengajukan pertanyaan tentang semua solusi bilangan bulat positif dari persamaan Diophantine $x^2 = 2^n - 7$. Pertanyaan ini pun tidak mendapatkan jawaban yang memuaskan dalam kurun waktu selama kurang lebih 3 dasawarsa. Kemudian pada tahun 1943 Ljunggren juga kembali mengajukan pertanyaan yang sama, dan akhirnya pada tahun 1948 Nagell berhasil menemukan semua solusi bilangan bulat positif dari persamaan ini, yaitu $(x,n)= (1,3), (3,4), (5,5), (11,7)$, dan $(181,15)$. Oleh karena itu persamaan ini dikenal sebagai persamaan Ramanujan-Nagell. Adapun bukti dari fakta ini dipublikasikan di Inggris pada tahun 1960. Hasil ini memberikan motivasi kepada para matematikawan untuk menemukan solusi persamaan yang lebih umum dari tipe persamaan Ramanujan-Nagell.

$$x^2 = Ak^n + B, k \in Z_{\geq 2}, A,B \in Z\{0\} \qquad (1)$$

di mana $A,B \geq 0$. Banyak perhatian serta tulisan yang dihasilkan oleh para matematikawan untuk mempelajari tipe persamaan ini, salah satunya kasus dimana $A = 1$ dan *k* bilangan prima [1].

2. Persamaan Diophantine $x^2 = y^n + 2185$

Adapun usaha untuk mencari solusi persamaan (1) terus dilakukan, salah satu hasil penelitian terbaru telah dipublikasikan oleh Maciej Ulas pada tahun 2014. Dalam tulisannya [4], Ulas mengajukan sebuah konjektur berikut ini:

**Corresponding author:* Jurusan Matematika FMIPA UNSRAT, Jl. Kampus Unsrat, Manado, Indonesia 95115; Email address: mansmananohas@yahoo.com
Published by FMIPA UNSRAT (2015)

Konjektur

Jika(x,y,n), di mana x,y bilangan bulat positif dan $n \geq 3$, adalah solusi dari persamaan Diophantine bertipe Ramanujan-Nagell $x^2 = y^n + 2185$ maka:

n = 3, (x,y) = (49,6),(221,36),(248,39),(1949,156)

n = 4, (x,y) = (59,6)

n = 6, (x,y) = (221,6)

Konjektur ini juga memotivasi penulis dalam melakukan penelitian tentang solusi bilangan bulat positif dari persamaan $x^2 = y^n + 2185$.

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 1

Misalkan $x,y,n \in Z^+$ dengan $n \geq 4$ adalah bilangan genap, maka solusi dari persamaan Diophantine:

$$x^2 = y^n + 2185 \qquad (2)$$

adalah (x,y,n) = {(59,6,6),(221,6,4)}.

Bukti:

Misalkan n = 2m, sehingga persamaan (2) menjadi:

$$x^2 = y^{2m} + 2185 \Leftrightarrow (x - y^m)(x + y^m) = 2185$$

Karena $x,y \in Z^+$, maka $0 < x-y^m < x+y^m$, sehingga terdapat 4 kasus, yaitu:

i. $(x-y^m) = 1$

Dari kasus ini diperoleh persamaan: $y^m = 1092 = 2^2.3.7.13$, jelas hanya dipenuhi saat y = 1092 dan m = 1.

ii. $(x-y^m) = 5$

Dari kasus ini diperoleh persamaan: $y^m = 216 = 2^3.3^3$, kondisi ini dipenuhi saat (y,m) = {(6,3), (216,1)}.

iii. $(x-y^m) = 19$

Dari kasus ini diperoleh persamaan: $y^m = 48 = 2^4.3$, kondisi ini dipenuhi saat y = 48 dan m = 1.

iv. $(x-y^m) = 23$

Dari kasus ini diperoleh persamaan: $y^m = 36 = 2^4.3^2$, kondisi ini dipenuhi saat (y,m) = {(6,2), (36,1)}.

Karena $n \geq 4$, maka diperoleh solusi (y,n) = {(6,6), (6,4)}. Selanjutnya, dengan mudah diperoleh solusi (x,y,n) = {(59,6,6), (221,6,4)}.

Teorema 2

Misalkan $n \geq 3$ dan H adalah himpunan faktor persekutuan dari (x,y). Jika $\{5,19,23\} \subseteq H$, maka persamaan Diophantine (2) tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif (x,y).

Bukti:

Misalkan x = 5k dan y = 5l, akibatnya persamaan (2) menjadi:

$$(5k)^2 = (5l)^n + 2185 \qquad (3)$$

Setelah membagi kedua ruas persamaan (2) dengan 5, diperoleh persamaan:

$$5k^2 = 5^{(n-1)} l^n + 437 \qquad (4)$$

Perhatikan bahwa $5k^2 \equiv 5^{(n-1)} l^n + 437 \equiv 2 (\text{mod } 5)$. Di sini jelas tidak ada bilangan bulat positif (k,l) yang memenuhi sehingga tidak ada solusi (x,y) dengan faktor persekutuan 5.

Selanjutnya, jika dimisalkan x = 19a dan y = 19b, dengan cara yang sama diperoleh : $19a^2 \equiv 19^{(n-1)} b^n + 115 \equiv 1 (\text{mod } 19)$, jelas tidak ada bilangan bulat positif (a,b) yang memenuhi. Demikian juga apabila x = 23s dan y = 23t mengakibatkan $23s^2 \equiv 23^{(n-1)} t^n + 95 \equiv 3 (\text{mod } 23)$, jelas tidak ada bilangan bulat positif (s,t) yang memenuhi. Jadi, dapat disimpulkan bahwa persamaan Diophantine (2) tidak mempunyai solusi bilangan bulat positif (x,y) dengan faktor persekutuan 5, 19, dan 23.

Teorema 3

Untuk x bilangan genap, persamaan Diophantine :

$$x^2 = y^3 + 2185 \qquad (5)$$

hanya mempunyai solusi bilangan bulat positif (x,y)= (248,39).

Misalkan x genap. Agar (5) mempunyai solusi (x,y) bilangan bulat positif, maka haruslah y ganjil, sehingga berlaku:

$0 \equiv x^2 \equiv y^3 + 2185 \equiv (y+1) \text{mod } 4$

Artinya $y \equiv 3 \text{ mod } 4$, selain itu juga dapat ditulis:

$$x^2 = 4a + y + 1 \qquad (6)$$

untuk suatu $a \in Z^+$.

Selanjutnya, substitusi persamaan (6) ke (5), diperoleh:

$4(a-546) = y (y-1) (y+1)$

Andaikan a-546 memiliki beberapa faktor bilangan bulat positif, sehingga terdapat $r,k \in Z^+$ di mana $r|a, r|546$ dan a = kr, yang menyebabkan persamaan (5) menjadi:

$$4r\left(k - \frac{546}{r}\right) = y(y-1)(y+1) \qquad (7)$$

Karena y bilangan ganjil dan $y \equiv 3 \text{ mod } 4$ akibatnya persamaan (7) dapat dibagi menjadi 3 kasus berikut ini:

i. y = r = {3,7,39,91}

Jika y = {3,7,91} berturut-turut diperoleh x^2 = {3304,2528,755756}, jelas tidak ada satupun bilangan bulat x yang memenuhi. Sementara jika y = r = 39 diperoleh persamaan $x^2 = 61504$. Adapun satu-satunya bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan ini adalah x = 248.

ii. $y = k - \frac{546}{r}$

Dari kasus ini hanya diperoleh pasangan (y,r) = (3,2). Selanjutnya, melalui pasangan (y,r) = (3,2) diperoleh persamaan $x^2 = 2212$, jelas tidak ada x bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan ini.

iii. $y = r(k - \frac{546}{r})$ dan $y^2 - 1 = 4$

Karena $y \in Z^+$, kasus ini jelas tidak menghasilkan pasangan solusi bilangan bulat positif (x,y).

4. Kesimpulan

Kesimpulan

1. Untuk kasus n = 4 terbukti solusi persamaan $x^2 = y^n + 2185$ adalah (x,y) = (59,6), tepat sesuai konjektur.
2. Untuk kasus n = 6 terbukti solusi persamaan $x^2 = y^n + 2185$ adalah (x,y) = (221,6), tepat sesuai konjektur.
3. Untuk kasus n = 3 dengan x genap terbukti hanya terdapat satu pasangan solusi persamaan $x^2 = y^n + 2185$, yaitu (x,y) = (248,39), tepat sesuai konjektur.

Kesimpulan

Perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk menemukan semua pasangan solusi dari persamaan $x^2 = y^n + 2185$ untuk kasus n = 3 dan x bilangan ganjil.

Daftar Pustaka

[1] M. Bauer, M. Bennet, *Applications of hypergeometric method to the generalized Ramanujan-Nagell equation*. (English summary) Ramanujan J. 6 (2) (2002), 209-270.

[2] J. Stiller, The Diophantine equation $x^2 + 119 = 15.2^n$ has exactly six solutions, Rocky Mountain J. Math. 26 (1) (1996), 295-298.

[3] M. Ulas, *Some Observations on the Diophantine equation $y^2 = x! + A$ and related results*, Bull. Aust. Math. Soc. 86 (2012), 377-388.

[4] M. Ulas, *Some Experiments with Ramanujan-Nagell Type Diophantine Equation*, Math. NT, 2014.