

SYARAT PERLU DAN CUKUP INTEGRAL HENSTOCK-BOCHNER DAN INTEGRAL HENSTOCK-DUNFORD PADA $[a,b]$

Solikhin, Y.D. Sumanto, Susilo Hariyanto, Abdul Aziz
^{1,2,3,4}Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro
Jl. Prof Soedarto, S.H. Tembalang-Semarang
solikhin@live.undip.ac.id¹

Abstract. In this paper we study Henstock-Bochner and Henstock-Dunford integral on $[a,b]$. We discuss some properties of the integrable. For every function which Henstock-Bochner integrable then it is Hentsock-Dunford integrable. The contrary is not true. Further more, let for any $x^* \in X^*$ and collection $\{x^* f \mid x^* \in B(X^*)\}$ is Henstock-*equi-integrable*. We will show that function $f:[a,b] \rightarrow X$ is Henstock-Bochner integrable on $[a,b]$ if only if it is Henstock-Dunford integrable on $[a,b]$.

Keywords : Hentsock-Bochner integral, Henstock-*equi-integrable* and Henstock-Dunford integral

1. PENDAHULUAN

Integral Henstock didefinisikan atas partisi Perron δ -fine pada interval tertutup $[a,b]$. Integral Henstock merupakan generalisasi dari integral Riemann dan integral McShane [1,2].

Kajian integral Henstock dalam ruang dimensi satu R [2] telah digeneralisasi dalam ruang Euclide R^n [3]. Bahkan untuk fungsi bernilai real [1,2] digeneralisasi ke dalam fungsi bernilai Banach [4]. Integral Henstock untuk fungsi bernilai vektor atau Banach dikenal dengan integral Henstock-Bochner [5].

Kajian integral Henstock telah banyak dikombinasikan dengan integral lain seperti integral Henstock-Stieltjes [6], Henstock-Pettis, Henstock-Dunford untuk fungsi bernilai Banach [7].

Integral Henstock-Dunford merupakan hasil kombinasi integral Henstock dengan integral Dunford. Integral Dunford didefinisikan oleh fungsi terukur lemah pada ruang real R [8]. Diberikan X ruang Banach dan

$X^* = \{x^* \mid x^* : X \rightarrow R \text{ linear kontinu}\}$ ruang dualnya (dual pertama) dengan $X^{**} = \{x^{**} \mid x^{**} : X^* \rightarrow R \text{ linear kontinu}\}$ dual kedua serta $[a,b] \subset R$. Fungsi terukur lemah $f:[a,b] \rightarrow X$ dikatakan terintegral

Dunford pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [a,b] \rightarrow R$ terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan untuk setiap himpunan terukur $A \subset [a,b]$ terdapat vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f = (H) \int_a^b x^* f \chi_A.$$

Selanjutnya integral Dunford kemudian diperluas ke dalam integral tipe Riemann, yaitu untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f : [a,b] \rightarrow R$ terintegral Henstock. Integral ini dinamakan integral Henstock-Dunford [7, 9].

Topik integral Henstock-Dunford menjadi kajian oleh penulis. Beberapa kajian tentang integral Henstock-Dunford antara lain perluasan Harnack dan sifat Cauchy integral Henstock-Dunford dalam ruang Euclide R^n [10], beberapa sifat Small Riemann Sums fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [11, 12, 13], kekonvergenan barisan fungsi terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [14], karakteristik fungsi primitive integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$ [15], serta posisi integral Henstock-Dunford dan integral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ [16].

Kajian posisi integral Henstock-Dunford dan integral Henstock-Bochner

telah dihasilkan bahwa untuk setiap fungsi f yang terintegral Henstock-Bochner maka fungsi f tersebut terintegral Henstock-Dunford, akan tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Jika integral Henstock-Bochner diperlemah menjadi integral Henstock Lemah maka diperoleh bahwa integral Henstock-Dunford ekuivalen dengan integral Henstock Lemah [16]. Berdasarkan hasil ini, maka penulis akan mengkaji syarat apa yang harus ditambahkan supaya integral Henstock-Bochner ekuivalen dengan integral Henstock-Dunford.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut diberikan definisi integral Henstock-Bochner, integral Henstock-Bochner serentak, integral Henstock serentak, dan integral Henstock-Dunford dari suatu fungsi bernilai vektor.

Jika $A = [c, d] \subset [a, b]$ maka simbol $\alpha(A)$ dalam tulisan ini dimaksudkan sebagai $\alpha(A) = |d - c|$, panjang interval tertutup A .

Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya (dual pertama) dengan X^{**} dual kedua, serta interval tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definisi 2.1 [5] Fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$, ditulis singkat $f \in HB[a, b]$, jika ada vektor $L \in X$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left\| L - \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) \right\|_X < \varepsilon.$$

Jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$ maka vektor L dalam Definisi 2.1 adalah tunggal dan ditulis

$$L = (HB) \int_a^b f.$$

Teorema Cauchy yang berlaku dalam integral Henstock fungsi bernilai real juga

berlaku dalam integral Henstock-Bochner fungsi bernilai vektor.

Teorema 2.2 (Teorema Cauchy) Fungsi $f \in HB[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan jika $\mathcal{P} = \{(P, x)\}$ dan $\mathcal{Q} = \{(Q, x)\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right\|_X < \varepsilon.$$

Bukti: [17]. ■

Teorema 2.3 [17] Jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$ maka f terintegral Henstock-Bochner pada setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$.

Bukti:

Katakan $A = [c, d] \subset [a, b]$ interval tertutup di dalam $[a, b]$.

Karena $f \in HB[a, b]$ maka menurut Teorema Cauchy, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga jika $\mathcal{P} = \{(P, x)\}$ dan $\mathcal{Q} = \{(Q, x)\}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ maka berlaku

$$\left\| \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right\|_X < \varepsilon.$$

Diambil $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ partisi Perron δ -fine pada $[c, d]$, $\mathcal{P}_1$ partisi Perron δ -fine pada $[a, c]$ dan $\mathcal{Q}_1$ partisi Perron δ -fine pada $[d, b]$.

Dibentuk

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{Q}_1 \text{ dan}$$

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{Q}_1.$$

Diperoleh $\mathcal{P}'$ dan $\mathcal{Q}'$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ sehingga

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{D}_1 \sum f(x) \alpha(D_1) - \mathcal{D}_2 \sum f(x) \alpha(D_2) \right\|_X \\ &= \left\| \mathcal{P}' \sum f(x) \alpha(P') - \mathcal{Q}' \sum f(x) \alpha(Q') \right\|_X < \varepsilon. \end{aligned}$$

Menurut Teorema Cauchy, terbukti $f \in HB[c, d]$ untuk setiap $[c, d] \subset [a, b]$. ■

Jika sebarang fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$, maka untuk

setiap $x^* \in X^*$ komposisi fungsi bernilai real x^*f terintegral Henstock.

Teorema 2.4 [16] Jika $f \in HB[a, b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$, fungsi $x^*f : [a, b] \rightarrow R$ terintegral Henstock pada $[a, b]$.

Bukti:

Oleh karena $f : [a, b] \rightarrow X$ terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif $\delta > 0$ pada $[a, b]$ dan untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ pada $[a, b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - (HB) \int_a^b f \right\|_X < \varepsilon.$$

Oleh karena itu untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{D} \sum x^* f(x) \alpha(D) - x^* (HB) \int_a^b f \right| \\ & \leq \|x^*\|_X \left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - (HB) \int_a^b f \right\|_X \\ & \leq \|x^*\|_X \varepsilon \end{aligned}$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ pada $[a, b]$.

Jadi untuk setiap $x^* \in X^*$, fungsi $x^*f \in H[a, b]$. ■

Definisi 2.5 [7] Fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ dikatakan terintegral Henstock-Dunford pada $[a, b]$ jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^*f : [a, b] \rightarrow R$ terintegral Henstock pada $[a, b]$ dan untuk setiap interval tertutup $A \subset [a, b]$ terdapat vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ sehingga

$$x_{(f,A)}^{**}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ di atas disebut nilai integral Henstock-Dunford pada A atas fungsi f dan ditulis

$$x_{(f,A)}^{**} = (HD) \int_A f.$$

Dapat ditunjukkan bahwa vektor $x_{(f,A)}^{**} \in X^{**}$ adalah tunggal.

Jika f terintegral Henstock-Dunford pada $[a, b]$, ditulis $f \in HD[a, b]$.

Teorema 2.6 [7] Fungsi f terintegral Henstock-Dunford pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real x^*f terintegral Henstock pada $[a, b]$.

Bukti:

Jelas menurut Definisi 2.5. ■

Menurut Teorema 2.4 dan Teorema 2.6 diperoleh bahwa jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$, maka f terintegral Henstock-Dunford pada $[a, b]$.

Definisi 2.7 [8] Koleksi $\mathcal{H} \subset \{f \mid f : [a, b] \rightarrow X\}$ dikatakan terintegral Henstock-Bochner serentak (Henstock-Bochner equi-integrable) pada $[a, b]$ jika untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - (HB) \int_a^b f \right\|_X < \varepsilon,$$

dengan $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Jika diambil $X = R$ maka dikatakan terintegral Henstock serentak pada $[a, b]$, yaitu koleksi $\mathcal{H} \subset \{f \mid f : [a, b] \rightarrow R\}$ dikatakan terintegral Henstock serentak (Henstock equi-integrable) pada $[a, b]$ jika untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - (H) \int_a^b f \right| < \varepsilon,$$

dengan $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Teorema 2.8 [8] Jika koleksi $\mathcal{H} \subset \{f_k \mid f_k : [a, b] \rightarrow X, k \in N\}$ terintegral Henstock-Bochner serentak pada $[a, b]$ dengan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \forall x \in [a, b],$$

maka fungsi $f \in HB[a, b]$ dan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (HB) \int_a^b f_k = (HB) \int_a^b f.$$

Bukti:

Oleh karena diketahui bahwa $\mathcal{H} \subset \{f_k \mid f_k : [a, b] \rightarrow X, k \in N\}$ terintegral Henstock-Bochner serentak pada $[a, b]$ maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap $f_k \in \mathcal{H}$, untuk setiap $k \in N$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f_k(x_i) \alpha(D_i) - (HB) \int_a^b f_k \right\|_X < \frac{\varepsilon}{4},$$

dengan $\mathcal{D} = \{(D_i, x_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Jika partisi Perron $\mathcal{D} = \{(D_i, x_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ diambil tetap maka f_k akan konvergen titik demi titik, yaitu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_k(x_i) \alpha(D_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i).$$

Pilih $k_0 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap $k > k_0$ berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_k(x_i) \alpha(D_i) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) \right\|_X < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) - (HB) \int_a^b f_k \right\|_X &\leq \\ \left\| \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) - \sum_{i=1}^n f_k(x_i) \alpha(D_i) \right\|_X &+ \\ + \left\| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) \alpha(D_i) - (HB) \int_a^b f_k \right) \right\|_X \end{aligned}$$

$$< \varepsilon$$

untuk setiap $k > k_0$.

Jadi jika untuk setiap $k, l > k_0$ diperoleh

$$\begin{aligned} &\left\| (HB) \int_a^b f_k - (HB) \int_a^b f_l \right\|_X \\ &\leq \left\| (HB) \int_a^b f_{k_0} - \sum_{i=1}^n f_{k_0}(x_i) \alpha(D_i) \right\|_X \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^n f_{k_0}(x_i) \alpha(D_i) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) \right\|_X \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) - (HB) \int_a^b f_{k_0} \right\|_X \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini berarti barisan $\left\{ (HB) \int_a^b f_k \right\}$

merupakan barisan Cauchy.

Karena X lengkap maka setiap barisan Cauchy akan konvergen di X .

Jadi,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (HB) \int_a^b f_k = L \in X.$$

Menurut Hipotesa, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap $f_k \in \mathcal{H}$, untuk setiap $k \in N$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f_k(x_i) \alpha(D_i) - (HB) \int_a^b f_k \right\|_X < \frac{\varepsilon}{4},$$

dengan $\mathcal{D} = \{(D_i, x_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Karena

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (HB) \int_a^b f_k = L \in X,$$

Pilih $K \in N$ sedemikian sehingga berlaku

$$\left\| (HB) \int_a^b f_k - L \right\|_X < \varepsilon,$$

untuk setiap $k > K$.

Karena f_k konvergen ke f titik demi titik maka ada $k_1 \geq K$ sehingga berlaku

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_{k_1}(x_i) \alpha(D_i) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) \right\|_X < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) - L \right\|_X \leq \\ & \left\| \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha(D_i) - \sum_{i=1}^n f_{k_i}(x_i) \alpha(D_i) \right\|_X \\ & + \left\| \sum_{i=1}^n f_{k_i}(x_i) \alpha(D_i) - (HB) \int_a^b f_{k_i} \right\|_X \\ & + \left\| (HB) \int_a^b f_{k_i} - L \right\|_X < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini berarti bahwa f terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$ dan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (HB) \int_a^b f_k = L = (HB) \int_a^b f.$$

Jadi $f \in HB[a, b]$ dan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (HB) \int_a^b f_k = (HB) \int_a^b f. \quad \blacksquare$$

Telah ditunjukkan bahwa jika fungsi f terintegral Henstock-Bochner maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock, sebaliknya belum tentu berlaku. Artinya jika untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi $x^* f$ terintegral Henstock, maka belum tentu fungsi f terintegral Henstock-Bochner dan diperlihatkan contohnya [16]. Teorema berikut ini menyatakan keberlakuan sebaliknya dengan memberikan syarat bahwa untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real $x^* f$ harus terintegral Henstock serentak.

Lemma 2.9 Diberikan sebarang bilangan real $a, b \in R$.

- (i) Jika $a \leq x$ untuk setiap $x > b$ maka $a \leq b$.
- (ii) Jika $a \geq x$ untuk setiap $x < b$ maka $a \geq b$.

Bukti:

- (i) Andaikan $a > b$ maka terdapat bilangan $x \in R$ sehingga $a > x > b$. Diperoleh $a > x$ dan $x > b$. Kontradiksi dengan yang diketahui $x \geq a$, untuk setiap $x > b$. Jadi $a \leq b$.
- (ii) Andaikan $a < b$ maka terdapat bilangan $x \in R$ sehingga $a < x < b$.

Diperoleh $a < x$ dan $x < b$. Kontradiksi dengan yang diketahui $x \leq a$, untuk setiap $x < b$. Jadi yang benar $a \geq b$. ■

Lemma 2.9 akan digunakan untuk menunjukkan bukti syarat cukup dari teorema berikut ini.

Teorema 2.10 Fungsi $f \in HB[a, b]$ jika dan hanya jika koleksi $\{x^* f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a, b]$.

Bukti: (Syarat perlu) Karena $f \in HB[a, b]$

berarti ada $L = (HB) \int_a^b f \in X$ sehingga

untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - (HB) \int_a^b f \right\|_X < \varepsilon.$$

Oleh karena itu untuk sebarang $x^* \in B(X^*) = \{x^* \in X^* \mid \|x^*\|_X \leq 1\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{D} \sum (x^* f)(x) \alpha(D) - x^* (HB) \int_a^b f \right| \\ & = \left| x^* \left(\mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - (HB) \int_a^b f \right) \right| \\ & \leq \|x^*\|_X \left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - (HB) \int_a^b f \right\|_X \\ & \leq \|x^*\|_X \varepsilon, \end{aligned}$$

untuk setiap partisi Perron δ -fine $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ pada $[a, b]$.

Jadi $\{x^* f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a, b]$.

(Syarat cukup) Diketahui $\{x^* f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a, b]$. Berarti untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap $x^* f \in \{x^* f \mid x^* \in B(X^*)\}$ berlaku

$$\left| \mathcal{D} \sum (x^* f)(x) \alpha(D) - (H) \int_a^b x^* f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dengan $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ dan $x^* \in B(X^*)$.

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} & \left| x^* \left(\mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right) \right| \\ &= \left| x^* \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - x^* \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right| \\ &\leq \left| \mathcal{P} \sum (x^* f)(x) \alpha(P) - (H) \int_a^b x^* f \right| \\ &\quad + \left| \mathcal{Q} \sum (x^* f)(x) \alpha(Q) - (H) \int_a^b x^* f \right| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

untuk sebarang $\mathcal{P} = \{(P, x)\}$, $\mathcal{Q} = \{(Q, x)\}$ dua partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ dan $x^* \in B(X^*)$.

Karena untuk sebarang $x^* \in B(X^*)$ berlaku

$$\begin{aligned} & \left| x^* \left(\mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right) \right| \\ &\leq \|x^*\|_X \left\| \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right\|_X \\ &\leq \left\| \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right\|_X \end{aligned}$$

dan karena

$$\begin{aligned} & \left| x^* \left(\mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right) \right| < \varepsilon \\ &\text{maka menurut Lemma 2.9 diperoleh} \\ &\left\| \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right\|_X < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ dan jika $\mathcal{P}$ dan $\mathcal{Q}$ partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ berlaku

$$\left\| \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) - \mathcal{Q} \sum f(x) \alpha(Q) \right\|_X < \varepsilon.$$

Menurut Teorema Cauchy, f terintegral Henstock-Bochner pada $[a, b]$. ■

Berdasarkan Teorema Cauchy dan definisi integral Henstock-Bochner serentak diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.11 Koleksi

$\mathcal{H} \subset \{f | f : [a, b] \rightarrow X\}$ terintegral Henstock-Bochner serentak pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$

terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(P) \right\|_X < \varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$, $\mathcal{P} = \{(P, y)\}$ dua partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ dan $f \in \mathcal{H}$.

Bukti:

(Syarat Perlu) Diketahui $\mathcal{H} \subset \{f | f : [a, b] \rightarrow X\}$ terintegral

Henstock-Bochner serentak pada $[a, b]$ berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(D) \right\|_X < \varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$, $\mathcal{P} = \{(P, y)\}$ dua partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

(Syarat Cukup) Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(D) \right\|_X < \varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$, $\mathcal{P} = \{(P, y)\}$ dua partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$ dan $f \in \mathcal{H}$.

Berarti untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(D) \right\|_X < \varepsilon.$$

Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga untuk setiap $f \in \mathcal{H}$ berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum f(x) \alpha(D) - \mathcal{P} \sum f(x) \alpha(D) \right\|_X < \varepsilon$$

untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D, x)\}$, $\mathcal{P} = \{(P, y)\}$ dua partisi Perron δ -fine pada $[a, b]$.

Jadi $\mathcal{H} \subset \{f | f : [a, b] \rightarrow X\}$ terintegral Henstock-Bochner serentak pada $[a, b]$. ■

Telah ditunjukkan juga bahwa setiap fungsi yang terintegral Henstock-Bochner maka terintegral Henstock-Dunford [16], akan tetapi sebaliknya belum tentu berlaku [16]. Jika ditambahkan syarat bahwa untuk setiap koleksi $\{x^* f | x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a, b]$ maka

sebaliknya akan berlaku seperti diuraikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 2.12 *Diketahui koleksi $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$. Fungsi $f \in HB[a,b]$ jika dan hanya jika $f \in HD[a,b]$.*

Bukti: (Syarat Perlu) Diketahui koleksi $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ maka untuk sebarang interval tertutup $A \subset [a,b]$, fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada A . Jadi terdapat fungsi positif δ pada $[a,b]$ dan jika $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ sebarang partisi Perron δ -fine pada A berlaku

$$\left\| \mathcal{D} \sum_{x \in A} f(x) \alpha(D) - (H) \int_A f \right\|_X < \varepsilon.$$

Oleh karena itu untuk setiap $x^* \in X^*$ diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{D} \sum_{x \in A} x^* f(x) \alpha(D) - (H) \int_A x^* f \right| \\ &= \left| \left(x^* \right) \left(\mathcal{D} \sum_{x \in A} f(x) \alpha(D) - (H) \int_A f \right) \right| \\ &= \|x^*\|_X \left\| \mathcal{D} \sum_{x \in A} f(x) \alpha(D) - (H) \int_A f \right\|_X \\ &< \|x^*\|_X \varepsilon, \end{aligned}$$

untuk setiap $\mathcal{D} = \{(D,x)\}$ partisi Perron δ -fine pada A .

Hal ini berarti x^*f terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan untuk interval tertutup $A \subset [a,b]$ di atas terdapat vektor $x^*_{(f,A)} \in X^{**}$ sehingga

$$x^*_{(f,A)}(x^*) = (H) \int_A x^* f.$$

Jadi $f \in HD[a,b]$.

(Syarat Cukup) Karena $f \in HD[a,b]$ maka untuk setiap $x^* \in X^*$ fungsi bernilai real x^*f terintegral Henstock pada $[a,b]$. Karena diketahui bahwa koleksi

$\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$ maka menurut Teorema 2.10 fungsi $f \in HB[a,b]$. ■

3. PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa jika untuk setiap $x^* \in X^*$ koleksi $\{x^*f \mid x^* \in B(X^*)\}$ terintegral Henstock serentak pada $[a,b]$ maka fungsi f terintegral Henstock-Bochner pada $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gordon, R.A., (1994), *The Integral of lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Mathematical Society, USA.
- [2] Lee P.Y., (1989), *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore.
- [3] Indrati, Ch. R., (2002), *Integral Henstock-Kurzweil di dalam Ruang Euclidean Berdimensi-n*, Disertasi, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- [4] Cao, S.C., (1992), The Henstock Integral for Banach-valued Functions, *Southeast Asian Bull. Math*, 16(-): 35-40.
- [5] Cao, S.C., (1993), On The Henstock-Bochner Integral, *Southeast Asian Bull. Math. Special Issue*, p. 1-3.
- [6] Lim J.S, Yoon J.H, Eun G.S. (1998), On Henstock Stieltjes Integral, *Kangweon-Kyungki Math. Jour.*, 6(1): 87-96.
- [7] Guoju, Ye., Tianqing, An. (2001), On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integrals, *IJMMS*, 25(7): 467-478.
- [8] Schwabik, S., Guoju, Ye. (2005), *Topics in Banach Space Integration*, World Scientific, Singapore.
- [9] Saifullah. (2003), *Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclidean R^n* ,

- Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
- [10] Solikhin. (2013), Perluasan Harnack dan Sifat Cauchy Integral Henstock-Dunford pada Ruang Euclidean R^n , *Jurnal Matematika*, 16(1): 8-12.
- [11] Solikhin, Y.D. Sumanto dan Siti Khabibah. (2013), Locally dan Globally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*, 25 Februari 2017, hal.107-115 ISBN 978-602-6100-0-0.
- [12] Solikhin, YD. Sumanto dan Siti Khabibah. (2014), Essentially Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Jurnal Matematika*, 17(2): 55-61.
- [13] Solikhin, Sumanto dan Khabibah. (2012), Functionally Small Riemann Sums Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Jurnal Sains dan Matematika*, 20(3): 58-63.
- [14] Solikhin, Heru Tjahjana dan Solichin Zaki. (2016), Kekonvergenan Barisan Fungsi Terintegral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Jurnal Matematika*, 19(1): 29-39.
- [15] Solikhin. (2017), Karakteristik Fungsi Primitif Integral Henstock-Dunford pada $[a,b]$, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*, 25 Februari 2017, hal.107-115 ISBN 978-602-6100-0-0.
- [16] Solikhin, Heru Tjahjana dan Solichin Zaki. (2016), Posisi Integral Henstock-Dunford dan Integral Henstock-Bochner pada $[a,b]$, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*, 5 Nopember 2016, hal. MA85-MA92 ISBN 978-602-73403-1-2.
- [17] Solikhin. (2011), *Integral Dunford-Henstock pada sel $[\bar{a}, \bar{b}] \subset R^n$* , Tesis, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
-